Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Eduard Weyr

O homogenních souřadnicích a invariantech v theorii kuželoseček. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 24 (1895), No. 2, 81--117

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/120877`

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1895

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

O homogenních souřadnicích a invariantech v theorii kuželoseček.

Napsal

Eduard Weyr.

(Dokončení.)

12. *Simultanní invarianty dvou kuželoseček.*

Dvě kvadratické ternarné formy

$$f = \Sigma\, a_{hk} x_h x_k, \quad f' = \Sigma\, a'_{hk} x_h x_k$$

ransformujme substitucí

$$x_j = t_{j1} \bar{x} + t_{j2} \bar{x}_2 + t_{j3} \bar{x}_3$$

na formy $\bar{f}$, $\bar{f'}$.

Při libovolném λ máme tedy

$$\lambda f + f' = \lambda \bar{f} + \bar{f'};$$

rozloží-li se levá strana na dva linearné faktory, rozloží se i pravá t. j. hodnoty λ, pro které vymizí diskriminant formy $\lambda f + f'$ jsou tytéž, při nichž vymizí diskriminant formy $\lambda \bar{f} + \bar{f'}$. Má tedy kubická rovnice

$$L = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} + a'_{11}, & \lambda a_{12} + a'_{12}, & \lambda a_{13} + a'_{13} \\ \lambda a_{21} + a'_{21}, & \lambda a_{22} + a'_{22}, & \lambda a_{23} + a'_{23} \\ \lambda a_{31} + a'_{31}, & \lambda a_{32} + a'_{32}, & \lambda a_{33} + a'_{33} \end{vmatrix} = 0$$

čili

$$\Delta \lambda^3 + \Theta \lambda^2 + \Theta' \lambda + \Delta' = 0$$

tytéž kořeny jako rovnice

$$\Sigma \pm [(\lambda \bar{a}_{11} + \bar{a}'_{11})\ (\lambda \bar{a}_{22} + \bar{a}'_{22})\ (\lambda \bar{a}_{33} + \bar{a}'_{33})] = 0$$

čili

$$\bar{\Delta} \lambda^3 + \bar{\Theta} \lambda^2 + \bar{\Theta'} \lambda + \bar{\Delta'} = 0.$$

Platí tedy proporce

$$\varDelta : \Theta : \Theta' : \varDelta' = \overline{\varDelta} : \overline{\Theta} : \overline{\Theta'} : \overline{\varDelta'};$$

avšak nalezli jsme

$$\overline{\varDelta} = T^2 \varDelta$$

a tedy taky

$$\overline{\Theta} = T^2 \Theta, \quad \overline{\Theta'} = T^2 \Theta', \quad \overline{\varDelta'} = T^2 \varDelta'$$

t. j. *výrazy* $\varDelta$, Θ, Θ', $\varDelta'$ *jsou simultanní inarianty forem* f *a* f'. Jich hodnoty lze snadno vyčísliti; učinivše v L jednou $\lambda = 0$, jednou $\lambda = \infty$ — či vlastně v $L : \lambda^3$ — vidíme ihned, že $\varDelta$ *a* $\varDelta'$ jsou diskriminanty forem f a f'. Dále patrně

$$\Theta' = \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)_{\lambda = 0},$$

t. j.

$$\begin{aligned}\Theta' = & \begin{vmatrix} a_{11}, & a'_{12}, & a'_{13} \\ a_{21}, & a'_{22}, & a'_{23} \\ a\ \ , & a'_{32}, & a'_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11}, & a_{12}, & a'_{13} \\ a'_{21}, & a_{22}, & a'_{23} \\ a'_{31}, & a_{32}, & a'_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11}, & a'_{12}, & a_{13} \\ a'_{21}, & a'_{22}, & a_{23} \\ a'_{31}, & a'_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} \\ = & \, a_{11}A'_{11} + a_{22}A'_{22} + a_{33}A'_{33} + 2a_{12} + A'_{12} + 2a_{23}A'_{23} \\ & + 2a_{31}A'_{31} \\ = & \, \Sigma\, a_{hk} A'_{hk}.\end{aligned}$$

Obdobně zavedením hodnoty $\mu = \frac{1}{\lambda}$ by vyšlo

$$\begin{aligned}\Theta = & \begin{vmatrix} a'_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a'_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a'_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}, & a'_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a'_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a'_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a'_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a'_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a'_{33} \end{vmatrix} \\ = & \, a'_{11}A_{11} + a'_{22}A_{22} + a'_{33}A_{33} + 2a'_{12}A_{12} + 2a'_{23}A_{23} \\ & + 2a'_{31}A_{31} \\ = & \, \Sigma a'_{hk} A_{hk}.\end{aligned}$$

Týž výsledek vychází také takto: Máme při libovolném μ

$$f + \mu f' = \overline{f} + \mu \overline{f'}$$

a tudíž

$$\begin{aligned} & T^2 \Sigma \pm [a_{11} + \mu a'_{11})(a_{22} + \mu a'_{22})(a_{33} + \mu a'_{33})] \\ = & \Sigma \pm [(\overline{a}_{11} + \mu \overline{a}'_{11})(\overline{a}_{22} + \mu \overline{a}'_{22})(\overline{a}_{33} + \mu \overline{a}'_{33})].\end{aligned}$$

Vyviňme na obou stranách dle věty Taylorovy, pokládajíce $\mu a'_{hk}$ za přírost hodnoty a_{hk}, a $\mu \bar{a}'_{hk}$ za přírost hodnoty $\bar{a}_{hk}$; tím

$$T^2\left[\Delta + \frac{\partial \Delta}{\partial a_{11}}\mu a'_{11} + \frac{\partial \Delta}{\partial a_{12}}\mu a'_{12} + \ldots + \frac{\partial \Delta}{\partial a_{33}}\mu a'_{33} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \Delta}{\partial a_{11}^2}\mu^2 a'^2_{11} + \ldots\right) + \ldots\right] = \bar{\Delta} + \frac{\partial \bar{\Delta}}{\partial \bar{a}_{11}}\mu \bar{a}'_{11} + \ldots$$

Vzhledem k tomu, že μ jest libovolné, soudíme, že

$$T^2\Delta = \bar{\Delta},$$

$$T^2\left[\frac{\partial \Delta}{\partial a_{11}} a'_{11} + \frac{\partial \Delta}{\partial a_{12}} a'_{12} + \ldots\right] = \frac{\partial \bar{\Delta}}{\partial \bar{a}_{11}} \bar{a}'_{11} + \frac{\partial \bar{\Delta}}{\partial \bar{a}_{12}} \bar{a}'_{12} + \ldots,$$

t. j. že výraz

$$\Theta = \frac{\partial \Delta}{\partial a_{11}} a'_{11} + \frac{\partial \Delta}{\partial a_{12}} + \ldots + \frac{\partial \Delta}{\partial a_{33}} a'_{33}$$

jest simultanním invariantem forem f a f'; a totéž platí o koefficientu při μ^2 a při μ^3, t. j. o hodnotách Θ' a Δ'.

13. Úvaha předchozí však má další význam, neboť vede k obecné větě:

Je-li $\mathrm{I}(a, b, c, \ldots, \alpha, \beta, \ldots)$ *simultanním invariantem forem libovolných stupňův*

$$f = ax_1^n + bx_1^{n-2}x_2 + cx_1^{n-2}x_3 + \ldots,\ \varphi,\ \psi, \ldots,$$

tu jest

$$\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial a} a' + \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial b} b' + \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial c} c' + \ldots \tag{14}$$

simultanním invariantem soustavy, jež se skládá z dřívějších forem a z formy

$$f' = a'x_1^n + b'x_1^{n-2}x_2 + c'x_1^{n-2}x_3 + \ldots$$

Stačí uvažovati soustavu forem

$$f + \mu f',\ \varphi,\ \psi, \ldots$$

a její invariant

$$\mathrm{I}(a + \mu a',\ b + \mu b',\ c + \mu c', \ldots);$$

rozvineme-li jej dle Taylorovy věty, jsou koefficienty u všech mocností hodnoty libovolné μ patrně invarianty, a zvlášť koefficient u μ jest hořejší invariant. Obecněji vede rozvinutí hodnoty

$$\mathrm{I}(a + \mu a' + \nu a'', \ b + \mu b' + \nu b'', \ldots)$$

dle mocností μ a ν k simultanním invariantům forem f, f', f'', φ, ψ, . ., . atd.

