Alois Strnad

O čtyrúhelníku dvojstředovém. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 17 (1888), No. 2, 56--68

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/120899`

O čtyrúhelníku dvojstředovém.

Pro žáky středních škol napsal

A. Strnad,
professor v Hradci Králové.

(Dokončení.)

7. Veďme bodem m mimo kružnici K daným (obr. 3.) dvé přímek protínajících kružnici v bodech a, b, c, d; ustanovme průsečík p přímek ac, bd, i průsečík n přímek ad, bc, a spojme body p, n přímkou M. Poloha přímky této jest táž při všech dvojinách přímek bodem m vedených a závisí jen na poloze bodu m ke kružnici K. Přímka M slove polárou bodu m vzhledem ke kružnici K, a naopak bod m jest pólem přímky M. Polára kolma jest ku spojnici pólu se středem kružnice.

Je-li bod m vně kružnice K, spojuje přímka M body dotyčné tečen vedených z m ku K. Poláry všech bodů libovolné přímky procházejí pólem této přímky, a póly všech přímek procházejících nějakým bodem leží na poláře tohoto bodu. V čtyrúhelníku kružnici vepsaném určují průsečíky úhlopříčen a průsečíky protějších stran trojúhelník, v němž jest každý vrchol pólem protější strany (trojúhelník polárný).

Připomenuli jsme tuto hlavní věty z nauky o pólech a polárách,*) aby bez obtíží mohlo býti porozuměno dalším úvahám jednajícím o polárných vlastnostech čtyrúhelníka dvojstředového. Nazývejme přímku mn, spojující průsečíky protějších stran čtyrúhelníka, *vnější úhlopříčnou* jeho. Přímka tato P jest dle vysvětlení dříve podaného polárou bodu p vzhledem ke kružnici K; je-li čtyrúhelník $abcd$ dvojstředový, jest také polárou bodu p vzhledem ke kružnici vepsané L. Jest totiž vzhledem k této kružnici bod m pólem přímky eg, n pólem přímky fh, tedy P polárou průsečíku p; proto lze říci:

Vnější úhlopříčna čtyrúhelníka dvojstředového jest polárou průsečíku úhlopříčen jeho vzhledem ke kružnici opsané i vepsané.

---

*) Odůvodnění viz ku př. v *Šandově Měřictví* pro vyšší třídy středních škol, II. vyd. str. 163—165.

Poněvadž však přímka spojující pól se středem kružnice kolma jest k poláře, bude

(11) $kp \perp mn, \quad lp \perp mn,$

a tudíž body k, l, p leží v přímce jediné Q kolmé ku P, t. j.:

V čtyrúhelníku dvojstředovém leží oba středy a průsečík úhlopříčen v jedné přímce kolmé ku vnější úhlopříčně.

Jmenujme onu přímku *obojstřednou přímkou* čtyrúhelníka *abcd*.

Polárou bodu m ke kružnici K jest přímka np, a proto $np \perp km$; dále jest mp čili N polárou bodu n a tedy $mp \perp kn$. Z toho vysvítá:

Průsečík úhlopříčen dvojstředového čtyrúhelníka jest průsečíkem výšek v trojúhelníku, jehož vrcholy jsou průsečíky protějších stran a střed kružnice opsané.

Ježto čtyrúhelník dotyčný *efgh* vepsán jest kružnici L, musí průsečíky r, s protějších stran jeho ležeti na poláře P bodu p společného oběma úhlopříčnám. Strana ef jest polárou bodu b ku L, strana gh polárou bodu d ku L; protož jest bd polárou bodu r, ve kterém se ef, gh protínají, a následkem toho procházeti musí průsečíkem s přímek eh, fg. Z podobných důvodů jest ac polárou bodu s ku L a prochází bodem r.

Že jest

(12) $lr \perp bd, \quad ls \perp ac,$

jest z předcházejícího zřejmo, a můžeme tudíž výsledky tyto zahrnouti větou:

Každé dvě protější strany čtyrúhelníka dotyčného protínají se s jednou úhlopříčnou čtyrúhelníka dvojstředového v jednom bodě na vnější úhlopříčně tohoto čtyrúhelníka; oba takto vzniklé body a střed kružnice vepsané jsou vrcholy trojúhelníka, jehož výšky protínají se v průsečíku úhlopříčen dvojstředového čtyrúhelníka.

