František Josef Studnička
Elementární odůvodnění periodičnosti nižších funkcí transcendentních

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 22 (1893), No. 3, 209--213

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/120900`

Elementární odůvodnění periodičnosti nižších funkcí transcendentních.

Pro studující napsal

prof. dr. F. J. Studnička.

Vyjdeme-li od známého vzorce

$$\lim_{\omega = \infty} \left(1 + \frac{x}{\omega}\right)^{\omega} = e^{x}, \tag{1}$$

obdržíme především druhý výměr exponenciálního výrazu

$$e^{x} = 1 + \frac{x}{1\,!} + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + \ldots, \tag{2}$$

z něhož snadno se odvodí

$$e^{ix} = c\,(x) + i\,s\,(x), \tag{3}$$

zavedeme-li pro *sudou* funkci příslušnou označení

$$1 - \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4\,!} - \ldots = c\,(x) \equiv c\,(-x), \tag{4}$$

a pro doplňující *lichou* funkci podobné označení

$$x - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} - \ldots = s\,(x) \equiv -\,s\,(-\,x). \tag{5}$$

Z těchto vzorců plyne pak přímo

$$e^{-ix} = c\,(x) - i\,s\,(x), \tag{6}$$

takže naopak vzniká pro obě funkce tyto nový výměr

$$c\,(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \tag{7}$$

$$s\,(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \tag{8}$$

z čehož plyne taktéž, jako ze vzorce (4) a (5),

$$c\,(o) = 1, \quad s\,(o) = 0, \tag{9}$$

---

*) Viz *Studnička* „Výklady o funkcích monoperiodických“ pag. 19.

zároveň pak, jako ze vzorce (3) a (6), základní relace

$$c^2(x) + s^2(x) = 1. \tag{10}$$

Další vlastnosti obou těchto funkcí plynou z příslušných pouček součtových, jež přímo se obdrží ze součinu na vzorci (3) založeném,

$$e^{ix} = c(x) + i\,s(x),$$
$$e^{iy} = c(y) + i\,s(y),$$

jelikož tu s jedné strany násobením se obdrží

$$e^{i(x+y)} = c(x)\,c(y) - s(x)\,s(y) + i\,[s(x)\,c(y) + c(x)\,s(y)],$$

s druhé pak strany přímým dosazením se zjedná

$$e^{i(x+y)} = c(x+y) + i\,s(x+y),$$

takže obdržíme, porovnáme-li obdobné členy, co poučky součtové

$$c(x+y) = c(x)\,c(y) - s(x)\,s(y), \tag{11}$$
$$s(x+y) = s(x)\,c(y) + c(x)\,s(y), \tag{12}$$

z čehož pak jde

$$c(2x) = c^2(x) - s^2(x), \tag{13}$$
$$s(2x) = 2x\,s(x)\,c(x). \tag{14}$$

Předeslavše tyto vzorce, stanovme argument x_1 tak, aby

$$c(x_1) = s(x_1), \tag{15}$$

takže pak ze vzorce (13), (14) a (10) obdržíme

$$c(2x_1) = 0, \tag{16}$$
$$s(2x_1) = s^2(x_1) = 1, \tag{17}$$

načež pomocí vzorce (10) vznikne

$$c(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} = s(x_1). \tag{18}$$

Aniž bychom znali číselnou hodnotu zvláštního argumentu tohoto

$$2x_1 = \omega, \tag{19}$$

užijme postupně vzorců (11) a (12) a (16) i (17) a zjednejme si

$$
\begin{aligned}
c(x+\omega) &= c(x) \,.\, c(\omega) - s(x)\, s(\omega) \\
&= - s(x), \\
s(x+2\omega) &= s(x+\omega) \,.\, c(\omega) + c(x+\omega)\, s(\omega) \\
&= c(x+\omega) = - s(x), \\
c(x+3\omega) &= c(x+2\omega)\, c(\omega) - s(x+2\omega)\, s(\omega) \\
&= - s(x+2\omega) = s(x), \\
s(x+4\omega) &= s(x+3\omega)\, c(\omega) + c(x+3\omega)\, s(\omega) \\
&= c(x+3\omega) = s(x).
\end{aligned}
$$

Naše funkce $s(x)$ nezměnila se, když k argumentu přidáno

$$4\omega = p,$$

takže bude i všeobecně

$$s(x+kp) = s(x), \tag{20}$$

kdež p značí velikost periody, k pak libovolné číslo celistvé.