Opětná applikace invariativné operace

$$\frac{\partial}{\partial a} a' + \frac{\partial}{\partial b} b' + \ldots$$

vede k invariantům jevícím se jakožto koefficienty u mocnosti μ. Vskutku tato operace provedena na invariantu (14) podává

$$\left(\frac{\partial^2 \mathrm{I}}{\partial a^2} a' + \frac{\partial^2 \mathrm{I}}{\partial b} b' + \ldots\right) a' + \left(\frac{\partial^2 \mathrm{I}}{\partial a \partial b} a' + \frac{\partial^2 \mathrm{I}}{\partial b^2} b' + \ldots\right) b' + \ldots$$

to jest

$$\frac{\partial^2 \mathrm{I}}{\partial a^2} a'^2 + \frac{\partial^2 \mathrm{I}}{\partial b^2} b'^2 + \ldots + 2 \frac{\partial^2 \mathrm{I}}{\partial a \partial b} a' b' + \ldots,$$

což jest koefficient při $\frac{1}{2}\mu^2$, atd. Applikujeme-li na některý z těchto invariantův operaci $\frac{\partial}{\partial a} a'' + \frac{\partial}{\partial b} b'' + \ldots$, obdržíme simultanní invariant soustavy f, f', f'', φ, ψ . ., obdobně operace $\frac{\partial}{\partial a'} a'' + \frac{\partial}{\partial b'} b'' + \ldots$, atd.

Vzhledem k okolnosti, že se ku koefficientům forem často připojují binomické koefficienty, jest výhodno připomenouti, že věta hořejší trvá ve svém znění, mají-li a', b', c', . . resp. tytéž číselné faktory jako a, b, c. — N. př. budiž

$$\begin{aligned} f &= a_1 x_1^n + b x_1^{n-1} x_2 + c x_1^{n-1} x_3 + \ldots \\ &= 6\alpha x_1^n + 5\beta x_1^{n-1} x_2 + 7\gamma x_1^{n-1} x_3 + \ldots, \\ f' &= a' x_1^n + b' x_1^{n-1} x_2 + c' x_1^{n-1} x_3 + \ldots \\ &= 6\alpha' x_1^n + 5\beta' x_1^{n-1} x_2 + 7\gamma' x_1^{n-1} x_3 + \ldots; \end{aligned}$$

invariant $\mathrm{I}(a, b, c, \ldots)$ zavedením hodnot α, β, γ, . . přejde na

$$\mathrm{I}(6\alpha, 5\beta, 7\gamma, \ldots) = \mathrm{J}(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$$

a pak jest

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha}\alpha' + \frac{\partial J}{\partial \beta}\beta' + \frac{\partial J}{\partial \gamma}\gamma, + \ldots$$

simultanním invariantem. Skutečně máme

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = 6\frac{\partial I}{\partial a}, \quad \frac{\partial J}{\partial \beta} = 5\frac{\partial I}{\partial b}, \quad \frac{\partial J}{\partial \gamma} = 7\frac{\partial I}{\partial c}, \ldots$$

a tedy

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha}\alpha' + \frac{\partial J}{\partial \beta}\beta + \ldots = 6\frac{\partial I}{\partial a}\frac{a'}{6} + 5\frac{\partial I}{\partial b}\frac{b'}{5} + \ldots = \frac{\partial I}{\partial a}a' + \frac{\partial I}{\partial b}b' + \ldots,$$

náš hořejší invariant.

Jakožto příklad vytkněme dvě kvadratické ternarné formy

$$f = \Sigma\, a_{hk}x_hx_k, \quad f' = \Sigma\, a'_{hk}x_hx_k$$

a označme operaci $\frac{\partial}{\partial a_{11}}a'_{11} + \ldots$ literou Ω; pak máme

$$\begin{aligned}&\Sigma \pm [(a_{11} + \mu a'_{11})(a_{12} + \mu a'_{12})(a_{33} + \mu a'_{33})] \\ &= \Delta + \Omega(\Delta)\mu + \Omega\Omega(\Delta)\frac{\mu^2}{2} + \Omega\Omega\Omega(\Delta)\frac{\mu^3}{6},\end{aligned}$$

a tedy

$$\Theta = \Omega(\Delta), \quad \Theta^1 = \frac{1}{2}\Omega^2(\Delta), \quad \Delta' = \frac{1}{6}\Omega^3(\Delta),$$

čímž simultanní invarianty Θ, Θ' vyvozeny z diskriminantu Δ.

14. *Princip užívání kanonických tvarův.*

Dejme tomu, že kuželosečky $f = 0$, $f' = 0$ mají jistý zvláštní vztah, n. př. že se dotýkají. Transformujme je k nějakému specialnému základnému trojúhelníku do forem $\overline{f}$, $\overline{f'}$ a předpokládejme, že lze onen vztah vyjádřiti relací tvaru

$$\mathrm{H}(\overline{\Delta}, \overline{\Theta}, \overline{\Theta'}, \overline{\Delta'}) = 0,$$

kdež H značí homogenní funkci argumentů; pak vyjadřuje

$$\mathrm{H}(\Delta, \Theta, \Theta', \Delta') = 0$$

týž vztah. Neboť převedla-li substituce o determinantu T formy f, f' do $\overline{f}, \overline{f'}$, tu lze předposlední rovnici psáti

$$H(T^2\Delta, T^2\Theta, T^2\Theta', T^2\Delta') = 0,$$

což jest — po krácení jistou potencí T — rovnice předchozí. Pro formy f a f' hledíme ovšem docíliti tvary co nejjednodušší: *kanonické*; v našem případě se tak stane, zvolíme-li za základní trojúhelník polárný trojúhelník obou kuželoseček. Že takový existuje, snadno vychází, přihlédneme-li k svazku kuželoseček

$$\lambda f + f' = 0,$$

procházejících patrně čtyřmi průsečíky A, B, C, D čar $f = 0$ a $f' = 0$. Každé dvě protější strany úplného čtyrrohu ABCD tvoří čáru svazku, ovšem zvrhlou, a její rovnici obdržíme, volíme-li za λ hodnotu annullující diskriminant formy $\lambda f + f'$ t. j. kořen kubické rovnice

$$|\lambda a_{hk} + a'_{kh}| = 0.$$

Dvojné body těchto tří zvrhlých čar jsou vrcholy diagonalného třírohu úplného čtyrrohu ABCD; trojúhelník ten jest polarným trojúhelníkem každé čáry svazku. Abychom to ukázali, označme λ', λ'', λ''' kořeny napsané kubické rovnice a připomeňme (v. čl. 4.), že souřadnice dvojného bodu zvrhlé kuželosečky annullují všecky derivace $\frac{\partial(f + \lambda f')}{\partial x_k}$. Buďte $x_1^{(\nu)}, x_2^{(\nu)}$, $x_3^{(\nu)}$ souřadnice dvojného bodu čáry $f + \lambda^{(\nu)} f' = 0$, a označme derivaci funkce f dle x_k vzatou, a do níž vloženy hodnoty $x_1^{(\nu)}, x_2^{(\nu)}, x_3^{(\nu)}$, symbolem $f(x_k^{(\nu)})$, a obdobný význam měj symbol $f'(x_k^{(\nu)})$; pak tedy platí devět rovnic

$$
(15)\qquad
\begin{array}{ll}
f(x_1') + \lambda' f'(x_1') = 0, & f(x_1'') + \lambda'' f'(x_1'') = 0,\\
f(x_2') + \lambda' f'(x_2') = 0, & f(x_2'') + \lambda'' f'(x_2'') = 0,\\
f(x_3') + \lambda' f'(x_3') = 0, & f(x_3'') + \lambda'' f'(x_3'') = 0,\\
\multicolumn{2}{c}{f(x_1''') + \lambda''' f'(x_1''') = 0,}\\
\multicolumn{2}{c}{f(x_2''') + \lambda''' f'(x_2''') = 0,}\\
\multicolumn{2}{c}{f(x_3''') + \lambda''' f'(x_3''') = 0.}
\end{array}
$$