Jedné ještě věci si povšimněme, která z obr. 3. jest zřejma. Poněvadž jest $eg \perp fh$ a mimo to

$$ml \perp eg, \quad nl \perp fh,$$

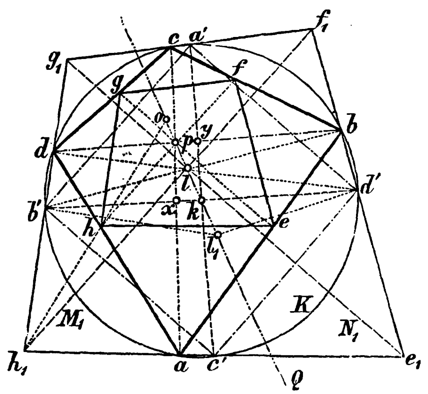
jest také

(13) $ml \parallel fh, \quad nl \parallel eg, \quad ml \perp nl;$

z čehož věta:

Přímky spojující střed kružnice vepsané dvojstředovému čtyrúhelníku s průsečíky protějších stran jeho jsou rovnoběžny s úhlopříčnami čtyrúhelníka dotyčného a proto k sobě kolmy.

8. Přímky půlící vnější úhly čtyrúhelníka $abcd$ omezují čtyrúhelník nový $e_1f_1g_1h_1$ (obr. 4.), který *přidruženým* prvého nazývejme.



Obr. 4.

Čtyrúhelník přidružený jest podoben a podobně položen čtyrúhelníku $efgh$; že strany obou střídavě jsou rovnoběžny, jest na snadě; o úhlopříčnách poznáme to z důvodů následujících, kterými též jiné vztahy na jevo vyjdou. Hledíme-li k prodlouženým přímkám ab, cd, pozorujeme, že body l, f_1, h_1 jsou středy kružnic obou přímek těch se dotýkajících; leží tedy body m, l, f_1, h_1 v jedné přímce M_1 půlící úhel amd. Rovněž tak body n, l, e_1, g_1 leží na přímce N_1 půlící úhel anb. Tím na novo se potvrzuje, že jest $ml \perp nl$; neboť — jak lze snadně dokázati — přímky půlící úhly protějších stran v každém čtyrúhelníku tětivovém jsou k sobě kolmy. Dále však odtud poznáváme, hledíce ku vzorcům (13), že jest $e_1g_1 \parallel eg$, $f_1h_1 \parallel fh$ — a o to se nám právě jednalo.

Mimo to jest na bíledni, že přímky M_1, N_1 procházejíce středem kružnice L a kolmo stojíce na eg, fh, rozpolují tyto tětivy, jakož i že strany čtyrúhelníka $abcd$ protínají v bodech, kteréž jsou vrcholy rovnostranného rovnoběžníka. Čtyrúhelníky $efgh$, $e_1f_1g_1h_1$ jsouce podobny a podobně položeny, mají určitý střed podobnosti o, kterým prochází každá přímka spojující dva stejnolehlé body obou čtyrúhelníků. Tak se v bodě tom protínají přímky ee_1, ff_1, gg_1, hh_1, a ježto body p, l jsou body stejnolehlými podobných oněch čtyrúhelníků, musí bod o ležeti v přímce lp, která, jak z dřívějšího víme, též střed k obsahuje. Takto dospěli jsme k výsledku:

Čtyrúhelník přidružený jest podoben a podobně položen čtyrúhelníku dotyčnému; střed podobnosti leží na přímce obojstředné. Úhlopříčny onoho čtyrúhelníka procházejí průsečíky protějších stran čtyrúhelníka dvojstředového i středem kružnice tomuto vepsané, stojí na sobě kolmo a rozpolují úhlopříčny čtyrúhelníka dotyčného.

Přímka obojstředná kl jdoucí body o, p, obsahuje ještě jeden zvláštní bod, totiž střed l_1 kružnice L_1 opsané o čtyrúhelník $e_1f_1g_1h_1$. Přímkám le, lf, lg, lh přísluší jakožto stejnolehlé přímky l_1e_1, l_1f_1, l_1g_1, l_1g_1, které jsou s prvými rovnoběžny a jako tyto kolmy ku stranám čtyrúhelníka $abcd$. Lze proto říci:

Kolmice spuštěné s vrcholů čtyrúhelníka přidruženého k příslušným stranám čtyrúhelníka dvojstředového protínají se v jediném bodě; bod tento jest středem kružnice opsané o čtyrúhelník přidružený a leží v přímce obojstředné čtyrúhelníka dvojstředového.