A co platí o funkci $s(x)$, možná stejným spůsobem dokázati i pro funkci $c(x)$. Na tomto základě pak snadno se pomocí vzorce (3) přesvědčíme, že

$$e^{x+kpi} = e^x \,.\, e^{kpi} = e^x, \tag{21}$$

takže tato funkce honosí se touže periodou, imaginárně však vzatou.*)

Poznámka. Kdybychom konečně chtěli znáti i číselnou hodnotu argumentu ω, uvažme, že z podmínky (3) plyne

$$c(x_1) - s(x_1) = 1 - \frac{x_1}{1!} - \frac{x_1^2}{2!} + \frac{x_1^3}{3!} + \frac{x_1^4}{4!} - \ldots = 0. \tag{22}$$

Jde při tom tedy o vyšetření hodnoty x_1 tuto řadu identicky annullující.

Aniž bychom přihlíželi k tomu, že hodnoty $c(x_1)$ a $s(x_1)$ jsou v tabulkách uloženy **), takže bychom přímo se mohli cíle domáhati, dosaďme tam napřed

---

*) Ibid. pag. 157.

**) Viz *Studnička* „Kapesní tabulky logarithmické" pag. 40. et seqq., z nichž snadno se pozná, že

$$x_1 = 1,$$

načež obdržíme, spojíme-li positivní členy s positivními a negativní s negativními,

$$c(1) - s(1) = -\left(\frac{2}{3!} + \frac{6}{7!} + \frac{10}{11!} + \ldots\right)$$
$$+ \left(\frac{4}{5!} + \frac{8}{9!} + \frac{12}{13!} + \ldots\right);$$

obě řady jsou tu konvergentní, soulehlí pak členové dole již prvním počínajíc vesměs menší nežli nahoře, součet negativních členů tedy větší nežli součet členů positivních a tedy konečně

$$c(1) - s(1) < 0;$$

podobně obdržíme, dosadíme-li tam

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

a spojíme-li stejně označené členy dohromady,

$$c\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - s\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}-1}{4.5!\sqrt{2}} + \frac{9\sqrt{2}-1}{16.9!\sqrt{2}} + \ldots$$
$$-\left(\frac{3\sqrt{2}-1}{2.3!\sqrt{2}} + \frac{7\sqrt{2}-1}{8.7!\sqrt{2}} + \frac{11\sqrt{2}-1}{32.11!\sqrt{2}} + \ldots\right),$$

kdež patrno, že řada členů positivních jest větší nežli řada členů negativních, takže tu platí

$$c\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - s\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0.$$

Spojíme-li oba výsledky a uvážíme-li, že naše funkce řadou (22) vyjádřená jest naprosto spojitou, poznáme, že nejmenší positivní hodnota ji annullující vyhovuje podmínce

---

$$c(1) - s(1) = -0{\cdot}4161\ldots$$
$$c\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - s\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = +0{\cdot}1559\ldots,$$

z čehož i soudíme, že hodnota x_1 bližší jest tomuto argumentu než onomu.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < x_1 < 1,$$

že jest tedy v těchto mezích obsažena.

Jak se blíže určí, není účelem těchto řádků; jestiť tu, jakož odjinud známo,

$$x_1 = \frac{\pi}{4}, \text{ tedy } \omega = \frac{\pi}{2}, \quad p = 2\pi,$$

značí-li π Ludolfinu.

Směs.

Magnetické vlastnosti kyslíku. (Napsal *Boh. Mašek*, assistent fys. ústavu české university).

Již *Faraday*, jenž první ukázal na podstatný rozdíl v chování těles tuhých v mohutném poli magnetickém, seznal, že též tělesa kapalná i plynná jeví snahu (v míře větší neb menší) postaviti se do polohy buď axiálné buď aequatoreálné. Při tělesích tuhých i kapalných není nesnadno stanoviti vliv pole magnetického, za to tím obtížnější jsou pokusy s plyny, ježto množství hmoty při experimentu jest jen velmi malé. Duchaplnými methodami, hlavně na reakcích chemických založenými, ukázal Faraday, že kyslík jest plynem dosti značně paramagnetickým, což práce pozdější *Plückerovy*, *Becquerelovy*, *Tyndallovy* a j. quantitativně stvrdily. Jest zajímavou otázkou, zdali a jak mění se magnetické vlastnosti hmoty, která ze stavu plynného přejde v kapalný, resp. tuhý, a to hlavně z důvodů dvou: předně jak závisí magnetismus na stavu skupenstva a za druhé zdali i při tak nízkých temperaturách, při nichž plyny jsou kapalnými, platí stejná závislost magnetismu na temperatuře, jako při poměrech obyčejných, kdy magnetismu s rostoucí temperaturou ubývá. Otázky tyto aspoň částečně rozřešil ke konci r. 1891 prof. *James Dewar* v Londýně a to pro kyslík, jenž jest z plynů nám známých nejvíce magnetickým. (Proc. Roy. Soc. s. 50. r. 1892.)

Skapalněný kyslík, který na vzduchu velmi prudce vřel a na stálé temperatuře — 181°C se udržoval, vložil mezi poly