Násobme rovnice v prvním sloupci resp. hodnotami x_1'', x_2'', x_3'' a sečtěme, od součtu pak odečtěme součet rovnic druhého sloupce resp. hodnotami x_1', x_2', x_3' násobených a obdržíme

$$\Sigma x''f(x') + \lambda'\Sigma x''f'(x') - \Sigma x'f(x'') - \lambda''\Sigma x'f'(x'') = 0,$$

to jest

$$(\lambda' - \lambda'')\,\Sigma x''f'(x') = 0,$$

a tedy za supposice, že kořeny λ', λ'', λ''' jsou nestejné,

$$\Sigma x''f'(x') = 0;$$

avšak součet z prvního sloupce odvozený podává

$$\Sigma x''f(x') + \lambda'\Sigma x''f'(x') = 0,$$

a tedy také

$$\Sigma x''f(x') = 0.$$

Obdobným kombinováním rovnic prvního a třetího, a druhého a třetího sloupce nalezáme obecně

$$(16) \qquad \Sigma x^{(\mu)}f(x^{(\nu)}) = 0, \quad \Sigma x^{(\mu)}f'(x^{(\nu)}) = 0,$$

a tedy také

$$\Sigma x^{(\mu)}[f(x^{(\nu)}) + \lambda f'(x^{(\nu)})] = 0, \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3, \mu \gtrless \nu),$$

to jest každé dva z nalezených tří dvojných bodů jsou sdruženy vzhledem ku každé čáře svazku, a tvoří tedy tyto body vrcholy polarného trojúhelníku, společného všem kuželosečkám svazku.

Toť jediný společný polarný trojúhelník čar f a f'; vrcholy x', x'', x''' takového jsou sdruženy vzhledem k oběma čarám a hoví tedy šesti rovnicím (16), a dovedeme-li z těchto rovnic odvoditi rovnice (15), bude tvrzení patrně dokázáno. Za tím účelem vypišme rovnice (16) příslušné akcentu $\nu = 1$, tedy

$$\Sigma x''f(x') = 0, \qquad \Sigma x''f'(x') = 0,$$
$$\Sigma x'''f(x') = 0, \qquad \Sigma x'''f'(x') = 0,$$

a pokládejme v levých dvou rovnicích $f(x'_1)$, $f(x'_2)$, $f(x'_3)$, a v pravých dvou $f'(x'_1)$, $f'(x'_2)$, $f'(x'_3)$ za neznámé, pak ukazují oboje rovnice, že tyto neznámé mají tytéž poměry t. j., že existuje jisté číslo λ' takové, že

$$\frac{f(x'_1)}{f'(x'_1)} = \frac{f(x'_2)}{f'(x'_2)} = \frac{f(x'_3)}{f'(x'_3)} = -\lambda'.$$

Máme pak

$$f(x'_1)+\lambda' f'(x'_1)=0,\quad f(x'_2)+\lambda' f'(x'_2)=0,$$
$$f(x'_3)+\lambda' f'(x'_3)=0,$$

z čehož patrno, že bod x' jest dvojným bodem zvrhlé kuželosečky

$$f(x)+\lambda' f'(x)=0,$$

a výrok dokázán.

Zvolíme-li oběma kuželosečkám společný polarný trojúhelník za základný, budou jich rovnice míti tvary

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2=0,\quad a'_{11}x_1^2+a'_{22}x_2^2+a'_{33}x_3^2=0;$$

do těchto kanonických forem lze tedy současně formy f a f linearnou transformací převésti.

Invarianty jsou pak

$$\varDelta=a_{11}a_{22}a_{33},\quad \Theta=a'_{11}a_{22}a_{33}+a_{11}a'_{22}a_{33}+a_{11}a_{22}a'_{33},$$
$$\Theta'=a_{11}a'_{22}a'_{33}+a'_{11}a_{22}a'_{33}+a'_{11}a'_{22}a_{33},\quad \varDelta'=a'_{11}a'_{22}a'_{33}.$$

Kanonické tvary lze ještě zjednodušiti substitucí

$$x_1\sqrt{a'_{11}}=\bar{x}_1,\quad x_2\sqrt{a'_{22}}=\bar{x}_2,\quad x_3\sqrt{a'_{33}}=\bar{x}_3,$$

která při realné čáře f' jest patrně imaginarnou; pak transformované formy nabývají tvarů

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2,\qquad x_1^2+x_2^2+x_3^2,$$

a invarianty jsou

$$\varDelta=a_{11}a_{22}a_{33},\qquad \Theta=a_{22}a_{33}+a_{33}a_{11}+a_{11}a_{22},$$
$$\Theta'=a_{11}+a_{22}+a_{33},\qquad \varDelta'=1.$$

15. *Geometrický význam vymizení invariantů $\varDelta$, Θ, Θ, $\varDelta'$.* Vymizí-li $\varDelta$, jest čára f, a vymizí-li $\varDelta'$ jest čára f' zvrhlou. Supponujme, že vymizí simultanní invariant Θ forem

$$f=\Sigma a_{hk}x_hx_k,\qquad f'=\Sigma a'_{hk}x_hx_k.$$

Zvolme nový základný trojúhelník a sice následujícím způsobem:

Jeden vrchol A zvolme libovolně na čáře f' a za druhý B zvolme jeden z obou průsečíků polary a bodu A vzhledem k f vzaté s čarou f'; za třetí C konečně průsečík polary a s polarou b bodu B. Pak bude ABC polarným trojúhelníkem čáry f a zároveň budou A, B na čáře f'. Z toho jde, že transformací k tomuto základnímu trojúhelníku f a f' přejdou do tvarů

$$f = \overline{a}_{11}\overline{x}_1^2 + \overline{a}_{22}\overline{x}_2^2 + \overline{a}_{33}\overline{x}_3^2,$$

$$f' = \overline{a}'_{33}\overline{x}_3^2 + 2\overline{a}'_{12}\overline{x}_1\overline{x}_2 + 2\overline{a}'_{23}\overline{x}_2\overline{x}_3 + 2\overline{a}'_{31}\overline{x}_3\overline{x}_1.$$

Nyní ale

$$\overline{\Theta} = a_{11}a_{22}a'_{33} = \mathrm{T}^2\Theta = 0,$$

a tedy $a'_{33} = 0$, jelikož by vymizení jedné z hodnot a_{11} aneb a_{22} značilo, že f jest zvrhlou čarou, což vylučujeme. Z $a'_{33} = 0$ ale soudíme, že také vrchol C se nalézá na čáře f', a naopak. *Jest tedy vymizení invariantu Θ počtářským výrazem toho fakta, že kuželosečka f jest opsána polarnému trojúhelníku čáry f*; a obdobně $\Theta' = 0$ znamená, že čára f jest opsána polarnému trojúhelníku čáry f'. Takových trojúhelníků jest ovšem nekonečně mnoho, jakmile jeden existuje.

Šest vrcholů každých dvou polarných trojúhelníků nějaké kuželosečky f se nalézá na kuželosečce. Vedeme-li totiž pěti z nich kuželosečku f', tu simultanní invariant Θ vymizí, a tudíž prochází f' i šestým vrcholem.

16. *Reciproké úvahy* plynou, pojímáme-li v předchozím proměnné jakožto souřadnice přímkové; zůstavujíce je čtenáři, vytkněme souvislost mezi invarianty forem

$$f = \Sigma a_{hk} x_h x_k, \qquad f' = \Sigma a'_{hk} x^h x_k$$

a invarianty jich reciprokých forem

$$\mathrm{F} = \frac{1}{\Delta}\, \Sigma \mathrm{A}_{hk}\xi_h\xi_k, \qquad \mathrm{F}' = \frac{1}{\Delta'}\, \Sigma \mathrm{A}'_{hk}\xi_h\xi_k.$$

Utvořme-li diskriminant

$$\Sigma \pm [(\lambda\mathrm{A}_{11} + \mathrm{A}'_{11})(\lambda\mathrm{A}_{22} + \mathrm{A}'_{22})(\lambda\mathrm{A}_{33} + \mathrm{A}'_{33})]$$

formy $\lambda\mathrm{F} + \mathrm{F}'$, jenž seřaděn dle mocností λ nechť jest

$$\delta\lambda^3 + \vartheta\lambda^2 + \vartheta'\lambda + \delta',$$

tu jsou δ, ϑ, ϑ', δ' ovšem invarianty vzhledem k linearné transformaci proměnných ξ. Obdobně k dřívějším úvahám máme

$$\delta = \frac{1}{\Delta^3} \Sigma \pm (A_{11} A_{22} A_{33}), \qquad \delta' = \frac{1}{\Delta'^3} \Sigma \pm (A'_{11} A'_{22} A'_{33}),$$

$$\vartheta = \frac{1}{\Delta' \Delta^2} (A'_{11} B_{11} + \ldots + 2A'_{23} B_{23}),$$

$$\vartheta' = \frac{1}{\Delta \Delta'_2} (A_{11} B'_{11} + \ldots + 2A_{23} B'_{23}),$$

značí-li B_{hk}, B'_{hk} minory determinantův

$$B = \Sigma \pm (A_{11} A_{22} A_{33}), \qquad B' = \Sigma \pm (A'_{11} A'_{22} A'_{33})$$

adjungovaných k Δ, Δ'.