Hledě k odstavci 6. dovedl by pozorný čtenář vysloviti zvláštní výsledky týkající se čtyrúhelníka přidruženého k dvojstředovému lichoběžníku.

9. *Steiner* objevil o trojúhelnících tuto pozoruhodnou vlastnosť: Protínají-li se kolmice vedené s vrcholů jednoho trojúhelníka ku stranám druhého v jednom bodě, protínají se též kolmice spuštěné s vrcholů druhého ku stranám prvého v bodě jediném.*) V takovéto zvláštní poloze nalezají se též čtyrúhelníky námi uvažované $abcd$, $e_1f_1g_1h_1$. Dokázali jsme, že kolmice jdoucí vrcholy čtyrúhelníka $e_1f_1g_1h_1$ ku stranám čtyrúhelníka $abcd$ protínají se v bodě l_1; dle sestrojení jest pak zřejmo, že kolmice vztyčené v bodech $abcd$ k stranám čtyrúhelníka $c_1f_1g_1h_1$ protínají se v bodě l.

Připojme k předešlému ještě úvahu následující. Dán-li jest *libovolný* čtyrúhelník tětivový $e_1f_1g_1h_1$ a z průsečíku l

*) Ges. Werke, I. Bd. pg. 157.

jeho úhlopříčen spustíme kolmice ke stranám, jaký čtyrúhelník stanoví paty a, b, c, d kolmic těchto? Snadno lze dokázati, že $abcd$ jest vždy čtyrúhelnik tečnový (o kružnici opsaný). Čtyrúhelníku ae_1bl, majícímu dva protější úhly pravé, lze opsati kružnici, a jest proto $\sphericalangle bal = be_1l$; v čtyrúhelníku ah_1dl jest $\sphericalangle dal = dh_1l$. Poněvadž však $\sphericalangle be_1l = dh_1l$ (jakožto obvodové úhly nad společným obloukem f_1g_1), jest též $\sphericalangle bal = dal$, t. j. přímka al půlí úhel při a ve čtyrúhelníku $abcd$. Z podobných důvodů půlí přímky bl, cl, dl vnitřní úhly čtyrúhelníka $abcd$, a společný jich průsečík l jest středem kružnice vepsané tomuto čtyrúhelníku. Tím dokázáno, že $abcd$ jest čtyrúhelníkem tečnovým; vyšetřme, může-li kdy státi se též tětivovým a tedy dvojstředovým. Značíme-li vnitřní úhly čtyrúhelníka $abcd$ písmenami α, β, γ, δ, jest dle předešlého

$$\sphericalangle be_1l = \frac{\alpha}{2}, \quad \sphericalangle bf_1l = \frac{\gamma}{2},$$

a tedy

$$\sphericalangle e_1lf_1 = 2\mathrm{R} - \frac{\alpha+\gamma}{2}.$$

Kdyby čtyrúhelníku $abcd$ bylo lze opsati kružnici, bylo by $\alpha + \gamma = 2\mathrm{R}$, tudíž $\sphericalangle e_1lf_1 = \mathrm{R}$; naopak zase, je-li $\sphericalangle e_1lf_1 = \mathrm{R}$, jest $\alpha + \gamma = \mathrm{R}$. Odtud vysvítá věta, kterou poprvé vyslovil *Boubals* *):

Stojí-li úhlopříčny čtyrúhelníka tětivového na sobě kolmo, a spustíme-li s průsečíku jich kolmice k stranám jeho, jsou paty kolmic těch vrcholy čtyrúhelníka dvojstředového.

10. Již v článku 4. seznámili jsme se s rovnoběžníkem $a'b'c'd'$, kterýž jest v jednoduchém vztahu k čtyrúhelníku dvojstředovému $abcd$; přímky spojující dva a dva vrcholy těchto čtyrúhelníků procházejí středem l kružnice vepsané. Vracíme se nyní znovu k tomuto rovnoběžníku, abychom souvislosť jeho s čtyrúhelníkem dvojstředovým blíže ohledali.