Z theorie determinantů však je o těchto známo,*) že

$$B = \Delta^2, \qquad B' = \Delta'^2,$$
$$B_{hk} = \Delta a_{hk} \qquad B'_{hk} = \Delta' a'_{hk},$$

čímž

$$(17) \quad \begin{cases} \delta = \dfrac{1}{\Delta}, \qquad \delta' = \dfrac{1}{\Delta'}, \\[2ex] \vartheta = \dfrac{1}{\Delta \Delta'} (A'_{11} a_{11} + \ldots + 2A'_{23} a_{23}) = \dfrac{\Theta'}{\Delta \Delta'}, \\[2ex] \vartheta' = \dfrac{1}{\Delta \Delta'} (A_{11} a'_{11} + \ldots + 2A_{23} a'_{23}) = \dfrac{\Theta}{\Delta \Delta'}. \end{cases}$$

Reciproký výklad předchozího článku ukazuje, že při $\Theta = 0$ kuželosečka F′ čili f' se dotýká všech tří stran polarného trojúhelníku čáry F čili f, jakmile se dotýká dvou; pak ale jest též $\Theta' = 0$ t. j. čára f prochází všemi třemi vrcholy polarného trojúhelníku čáry f', jakmile prochází dvěma.

17. *Příklady.*

A. Nechť se vyvine výminka, za které lze vepsati do kuželosečky f' trojúhelník, jenž současně jest jiné kuželosečce f opsán.

---

*) Dr. *F. J. Studnička*, O determinantech § 6. aneb *Salmon-Fiedler*, Vorlesungen über die Algebra der linearen Transformationen, 2. vydání, p. 39.

Existuje-li takový trojúhelník a zvolíme-li jej za základní, lze trimetrické souřadnice x_1, x_2, x_3 patrně tak definovati, že

$$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 - 2x_3x_2 - 2x_1x_2,$$
$$f' = 2a'_{23}x_2x_3 + 2a'_{31}x_3x_1 + 2a'_{12}x_1x_2.$$

Zde

$$\Delta = -4, \qquad \Delta' = 2a'_{23}a'_{31}a'_{12},$$
$$\Theta = 4(a'_{23} + a'_{31} + a'_{12}), \qquad \Theta' = -(a'_{23} + a'_{31} + a'_{12})^2.$$

Máme tedy relaci vzhledem k invariantům homogenní

$$(18) \qquad \Theta^2 = 4\Delta\Theta'$$

jakožto nutnou výminku, pro existenci zmíněného trojúhelníku; avšak tato relace také stačí. Skutečně supponujme, že jest vyplněna, i bude, jsouc homogenní, vyplněna i pro jakkoli transformované formy. Zvolme na čáře f' libovolný bod I a veďme jím tečnu k čáře f; tato tečna protne f' ještě v jednom bodě II a tím veďme k f druhou tečnu, jež nechť protne f' ještě v bodě III. Zvolivše I II III za základní trojúhelník, víme, že mu jest čára f' opsána, a že se čára f dotýká stran $\overline{\text{I II}}$ a $\overline{\text{II III}}$. Lze tedy položiti

$$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2a_{31}x_3x_1,$$
$$f' = 2a'_{23}x_2x_3 + 2a'_{31}x_3x_1 + 2a'_{12}x_1x_2.$$

Nyní

$$\Delta = -(1 + a_{13})^2, \qquad \Delta' = 2a'_{23}a'_{31}a'_{12},$$
$$\Theta = 2(1 + a_{13})(a'_{12} + a'_{23} + a'_{31}),$$
$$\Theta = -(a'^2_{12} + a'^2_{23} + a'^2_{31} + 2a'_{31}a'_{32} + 2a'_{12}a'_{13} + 2a_{13}a'_{21}a'_{23}).$$

Supponovaná relace mezi invarianty (18) podává tedy

$$4(1 + a_{13})^2(a'_{12} + a'_{23} + a'_{31})^2$$
$$= 4(1 + a_{13})^2(a'^2_{12} + a'^2_{23} + a'^2_{31} + 2a'_{31}a'_{32} + 2a'_{12}a'_{13}$$
$$+ 2a_{13}a'_{21}a'_{23}),$$

z čehož soudíme, že

$$a_{13} = 1,$$

t. j. že se kuželosečka f dotýká také strany $\overline{\text{I III}}$, jak bylo dokázati. Zároveň patrno, že existence jednoho trojúhelníka čáře f opsaného a čáře f' vepsaného má v zápětí existenci nekonečně mnoho takových trojúhelníků; lze totiž jeden vrchol jeho na čáře f' libovolně zvoliti.

Vzhledem k předchozímu článku lze rovnici (18) psáti

$$\Delta^2\Delta'^2\vartheta'^2 = 4\Delta\Delta\Delta'\vartheta$$

t. j.

$$\vartheta'^2 = 4\delta'\vartheta,$$

což se mohlo předvídati. Relace obdobná

$$\vartheta^2 = 4\delta\vartheta' \text{ čili } \Theta'^2 = 4\Delta'\Theta$$

zaručuje existenci trojúhelníků čáře f vepsaných a čáře f' opsaných. Obecně budiž připomenuto, že zavedením hodnot δ, ϑ, ϑ', δ' rovnicemi (17) daných do nějaké relace mezi invarianty Δ, Θ, Θ', Δ' obdržíme nový výraz původní geometrické vlastnosti; nahradíme-li však poslední hodnoty přímo hodnotami δ, ϑ, ϑ' δ' máme relaci vyjadřující reciprokou vlastnost.

B. Nechť se vyvine výminka, za které se dvě kuželosečky f a f' dotýkají.

Zvolme bod dotyčný za základní bod III čili 0, 0, 1, a společnou tečnu za základní přímku $x_2 = 0$. Poněvadž rovnice tečny v bodě 0, 0, 1 jest $\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$, soudíme, že pak $a_{31} = a_{33} = 0$, a obdobně $a'_{31} = a'_{33} = 0$.

Diskriminant formy $\lambda f + f'$ jest nyní

$$-(\lambda a_{23} + a'_{23})^2(\lambda a_{11} + a'_{11})$$

a má tedy dva stejné kořeny λ. Jelikož se (čl. 10.) linearnou transformací tyto kořeny nemění, má i při libovolné poloze základního trojúhelníku rovnice

$$\Delta\lambda^3 + \Theta\lambda^2 + \Theta'\lambda + \Delta' = 0$$

dva stejné kořeny, t. j. při dotyku čar f a f' platí mezi invarianty relace ovšem homogenní

$$4(\Theta^2 - 3\Delta\Theta')(\Theta'^2 - 3\Delta'\Theta) = (\Theta\Theta' - 9\Delta\Delta')^2. \tag{19}$$

Rovnice ta taky stačí, aby pojistila dotyk obou čar; neb pak splývají dva kořeny λ, t. j. dvě zvrhlé čáry svazku $\lambda f + f' = 0$, a to patrně nastane jen tenkráte, kdy splývají dva průsečné body čar f a f'.

C. Ve zvazku kuželoseček $\lambda f' + f'' = 0$ se obecně nalézá jediná čára opsaná polarným trojúhelníkům kuželosečky $f = 0$.

Jest totiž $\lambda f' + f'' = 0$ tenkráte žádanou čarou, vymizí-li simultanní invariant Θ forem f a $\lambda f' + f''$; ten ale jest dle čl. 12.

$$(\lambda a'_{11} + a''_{11})A_{11} + \ldots + 2(\lambda a'_{23} + a''_{23})A_{23} = \lambda\Theta_1 + \Theta_2,$$

značí-li Θ_1 invariant Θ forem f a f', a Θ_2 týž invariant pro formy f a f''. Učinivše $\lambda = -\frac{\Theta_2}{\Theta_1}$ obdržíme žádanou kuželosečku, jejíž rovnice tedy jest

$$\Theta_2 f' - \Theta_1 f'' = 0.$$

Nalézají-li se ve svazku kuželoseček dvě čáry opsané polarným trojúhelníkům dané kuželosečky f, má tutéž vlastnost každá čára svazku. Jsou-li f' a f'' ony dvě čáry, tedy $\Theta_1 = 0$, $\Theta_2 = 0$, tu vymizí invariant Θ čáry f a libovolné čáry $\lambda f + f''$ svazku; tento invariant jest totiž

$$\lambda\Theta_1 + \Theta_2 = 0.$$

A obdobná věta patrně platí o obecnější soustavě kuželoseček

$$\lambda f' + \mu f'' + \ldots + \varrho f^{(\nu)} = 0.$$

18. *Simultanní kontravariant forem f a f'.*

Seznavše, že diskriminant $\varDelta$ jest invariantem formy f, uvažovali jsme diskriminant formy $\lambda f + f'$ a došli k simultanním invariantům Θ a Θ' forem f, f'. Obdobně, seznavše v čl. 11., že Π jest kontravariantem formy f, uvažováním tohoto kontravariantu pro formu $\lambda f + f'$ se doděláme simultanního kontravariantu forem f a f'.

Učinivše vzhledem k formám f a f'

$$\Pi = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \xi_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \xi_2 \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & \xi_3 \\ \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & 0 \end{vmatrix}, \quad \Pi' = \begin{vmatrix} a'_{11}, & a'_{12}, & a'_{13}, & \xi_1 \\ a'_{21}, & a'_{22}, & a'_{23}, & \xi_2 \\ a'_{31}, & a'_{32}, & a'_{33}, & \xi_3 \\ \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & 0 \end{vmatrix},$$

obdržíme hodnotu obdobnou pro formu $\lambda f + f'$ ve tvaru

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} + a'_{11}, & \lambda a_{12} + a'_{12}, & \lambda a_{13} + a'_{13}, & \xi_1 \\ \lambda a_{21} + a'_{21}, & \lambda a_{22} + a'_{22}, & \lambda a_{23} + a'_{23}, & \xi_2 \\ \lambda a_{31} + a'_{31}, & \lambda a_{32} + a'_{32}, & \lambda a_{33} + a'_{33}, & \xi_3 \\ \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & 0 \end{vmatrix} = \lambda^2 \Pi - \lambda \Phi + \Pi';$$

abychom to nahlédli a Φ pohodlně vyčíslili, napišme elementy posledního řádku ve tvaru

$$0 + \xi_1, \quad 0 + \xi_2, \quad 0 + \xi_3, \quad 0,$$

načež můžeme každý z prvních tří sloupců rozděliti na dva, a tedy celý determinant na $2 \cdot 2 \cdot 2$, t. j. 8 determinantů. Přihlédneme-li k oněm třem, jež obsahují faktor λ, nalezneme ihned, že

$$-\Phi = \begin{vmatrix} a_{11}, & a'_{12}, & a'_{13}, & \xi_1 \\ a_{21}, & a'_{22}, & a'_{23}, & \xi_2 \\ a_{31}, & a'_{32}, & a'_{33}, & \xi_3 \\ 0, & \xi_2, & \xi_3, & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11}, & a_{12}, & a'_{13}, & \xi_1 \\ a'_{21}, & a_{22}, & a'_{23}, & \xi_2 \\ a'_{31}, & a_{32}, & a'_{33}, & \xi_3 \\ \xi_1, & 0, & \xi_3, & 0 \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} a'_{11}, & a'_{12}, & a_{13}, & \xi_1 \\ a'_{21}, & a'_{22}, & a_{23}, & \xi_2 \\ a'_{31}, & a'_{32}, & a_{33}, & \xi_3 \\ \xi_1, & \xi_2, & 0, & 0 \end{vmatrix}.$$

Vyčíslíme-li a změníme-li znamení, nalezneme, že

$$\begin{aligned} \Phi = {} & (a_{22}a'_{33} + a_{33}a'_{22} - 2a_{23}a'_{23})\xi_1^2 \\ & + (a_{33}a'_{11} + a_{11}a'_{33} - 2a_{31}a'_{31})\xi_2^2 + (a_{11}a'_{22} + a_{22}a'_{11} - 2a_{12}a'_{12})\xi_3^2 \\ & + 2(a_{13}a'_{12} + a_{12}a'_{13} - a_{11}a'_{23} - a_{23}a'_{11})\xi_2\xi_3 \\ & + 2(a_{21}a'_{23} + a_{23}a'_{21} - a_{22}a'_{31} - a_{31}a'_{22})\xi_3\xi_1 \\ & + 2(a_{32}a'_{31} + a_{31}a'_{32} - a_{33}a'_{12} - a_{12}a'_{33})\xi_1\xi_2 \end{aligned}$$

jest výraz symetrický vzhledem k hodnotám a_{hk} a a'_{hk}, a snadno zverifikujeme, že jej můžeme psáti ve dvou nových tvarech

$$\Phi = \frac{\partial \Theta}{\partial a_{11}} \xi_1^2 + \frac{\partial \Theta}{\partial a_{22}} \xi_2^2 + \frac{\partial \Theta}{\partial a_{33}} \xi_3^2 + \frac{\partial \Theta}{\partial a_{23}} \xi_2\xi_3 + \frac{\partial \Theta}{\partial a_{31}} \xi_3\xi_1 + \frac{\partial \Theta}{\partial a_{12}} \xi_1\xi_2,$$

$$\Phi = \frac{\partial \Theta'}{\partial a'_{11}} \xi_1^2 + \frac{\partial \Theta'}{\partial a_{22}} \xi_2^2 + \frac{\partial \Theta'}{\partial a'_{33}} \xi_3^2 + \frac{\partial \Theta'}{\partial a'_{23}} \xi_2\xi_3 + \frac{\partial \Theta'}{\partial a'_{31}} \xi_3\xi_1 + \frac{\partial \Theta'}{\partial a'_{12}} \xi_1\xi_2.$$

Při transponované transformaci hodnot ξ platí dle čl. 11.

$$\lambda^2\overline{\Pi} - \lambda\overline{\Phi} + \overline{\Pi'} = \mathrm{T}^2(\lambda^2\Pi - \lambda\Phi + \Pi'),$$

a tedy vzhledem k libovolnému λ,

$$\overline{\Phi} = \mathrm{T}^2\Phi\,,$$

t. j. *Φ jest simultanním kontravariantem forem f a f'.*

Výrazy kontravariantu Φ pomocí simultanních invariantů Θ a Θ' jsou jen specialným případem věty:*)

Je-li φ invariantem forem

$$f = \Sigma a_{hk}x_h x_k\,, \qquad f' = \Sigma a'_{hk}a_h x_k\,,$$

jest

$$\xi_1^2\frac{\partial\varphi}{\partial a_{11}} + \xi_2^2\frac{\partial\varphi}{\partial a_{22}} + \xi_3^2\frac{\partial\varphi}{\partial a_{33}} + \xi_2\xi_3\frac{\partial\varphi}{\partial a_{23}} + \xi_3\xi_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_{31}} + \xi_1\xi_2\frac{\partial\varphi}{\partial a_{12}}$$

kontravariantem jejich.