Hledíme-li ku př. k bodu c', poznáváme, že jest

$$\sphericalangle bac' = bcc' = \frac{\gamma}{2} = \mathrm{R} - \frac{\alpha}{2};$$

z toho vysvítá, že bod c' leží v přímce půlící úhel vedlejší ku α, to jest ve straně e_1h_1 čtyrúhelníka přidruženého. Odtud pa-

*) *Mathesis*, tome V. pg. 250.

trno, že body $a'b'c'd'$ leží v stranách čtyrúhelníka $e_1f_1g_1h_1$, nad to pak lze dokázati, že jsou středy stran těchto. Jest totiž

$$\sphericalangle c'e_1l = \frac{\beta}{2}, \quad \sphericalangle e_1lc' = clg_1 = R - \frac{\delta}{2} = \frac{\beta}{2},$$

a proto jest trojúhelník e_1lc' rovnoramenný, $e_1c' = lc'$.

Podobné lze dokázati o trojúhelníku h_1lc', v němž jest $h_1c' = lc'$; z toho pak jde $e_1c' = h_1c'$, t. j. bod c' jest středem strany e_1h_1. Z důvodů podobných jsou body d', a', b' středy stran e_1f_1, f_1g_1, g_1h_1. Jest však známo z planimetrie, že středy stran libovolného čtyrúhelníka jsou vrcholy rovnoběžníka, jehož strany jsou rovnoběžny k úhlopříčnám čtyrúhelníka a délkou rovny polovicím těchto úhlopříčen. Úhlopříčny čtyrúhelníka $e_1f_1g_1h_1$ stojí na sobě kolmo: proto jest $a'b'c'd'$ rovnoběžník pravoúhlý, jak již dříve bylo dovozeno. Středem jeho jest patrně bod k. Úhrnem můžeme tedy říci:

Příčky půlící vnitřní úhly čtyrúhelníka dvojstředového protínají kružnici opsanou ve čtyrech bodech, které jsou středy stran čtyrúhelníka přidruženého. Body ty jsou vrcholy rovnoběžníka pravoúhlého, jehož strany jsou rovnoběžny s úhlopříčnami čtyrúhelníka dotyčného.

Hledíce ke čtyrúhelníku $e_1f_1g_1h_1$ a ke čtyrúhelníkům $a'b'c'd'$, $abcd$ do něho vepsaným, můžeme vysloviti větu:

Stojí-li úhlopříčny tětivového čtyrúhelníka na sobě kolmo, protíná kružnice určená středy stran jeho strany tyto v dalších čtyrech bodech, které jsou vrcholy čtyrúhelníka dvojstředového. Čtyrúhelník ten jest totožný s oním, který jsme ku konci odstavce 9. poznali.

Přímky $a'c'$, $b'd'$, úhlopříčny rovnoběžníka $a'b'c'd'$, protínající se patrně v bodě k, jsou tak zvanými *medianami* čtyrúhelníka $e_1f_1g_1h_1$, spojujíce středy protějších jeho stran. Vizme některé jich vlastnosti. Jelikož bod a' půlí oblouk bcd, bod c' pak oblouk bad, jest

$$ba' = da', \quad bc' = dc';$$

čtyrúhelník $a'bc'd$ skládá se tedy ze dvou trojúhelníků rovnoramenných o společné půdici bd, ku které jest kolma a kterou rozpoluje úhlopříčna $a'c'$. Právě tak v čtyrúhelníku $ab'cd'$ jest $b'c'$ kolmo na ac a rozpoluje přímku tuto. Tím dokázáno;

Mediany čtyrúhelníka přidruženého protínají se v středu kružnice opsané o čtyrúhelník dvojstředový, půlí úhlopříčny tohoto čtyrúhelníka a stojí na nich kolmo.

Průsečík median libovolného čtyrúhelníka půlí vzdálenosť středů obou úhlopříčen*). Je-li tedy v našem čtyrúhelníku bod u středem úhlopříčny $e_1 g_1$, bod v středem úhlopříčny $f_1 h_1$, jest vzdálenost uv půlena bodem k. Pozorujme dále, že jest

$$(14) \qquad \begin{aligned} b'l_1 \parallel dd' \perp g_1 h_1, \\ d'l_1 \parallel bb' \perp e_1 f_1 \end{aligned}$$

a tedy čtyrúhelník $b'ld'l_1$ rovnoběžníkem; úhlopříčny jeho půlí se na vzájem: $kl = kl_1$, čímž stvrzena věta:

Střed kružnice opsané o čtyrúhelník dvojstředový půlí vzdálenost mezi středem kružnice tomuto čtyrúhelníku vepsané a středem kružnice opsané o čtyrúhelník přidružený.

Ještě následující vlastnosti si povšimněme. Je-li x středem úhlopříčny ac, y středem úhlopříčny bd a z středem vnější úhlopříčny mn, leží dle *Newtona* tyto tři body x, y, z v jediné přímce, nechať jest čtyrúhelník $abcd$ jakýkoli. U čtyrúhelníka dvojstředového prochází ona přímka středem kružnice vepsané; což tuto dokážeme. Z podobnosti trojúhelníků bdl, $b'd'l$ jde, že jest také $\triangle bly \sim d'kl$ a proto

$$\sphericalangle pyl = pkx.$$

Čtyrúhelníku $kxpy$ majícímu dva protější úhly pravé lze opsati kružnici a jest tudíž

$$\sphericalangle pyx = pkx.$$

Proto leží bod l na přímce xy, a stvrzena tím věta:

Středy úhlopříčen dvojstředového čtyrúhelníka leží na přímce jdoucí středem kružnice vepsané.

11. V odstavci 6. bylo ukázáno, že sestrojíme-li v krajních bodech dvou kolmých tětiv kružnice L tečny, omezují tyto čtyrúhelník dvojstředový, jehož úhlopříčny protínají se v průsečíku p oněch tětiv. Bodem p prochází nekonečně mnoho dvojin tětiv kolmých, pomocí nichž sestrojiti lze též nekonečně mnoho čtyrúhelníků dvojstředových, téže kružnici L opsaných. Dokážeme, že všechny tyto čtyrúhelníky vepsány jsou také jedné a téže kružnici K. Poznali jsme totiž dříve (odst. 8.), že čtyrúhelník

*) *Zahradník*, Analyt. geometrie v rovině, str. 11.

dotyčný $efgh$ jest podoben a podobně položen čtyrúhelníku přidruženému $e_1 f_1 g_1 h_1$; středem jich podobnosti jest bod o ležící na přímce obojstředné čtyrúhelníka $abcd$. Vyšetřme nyní poměr podobnosti oněch dvou čtyrúhelníků

(15) $$op : ol = ol : ol_1 = \lambda$$

K tomu účelu uvažme, že λ jest též poměrem podobnosti trojúhelníků efp, $e_1 f_1 l$, a užijme označení

$$\overline{lp} = p, \quad \sphericalangle kle = \varphi, \quad \sphericalangle klf = \psi.$$

Jest pak v trojúhelníku $e_1 f_1 l$ výška

$$bl = -\frac{\varrho}{\cos\frac{\psi-\varphi}{2}}$$

a stejnolehlá výška v trojúhelníku efp bude

$$pp' = \varrho \cos\frac{\psi-\varphi}{2} + p\cos\frac{\psi+\varphi}{2};$$

protož $$\lambda = \frac{1}{\varrho}\left(\varrho\cos^2\frac{\psi-\varphi}{2} + p\cos\frac{\psi-\varphi}{2}\cos\frac{\psi+\varphi}{2}\right).$$

Jelikož jest však

$$\overline{ep}^2 + \overline{fp}^2 = 2\left[\varrho^2 + p^2 + p\varrho(\cos\varphi + \cos\psi)\right]$$
$$= 2\left[\varrho^2 + p^2 + 2p\varrho\cos\frac{\psi-\varphi}{2}\cos\frac{\psi+\varphi}{2}\right]$$

a také $$\overline{ep}^2 + \overline{fp}^2 = \overline{ef}^2 = 4\varrho^2\sin^2\frac{\psi-\varphi}{2},$$

jest hodnota součinu

$$p\cos\frac{\psi-\varphi}{2}\cos\frac{\psi+\varphi}{2} = \varrho\sin^2\frac{\psi-\varphi}{2} - \frac{\varrho^2+p^2}{2\varrho};$$

tuto hodnotu vloživše do vzorce pro λ, obdržíme

(16) $$\lambda = \frac{\varrho^2 - p^2}{2\varrho^2}.$$

Ježto ze vzorce tohoto vymizely úhly φ a ψ, má poměr λ hodnotu stálou, pokud zůstává stálou kružnice L a v ní bod p; za týchž podmínek bude tudíž dle úměry (15) stálým i bod o i bod l_1, a také bod k délku ll_1 půlící. Dána-li tedy kružnice L a vytkneme-li uvnitř ní bod p, jest tím již také určen střed k kružnice K. Však ani velikosť této kružnice není pak již libovolna, nýbrž zcela určita; jsouť totiž dle odstavce 7. kružnice K a L na sobě tak závisly, že pro bod p mají společnou poláru. Tím jsme tedy dokázali větu:

Všechny čtyrúhelníky dvojstředové, kteréž jsou jedné kružnici opsány a mají společný průsečík úhlopříčen, jsou též jediné kružnici vepsány.