Skutečně mějme transformací o modulu T

$$f = \Sigma\,\overline{a}_{hk}\overline{x}_h\overline{x}_k\,, \qquad f' = \Sigma\overline{a}'_{hk}\overline{x}_h\overline{x}_k\,;$$

poněvadž, jakož víme,

$$x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3 = \overline{x}_1\overline{\xi}_1 + \overline{x}_2\overline{\xi}_2 + \overline{x}_3\overline{\xi}_3\,,$$

platí při každém λ

$$f + \lambda(x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3)^2 = \overline{f} + \lambda(\overline{x}_1\overline{\xi}_1 + \overline{x}_2\overline{\xi}_2 + \overline{x}_3\overline{\xi}_3)^2$$

t. j.

$$(a_{11} + \lambda\xi_1^2)x_1^2 + (a_{22} + \lambda\xi_2^2)x_2^2 + \ldots + 2(a_{12} + \lambda\xi_1\xi_2)x_1x_2$$
$$= (\overline{a}_{11} + \lambda\overline{\xi}_1^2)\overline{x}_1^2 + (\overline{a}_{22} + \lambda\overline{\xi}_2^2)\overline{x}_2^2 + \ldots + 2(\overline{a}_{12} + \overline{\xi}_1\overline{\xi}_2)\overline{x}_1\overline{x}_2\,.$$

Utvoříme-li invariant φ vzhledem k formám

$$f + \lambda(x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3)^2$$

a f', máme rovnici

$$\varphi(\overline{a}_{11} + \lambda\overline{\xi}_1^2, \ldots, \overline{a}'_{11}, \ldots) = \mathrm{T}^\alpha\varphi(a_{11} + \lambda\xi_1^2, \ldots, a'_{11}, \ldots);$$

rovnost koefficientů při λ v levo a v pravo, podává

*) Obecnou větu v. *Salmon-Fiedler*, Alg. d. lin. Transf., p. 151.

$$\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial a_{11}}\overline{\xi}_1^2 + \ldots + \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial a_{12}}\overline{\xi}_1\overline{\xi}_2 = T^\alpha\left(\frac{\partial\varphi}{\partial a_{11}}\xi_1^2 + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial a_{12}}\xi_1\xi_2\right),$$

čímž věta dokázána, a rovnost koefficientů při libovolné mocnosti λ vede k obecnějšímu výsledku, *že operace symbolem*

$$\left(\xi_1^2\frac{\partial}{\partial a_{11}} + \xi_2^2\frac{\partial}{\partial a_{22}} + \xi_3^2\frac{\partial}{\partial a_{33}} + \xi_2\xi_3\frac{\partial}{\partial a_{23}} + \xi_3\xi_1\frac{\partial}{\partial a_{31}} + \xi_1\xi_2\frac{\partial}{\partial a_{12}}\right)z$$

vyznačená, podává applikací na invariant φ také kontravariant forem f a f'.

Obdobně by plynulo, že tato operace applikována na kontravariant vede k invariantivnímu výrazu, obsahujícími oboje proměnné x i ξ, t. j. k smíšenému konkomitantu.

Pomocí kontravariantu Φ lze snadno vytknouti rovnici průsečných bodů čar f a f'. Čára svazku $\lambda f + f' = 0$ se totiž dotýká dané přímky ξ, hoví-li souřadnice ξ_1, ξ_2, ξ_3 přímkové rovnici čáry

$$\lambda^2\Pi - \lambda\Phi + \Pi' = 0;$$

kořeny λ této rovnice stanoví *dvě* čáry svazku dotýkající se přímky ξ. Prochází-li však přímka ξ jedním ze čtyr základních bodů svazku, tu se jí dotýká jediná čára svazku, t. j. pak má kvadratická rovnice dva stejné kořeny, t. j. pak

$$\Phi^2 - 4\Pi\Pi' = 0.$$

Toť tedy rovnice čtyr základních bodů svazku. Tvar její ukazuje, že to čára, které se dotýká tečna společná čarám $\Phi = 0$, $\Pi = 0$ v bodě dotýčném s poslední čárou, a obdobně pro Π'. *Dotýká se tedy osm tečen, sestrojených ve společných bodech čar Π a Π' k těmto čarám, vesměs kuželosečky $\Phi = 0$.*

19. *Simultanní kovariant forem f a f'.*

Píšeme-li

$$P = \begin{vmatrix} A_{11}, & A_{12}, & A_{13}, & x_1 \\ A_{21}, & A_{22}, & A_{23}, & x_2 \\ A_{31}, & A_{32}, & A_{33}, & x_3 \\ x_1, & x_2, & x_3, & 0 \end{vmatrix}, \qquad P' = \begin{vmatrix} A'_{11}, & A'_{12}, & A'_{13}, & x_1 \\ A'_{21}, & A'_{22}, & A'_{23}, & x_2 \\ A'_{31}, & A'_{32}, & A'_{33}, & x_3 \\ x_1, & x_2, & x_3, & 0 \end{vmatrix},$$

kde A_{hk} a A'_{hk} značí minory diskriminantů Δ a Δ' forem

$$f = \Sigma a_{hk} x_h x_k\,, \qquad f' = \Sigma a'_{hk} x_h x_k\,,$$

jsou

$$\mathrm{P} = 0, \qquad \mathrm{P}' = 0$$

dle čl. 7. bodové rovnice čar:

$$\varphi = \Sigma \mathrm{A}_{hk} \xi_h \xi_k = 0, \qquad \varphi' = \Sigma \mathrm{A}'_{hk} \xi_h \xi_k = 0,$$

t. j. daných čar f a f'. Ostatně máme dle theorie reciproké funkce (čl. 9.)

$$\mathrm{P} = -\Sigma \mathrm{B}_{hk} x_h x_k\,,$$

značíce opět B_{hk} minory determinantu $\Sigma \pm (\mathrm{A}_{11} \mathrm{A}_{22} \mathrm{A}_{33})$; avšak

$$\mathrm{B}_{hk} = \Delta a_{hk}\,,$$

a tedy

$$\mathrm{P} = -\Delta \Sigma a_{hk} x_h x_k = -\Delta f,$$

a obdobně

$$\mathrm{P}' = -\Delta' f'.$$

Bodová rovnice čáry

$$\lambda\varphi + \varphi' = 0\,,$$

dotýkající se patrně čtyr společných tečen čar φ a φ', jest ovšem

$$\begin{vmatrix} \lambda \mathrm{A}_{11} + \mathrm{A}'_{11}, & \lambda \mathrm{A}_{12} + \mathrm{A}'_{12}, & \lambda \mathrm{A}_{13} + \mathrm{A}'_{13}, & x_1 \\ \lambda \mathrm{A}_{21} + \mathrm{A}'_{21}, & \lambda \mathrm{A}_{22} + \mathrm{A}'_{22}, & \lambda \mathrm{A}_{23} + \mathrm{A}'_{23}, & x_2 \\ \lambda \mathrm{A}_{31} + \mathrm{A}'_{31}, & \lambda \mathrm{A}_{32} + \mathrm{A}'_{32}, & \lambda \mathrm{A}_{33} + \mathrm{A}'_{33}, & x_3 \\ x_1, & x_2, & x_3, & 0 \end{vmatrix} = 0\,,$$

což patrně lze psáti

(20) $$\lambda^2 \mathrm{P} - \lambda \mathrm{F} + \mathrm{P}' = 0\,,$$

kde F jest utvořeno z hodnot A_{hk} a x_ν právě tím způsobem, kterým v předchozím článku bylo utvořeno Φ z hodnot a_{hk} a ξ_ν, tedy

$$\begin{aligned} \mathrm{F} = {} & (\mathrm{A}_{22}\mathrm{A}'_{33} + \mathrm{A}_{33}\mathrm{A}'_{22} - 2\mathrm{A}_{23}\mathrm{A}'_{23}) x_1^2 \\ & + (\mathrm{A}_{33}\mathrm{A}'_{11} + \mathrm{A}_{11}\mathrm{A}'_{33} - 2\mathrm{A}_{31}\mathrm{A}'_{31}) x_2^2 \\ & + (\mathrm{A}_{11}\mathrm{A}'_{22} + \mathrm{A}_{22}\mathrm{A}'_{11} - 2\mathrm{A}_{12}\mathrm{A}'_{12}) x_3^2 \\ & + 2(\mathrm{A}_{13}\mathrm{A}'_{12} + \mathrm{A}_{12}\mathrm{A}'_{13} - \mathrm{A}_{11}\mathrm{A}'_{23} - \mathrm{A}_{23}\mathrm{A}'_{11}) x_2 x_3 \\ & + 2(\mathrm{A}_{21}\mathrm{A}'_{23} + \mathrm{A}_{23}\mathrm{A}'_{21} - \mathrm{A}_{22}\mathrm{A}'_{31} - \mathrm{A}_{31}\mathrm{A}'_{22}) x_3 x_1 \\ & + 2(\mathrm{A}_{32}\mathrm{A}'_{31} + \mathrm{A}_{31}\mathrm{A}'_{32} - \mathrm{A}_{33}\mathrm{A}'_{12} - \mathrm{A}_{12}\mathrm{A}'_{33}) x_1 x_2 . \end{aligned}$$