12. Slavný geometr francouzský *Poncelet* vyšetřoval mnohoúhelníky, kteréž jsou jedné kuželosečce vepsány a jiné kuželosečce opsány; objevil o nich tuto základní větu: „Je-li n-úhelník jedné kuželosečce vepsán a druhé opsán, lze sťanoviti nekonečně mnoho n-úhelníků vepsaných kuželosečce prvé a současně opsaných kuželosečce druhé.“ Čtyrúhelník dvojstředový, námi vyšetřovaný, jest jen zvláštním případem mnohoúhelníků naznačeného druhu a dobře by mu slušelo jmeno *čtyrúhelníka Ponceletova.*

Jsou-li dány dvě kružnice K a L v libovolné poloze, nelze vždy stanoviti čtyrúhelník vepsaný prvé a druhé opsaný; to jest možným jen při zvláštní souvislosti obou kružnic, ale potom jest takových čtyrúhelníků nekonečně mnoho. Chceme vyzkoumati, které podmínce musí vyhověti poloměry r, ϱ a vzdálenost středů $\overline{kl} = s$, aby bylo lze kružnici K vepsati čtyrúhelníky opsané o L. Ze čtyrúhelníků těch bude jeden lichoběžníkem rovnoramenným: tento v následující úvaze předpokládejme, jelikož si tím počet usnadníme a přec ujmu obecnosti neučiníme. Jelikož L uvnitř K ležeti musí, bude

$$r + \varrho > s > r - \varrho.$$

Je-li $ab \parallel cd$, $ab = 2x$, $cd = 2y$, jest

$$x^2 + (\varrho - s)^2 = y^2 + (\varrho + s)^2 = r^2,$$
$$(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4\varrho^2.$$

Vyloučíme-li z těchto tří rovnic x, y, obdržíme podmínku hledanou. Z rovnice poslední jde, že $\varrho^2 = xy$, a z prvých dvou rovnic plyne

$$x^2 = r^2 - (\varrho - s)^2 = (r + \varrho - s)(r - \varrho + s)$$
$$\frac{\varrho^4}{x^2} = r^2 - (\varrho + s)^2 = (r + \varrho + s)(r - \varrho - s);$$

odtud znásobením vyjde

$$(17) \quad \varrho^4 = (r + \varrho + s)(r + \varrho - s)(r - \varrho + s)(r - \varrho - s),$$

jak již *Steiner* ustanovil.*) Rovnici této lze též dáti podobu

$$s^4 + 2(r^2 + \varrho^2)s^2 + r^2(r^2 - 2\varrho^2) = 0;$$

řešením dle ϱ obdržíme

*) Ges. Werke, I. Bd., p. 159.

$$\varrho^2 = \frac{(r^2 - s^2)^2}{2(r^2 + s^2)}.$$

Je-li $s = o$, bude $r = \varrho\sqrt{2}$ a čtyrúhelník dvojstředový jest pak čtverec; v jiném případě nemohou se oba středy k, l sjednotiti.

Stanovme také ještě závislost veličin r, ϱ a p, kdež $p = \overline{lp}$ značí vzdálenost středu kružnice vepsané od průsečíku úhlopříčen. V rovnoramenném lichoběžníku, který tu na mysli máme, jest $p = \varrho \cos\alpha$ a délka úhlopříčny

$$m = \sqrt{(2\varrho)^2 + \left(\frac{2\varrho}{\sin\alpha}\right)^2} = \frac{2\varrho}{\sin\alpha}\sqrt{1 + \sin^2\alpha};$$

mimo to jest

$$2r = \frac{m}{\sin\alpha} = \frac{2\varrho}{\sin^2\alpha}\sqrt{1 + \sin^2\alpha}.$$

Vyloučivše úhel α, najdeme snadným počtem

$$(18) \qquad r = \frac{\varrho^2}{\varrho^2 - p^2}\sqrt{2\varrho^2 - p^2}.$$

13. Ukončíme úvahy své o čtyrúhelníku dvojstředovém tím, že poukážeme k některým pozoruhodným vztahům metrickým, kteréž se při něm vyskytují a kterých připomenouti neměli jsme příležitosti v odstavcích dřívějších.

Položíme-li obvod čtyrúhelníka $a + b + c + d = 2s$, obdržíme, připomínajíce sobě rovnice (1),

$$a + c = b + d = s.$$

Hledíce k této souvislosti, užijme známých vzorců platných vůbec pro čtyrúhelník do kružnice vepsaný*); tak nabudeme některých vztahů zvláštních. Značí-li P ploský obsah čtyrúhelníka dvojstředového, přijdeme cestou naznačenou k výsledku

$$(19) \qquad \mathrm{P} = \sqrt{abcd},$$

a poněvadž také $\mathrm{P} = \varrho s$, bude poloměr kružnice vepsané stanoven vzorcem

$$(20) \qquad \varrho = \frac{\sqrt{abcd}}{a + c} = \frac{\sqrt{abcd}}{b + d}.$$

Tangenty polovičních úhlů čtyrúhelníka dvojstředového vyjádřeny budou takto:

---

*) Viz ku př. *Jandečka*, Trigonometria, str. 36.

$$(21)\qquad \begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} &= -\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{bc}{ad}} = \frac{bc}{\varrho s} = \frac{\varrho s}{ad}, \\ \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} &= -\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{cd}{ab}} = \frac{cd}{\varrho s} = \frac{\varrho s}{ab}, \end{aligned}$$

a pro funkce úhlů celých najdeme

$$(22)\qquad \begin{aligned} \sin\alpha &= \sin\gamma = \frac{2\mathrm{P}}{ad + bc}, \\ \sin\beta &= \sin\delta = \frac{2\mathrm{P}}{ab + cd}. \end{aligned}$$

Jelikož čtyrúhelník dvojstředový určen jest třemi podmínkami, lze kteroukoli z veličin jeho vyjádřiti třemi částmi danými; zvláště vynikají jednoduchostí výsledky, které obdržíme, předpokládajíce známými poloměr ϱ a dvé úhlů α, β.

Bude pak, užijeme-li téhož jako dříve označení stran a úhlů:

$$(23)\qquad \begin{aligned} a &= \varrho\left(\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2}\right) = \varrho\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}, \\ b &= \varrho\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2}\right) = \varrho\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}, \\ c &= \varrho\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right) = \varrho\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}, \\ d &= \varrho\left(\cot\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right) = \varrho\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}, \end{aligned}$$

$$(24)\qquad \mathrm{P} = 2\varrho^2\,\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Jsou-li $\overline{ac} = m$, $\overline{bd} = n$ úhlopříčny čtyrúhelníka tětivového, jest známo, že

$$m = \sqrt{\frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd}}, \quad n = \sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}};$$

odtud za pomocí vzorců (22) najdeme

$$m = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\sqrt{ac + bd}, \quad n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\sqrt{ac + bd}\,.$$

Užijeme-li stejniny

$$\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} = 1 + \sin\alpha\sin\beta,$$

ustanovíme dle rovnic (23)

$$ac + bd = 4\varrho^2\frac{1 + \sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta},$$

a proto konečně

$$(25)\quad m = \frac{2\varrho}{\sin\alpha}\sqrt{1 + \sin\alpha\sin\beta}, \quad n = \frac{2\varrho}{\sin\beta}\sqrt{1 + \sin\alpha\sin\beta}.$$

Nyní již bez obtíží vyhledáme též poloměr r kružnice opsané, uváživše, že

$$(26)\qquad 2r = \frac{m}{\sin\beta} = \frac{n}{\sin\alpha}$$

a tudíž

$$(27)\qquad r = \frac{\varrho}{\sin\alpha\sin\beta}\sqrt{1 + \sin\alpha\sin\beta}.$$