Applikujeme-li na proměnné x linearnou transformaci o modulu T zavádějící proměnné $\bar{x}$, tu patrně hoví bod $\bar{x}$ rovnici

$$\lambda^2\bar{P} - \lambda\bar{F} + \bar{P}' = 0,$$

hoví-li x rovnici

$$\lambda^2 P - \lambda F + P' = 0;$$

pokládáme-li x_ν a tedy také $\bar{x}_\nu$ za dané hodnoty, plynou tudíž z obou kvadratických těchto rovnic tytéž dvě hodnoty λ t. j.

$$\bar{P} : \bar{F} : \bar{P}' = P : F : P'.$$

Avšak

$$\bar{P} = -\bar{\Delta f} = -T^2\Delta f = T^2 P,$$

obdobně ovšem

$$\bar{P}' = T^2 P',$$

a tedy také

$$\bar{F} = T^2 F$$

t. j. F *jest kovariantem forem f a f'.*

Pomocí kovariantu F lze snadno vytknouti rovnici čtyř, čarám f a f' společných tečen. Libovolným bodem x procházejí totiž dvě čáry soustavy $\lambda\varphi + \varphi' = 0$, ony totiž, jež přísluší hodnotám λ daným rovnicí (20); nalézá-li se však bod x na společné tečně čar f a f' čili φ a φ', tu jím prochází jedna čára soustavy t. j. rovnice (20) má dva stejné kořeny. Jest tedy

$$F^2 - 4PP' = 0 \quad \text{čili} \quad F^2 - 4\Delta\Delta' ff' = 0$$

rovnicí společných tečen. Rovnice ta patrně náleží čáře, jež se dotýká čar $P = 0$ a P' v bodech, v nichž je čára $F = 0$ protíná; ***nalézá se tedy osm dotyčných bodů čtyr tečen čárám f a f' společných na kuželosečce*** $F = 0$.

20. ***Diskriminanty Δ, Δ' a simultanní invarianty Θ, Θ' tvoří úplný system invariantů forem f a f'***, t. j. každý invariant těchto forem lze vyjádřiti jakožto racionalnou celistvou a homogenní funkci hodnot Δ, Δ', Θ, Θ'.

Transformujeme-li formy f a f' do kanonických tvarů

$$\bar{a}_{11}x_1^2 + \bar{a}_{22}x_2^2 + \bar{a}_{33}x_3^2, \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

přejde jich invariant J do hodnoty $\overline{J}$ závislé na $\overline{a}_{11}$, $\overline{a}_{22}$, $\overline{a}_{33}$, a s. jest $\overline{J}$ symetrickou funkcí těchto tří hodnot. Applikujeme-li totiž na kanonické tvary transformaci

$$\overline{x}_1 = -\overline{\overline{x}}_2, \quad \overline{x}_2 = \overline{\overline{x}}_1, \quad \overline{x}_3 = \overline{\overline{x}}_3$$

o modulu $+1$, tu patrně se druhá forma nezmění, a pro první máme

$$\overline{\overline{a}}_{11} = \overline{a}_{22}, \quad \overline{\overline{a}}_{22} = \overline{a}_{11}, \quad \overline{\overline{a}}_{33} = \overline{a}_{33},$$

a poněvadž

$$\overline{J}(\overline{\overline{a}}_{11}, \overline{\overline{a}}_{22}, \overline{\overline{a}}_{33}) = \overline{J}(\overline{a}_{11}, \overline{a}_{22}, \overline{a}_{33})$$

máme

$$\overline{J}(\overline{a}_{22}, \overline{a}_{11}, \overline{a}_{33}) = \overline{J}(\overline{a}_{11}, \overline{a}_{22}, \overline{a}_{33})$$

čímž dokázáno, že se $\overline{J}$ záměnou hodnot $\overline{a}_{11}$ a $\overline{a}_{22}$ nemění. Poněvadž totéž platí o záměně liter $\overline{a}_{11}$ a $\overline{a}_{33}$, a $\overline{a}_{22}$ a $\overline{a}_{33}$, jest $\overline{J}$ symetrickou funkcí těchto hodnot.

Dle známé věty lze tedy $\overline{J}$ vyjadřiti racionalně hodnotami

$$\overline{a}_{11} + \overline{a}_{22} + \overline{a}_{33}, \quad \overline{a}_{11}\overline{a}_{22} + \overline{a}_{22}\overline{a}_{33} + \overline{a}_{33}\overline{a}_{11}, \quad \overline{a}_{11}\overline{a}_{22}\overline{a}_{33}$$

t. j. hodnotami (v. čl. 14.) $\overline{\Theta}'$, $\overline{\Theta}$, $\overline{\Delta}$; vzhledem k $\overline{\Delta}' = 1$ lze tomuto výrazu dáti homogenní tvar libovolného stupně ϱ, tedy položiti

$$\overline{J}(\overline{a}_{11}, \overline{a}_{22}, \overline{a}_{33}) = H(\overline{\Delta}, \overline{\Theta}, \overline{\Theta}', \overline{\Delta}'),$$

kde H značí homogenní funkci argumentů stupně ϱ.

Byla-li transformace převádějící původní formy f a f' do kanonických tvarů o modulu T, tu

$$\overline{\Delta} = T^2\Delta, \quad \overline{\Theta} = T^2\Theta, \quad \overline{\Theta}' = T^2\Theta', \quad \overline{\Delta}' = T^2\Delta',$$

a tedy

$$\overline{J} = T^{2\varrho}H(\Delta, \Theta, \Theta', \Delta'),$$
$$H(\Delta, \Theta, \Theta', \Delta') = T^{-2\varrho}\overline{J} = T^{-2\delta}\,T\alpha J.$$

Číslo α vyskytující se v rovnosti

$$\overline{J} = T^{\alpha}J$$

sluje *indexem* invariantu J, a jest v našem případě — jakož ihned ukážeme — vždy sudým číslem. Volíme-li tedy

$$\varrho = \frac{\alpha}{2},$$

máme

$$J = H(\Delta, \Theta, \Theta', \Delta'),$$

a věta jest dokázána.

Zbývá ukázati, že α jest sudé. Za tím účelem přihlédněme ke kanonickým tvarům a položme

$$A = (\bar{a}_{11} - \bar{a}_{22})(\bar{a}_{22} - \bar{a}_{33})(\bar{a}_{33} - \bar{a}_{11});$$

pak jest A^2 symetrickou funkcí hodnot $\bar{a}_{11}$, $\bar{a}_{22}$, $\bar{a}_{33}$. Kdyby index invariantu J byl lichým číslem, tu by součin $A\bar{J}$ záměnou dvou z hodnot $\bar{a}_{11}$, $\bar{a}_{22}$, $\bar{a}_{33}$ se nezměnil, jelikož by oba faktory jen své znamení změnily; o faktoru A jest to patrné, a o faktoru $\bar{J}$ to ukazuje substituce

$$\bar{x}_1 = \bar{\bar{x}}_2, \quad \bar{x}_2 = \bar{\bar{x}}_1, \quad \bar{x}_3 = \bar{\bar{x}}_3$$

o modulu -1. Symetrickou funkci $A\bar{J}$ lze však vyjádřiti racionalně a celistvě hodnotami $\bar{\Delta}$, $\bar{\Theta}$, $\bar{\Theta}'$:

$$A\bar{J} = R(\bar{\Delta}, \bar{\Theta}, \bar{\Theta}'),$$

a poněvadž totéž platí o $\bar{J}$:

$$\bar{J} = R_1(\bar{\Delta}, \bar{\Theta}, \bar{\Theta}'),$$

jevilo by se $A = \frac{R}{R_1}$ jakožto racionalná funkce hodnot $\bar{\Delta}$, $\bar{\Theta}$, $\bar{\Theta}'$, tedy jakožto symetrická funkce hodnot $\bar{a}_{11}$, $\bar{a}_{22}$, $\bar{a}_{33}$, věc absurdní.