Ku konci vyšetřme ještě obsah P′ čtyrúhelníka dotyčného *efgh*, jehož stran délky vyjádřeny jsou rovnicemi (9). Zcela snadně přijdeme ku vzorcům

$$(28)\qquad P' = \varrho^2(\sin\alpha + \sin\beta),$$

$$P' = \tfrac{1}{2}(\overline{ef}\,.\,\overline{gh} + \overline{fg}\,.\,\overline{he}) = \tfrac{1}{2}\,.\,\overline{eg}\,.\,\overline{fh},$$

z nichž poslední znovu stvrzuje vlastnosť dříve dokázanou, že úhlopříčny čtyrúhelníka dotyčného stojí na sobě kolmo. Užitím rovnic (26) nalezneme

$$(29)\qquad P' = \frac{\varrho^2}{2r}(m + n)$$

a přirovnáním vzorců (24), (28) ustanovíme

$$(30)\qquad P' = \tfrac{1}{2}\,P\sin\alpha\sin\beta = \frac{Pmn}{8r^2}.$$

Končíme již pojednání svoje o čtyrúhelníku dvojstředovém, ač jsme bohatství vlastností jeho zúplna nevyčerpali; zúmyslně však vyhnuli jsme se věcem, které by elementární ráz těchto úvah porušily. Dodatkem připojujeme ještě některé relace, ponechávajíce jich odůvodnění čtenáři ku cvičení.

$$\overline{ae} = \overline{ah} = \frac{\overline{ab} \,.\, \overline{ad}}{s}, \quad \overline{ep} = \frac{\overline{ef} \,.\, \overline{eh}}{2\varrho},$$

$$\overline{eg} = 2\varrho \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad \overline{fh} = 2\varrho \sin \frac{\alpha + \beta}{2},$$

$$p = \varrho\sqrt{1 - \sin\alpha \sin\beta}, \quad \overline{ll_1} = \mathrm{R}\sqrt{1 - \sin\alpha \sin\beta},$$

$$\mathrm{R} = \frac{2r}{\sqrt{1 + \sin\alpha \sin\beta}}.$$

(R jest poloměr kružnice opsané o čtyrúhelník přidružený).

Přirozený kyvadlový stroj a dva nápodobené kyvadélkové strojky.

Onen objevil roku 1883 a tyto nápodobil roku 1884 P. **Cornelius Pich**, T. J. v Bohusudově.

(Pokračování.)

III. Uvedeme-li Foucaultovo kyvadlo AM na místě $\mathrm{M} \equiv m_0 \equiv \mu_0$ (viz obr. str. 1.) do pohybu kývavého tak, aby rovina kyvu AMN, určená amplitudon $\mathrm{MAG} = \mathrm{MAF}$, protala vrchní obzor $p\mathrm{H}_0\mathrm{H}_1\mathrm{H}_2 \ldots \mathrm{H}_0$ v poloměru MN_0 děleného kruhu $\mathrm{MN}_0\mathrm{N}_1\mathrm{N}_2 \ldots \mathrm{N}_0$, spodní obzor $pm_0m_1m_2 \ldots m_{12}p$ v rovnoběžce m_0p, a pevný obzor o_0 nehybného místa μ_0 v mimoběžce $\mu_0 p$, sama však těmito obzory protata byla ve vodorovné tečně MN oblouku $\mathrm{MG} = \mathrm{MF}$, *tož bude tečna* MN *původním kývacím směrem na rovině kyvu* AMN, *poloměr* MN_0 *čili poledník* Mp *původním kývacím směrem na vrchním obzoru* $p\mathrm{H}_0\mathrm{H}_1\mathrm{H}_2 \ldots \mathrm{H}_0$, **rovnoběžka** m_0p **původním kývacím směrem na spodním obzoru** $pm_0m_1m_2 \ldots m_{12}p$, *a mimoběžka* $\mu_0 p$ *původním kývacím směrem na pevném obzoru* o_0 *nehybného místa* μ_0 *se vyskytujícím.*

Bez další úvahy je předně patrno, že rovina kyvu AMN, určená amplitudou $\mathrm{MAG} = \mathrm{MAF}$, není totožná s onou stopou, kterouž Foucaultovo kyvadlo AM svým kývavým pohybem ve světovém prostoru po sobě zanechá. Dále pak je zřejmo, že rovina kyvu AMN, jež ustavičně prochází středem M děleného kruhu $\mathrm{MN}_0\mathrm{N}_1\mathrm{N}_2 \ldots \mathrm{N}_0$, následkem rotace místa M nejenom na valícím se spodním obzoru $pm_0m_1m_2 \ldots m_{12}p$ z místa m_0 do míst m_1.