Jest tedy praemissa, že α jest liché, nepřípustna a tvrzení dokázáno.

21. *Každý kvadratický kovariant forem f a f' lze vyjádřiti pomocí těchto forem a kovariantu F a sice ve tvaru*

$$If + I'f' + I''F,$$

v němž I, I', I'' *značí invarianty.*

Vyjděme hned z kanonických tvarů

$$f = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2, \qquad f' = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2;$$

pak snadno nalezneme kovariant F

$$F = a_1(a_2 + a_3)x_1^2 + a_2(a_3 + a_1)x_2^2 + a_3(a_1 + a_2)x_3^2.$$

Tyto tři rovnice dovolují vyjádřiti x_1^2, x_2^2, x_3^2 pomocí f, f', F, supponujeme-li, že determinant z koefficientů

$$G = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ a_1, & a_2, & a_3 \\ a_1(a_2 + a_3), & a_2(a_3 + a_1), & a_3(a_1 + a_2) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ a_1, & a_2, & a_3 \\ a_1(s - a_1), & a_2(s - a_2), & a_3(s - a_3) \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ a_1, & a_2, & a_3 \\ a_1^2, & a_2^2, & a_3^2 \end{vmatrix} = -(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)$$

nevymizí ($s = a_1 + a_2 + a_3$), t. j. že hodnoty a_1, a_2, a_3 jsou různé. Geometrický význam této supposice jest patrný, neboť při $a_1 = a_2$ máme

$$f - a_1 f' = (a_3 - a_1)x_3^2$$

čili

$$f = a_1 f' + (a_3 - a_1)x_3^2,$$

což ukazuje, že čáry f a f' se ve dvou bodech dotýkají; případ ten tedy vyloučíme. Pak řešením hořejších tří rovnic obdržíme

$$\begin{aligned} Gx_1^2 &= (a_2 - a_3)(a_1 f + a_2 a_3 f' - F), \\ Gx_2^2 &= (a_3 - a_1)(a_2 f + a_3 a_1 f' - F), \\ Gx_3^2 &= (a_1 - a_2)(a_3 f + a_1 a_2 f' - F). \end{aligned} \tag{21}$$

Buď nyní K kovariant forem f a f', a s. stupně druhého vzhledem k proměnným x_1, x_2, x_3. Utvoříme-li K pro kanonické tvary, bude obsahovati jen čtverce proměnných, t. j. bude míti tvar

$$K = k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + k_3 x_3^2. \tag{22}$$

Je-li totiž α index kovariantu K, podává substituce

$$x_1 = -\overline{x_1}, \quad x_2 = \overline{x_2}, \quad k_3 = \overline{x_3}$$

o modulu -1 rovnost

$$K(a_1, a_2, a_3, -x_1, x_2, x_3) = (-1)^\alpha K(a_1, a_2, a_3, x_1, x_2, x_3);$$

při sudém α soudíme, že K obsahuje jen čtverec proměnné x_1, a obdobně o x_2 a x_3. Avšak α nemůže býti liché, neb pak by poslední rovnice požadovala, by K bylo tvaru $x_1 X_1$, a obdobně tvarů $x_2 X_2$ a $x_3 X_3$, při čemž X_1, X_2, X_3 značí linearné funkce hodnot x_2, x_3, resp. x_3, x_1 a x_1, x_2; věc patrně nemožná. Má tedy K tvar (22) a přejde dosazením hodnot (21) na

$$\mathrm{K} = \mathrm{I}f + \mathrm{I}'f' + \mathrm{I}''\mathrm{F},$$

kde I, I′, I″ jsou funkce hodnot a_{11}, a_{22}, a_{33}.

Značí-li α stále index kovariantu K, máme pro libovolnou transformaci

$$\overline{\mathrm{K}} = \mathrm{T}^{\alpha}\mathrm{K},$$

t. j.

$$\overline{\mathrm{I}f} + \overline{\mathrm{I}'f'} + \overline{\mathrm{I}''\mathrm{F}} = \mathrm{T}^{\alpha}(\mathrm{I}f + \mathrm{I}'f' + \mathrm{I}''\mathrm{F}),$$

čili

$$\overline{\mathrm{I}}f + \overline{\mathrm{I}'}f' + \overline{\mathrm{I}''}\mathrm{T}^2\mathrm{F} = \mathrm{T}^{\alpha}(\mathrm{I}f + \mathrm{I}'f' + \mathrm{I}''\mathrm{F}),$$

z čehož vzhledem k neodvislosti tří hodnot f, f', F soudíme, že platí

$$\overline{\mathrm{I}} = \mathrm{T}^{\alpha}\mathrm{I}, \quad \overline{\mathrm{I}'} = \mathrm{T}^{\alpha}\mathrm{I}', \quad \overline{\mathrm{I}''} = \mathrm{T}^{\alpha-2}\mathrm{I}''.$$

Tím tvrzení dokázáno, a zároveň patrno, že indexy invariantů I, I′ se shodují s indexem kovariantu K, kdežto index invariantu I″ jest o 2 menší.

22. *Každý kvadratický kontravariant forem f a f' lze vyjádřiti pomocí kontravariantů Π, Π', Φ ve tvaru*

$$\mathrm{I}\Pi + \mathrm{I}'\Pi' + \mathrm{I}''\Phi,$$

v němž I, I′, I″ *jsou invarianty.*

Vyjdeme-li opět z kanonických tvarů

$$f = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2, \quad f' = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

máme

$$-\Pi = a_2 a_3 \xi_1^2 + a_3 a_1 \xi_2^2 + a_1 a_2 \xi_3^2,$$
$$-\Pi' = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2,$$
$$\Phi = (a_2 + a_3)\xi_1^2 + (a_3 + a_1)\xi_2^2 + (a_1 + a_2)\xi_3^2.$$

Determinant z koefficientů při ξ_1^2, ξ_2^2, ξ_3^2 jest opět

$$\begin{vmatrix} a_2a_3 & a_3a_1 & a_1a_2 \\ 1, & 1, & 1 \\ a_2+a_3, & a_3+a_1, & a_1+a_2 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{a_1a_2a_3}\begin{vmatrix} a_1a_2a_3, & a_1a_2a_3, & a_1a_2a_3 \\ a_1, & a_2, & a_3 \\ a_1(a_2+a_3), & a_2(a_3+a_1), & a_3(a_1+a_2) \end{vmatrix}=\mathrm{G}.$$

a řešením dle ξ_1^2, ξ_2^2, ξ_3^2:

$$\begin{aligned} -\mathrm{G}\xi_1^2 &= (a_2-a_3)(\Pi+a_1^2\Pi'+a_1\Phi), \\ -\mathrm{G}\xi_2^2 &= (a_3-a_1)(\Pi+a_2^2\Pi'+a_2\Phi), \\ -\mathrm{G}\xi_3^2 &= (a_1-a_2)(\Pi+a_3^2\Pi'+a_3\Phi). \end{aligned} \tag{23}$$

Buď L kvadratický kontravariant; substitucí

$$x_1=-\overline{x_1},\ x_2=\overline{x_2},\ x_3=\overline{x_3},\quad \overline{\xi_1}=-\xi_1,\ \overline{\xi_2}=\xi_2,\ \overline{\xi_3}=\xi_3$$

se snadno přesvědčíme, že L obsahuje jen čtverce proměnných, tedy

$$\mathrm{L}=l_1\xi_1^2+l_2\xi_2^2+l_3\xi_3^2,$$

a vložením výrazů (23) za ξ_1^2, ξ_2^2, ξ_3^2:

$$\mathrm{L}=\mathrm{I}\Pi+\mathrm{I}'\Pi'+\mathrm{I}''\Phi,$$

kde I, I′, I″ jsou funkce hodnot a_1, a_2, a_3.

Značí-li α index kontravariantu L, máme libovolnou substitucí

$$\overline{\mathrm{L}}=\mathrm{T}^\alpha\mathrm{L},$$

t. j.

$$\overline{\mathrm{I}}\,\mathrm{T}^2\Pi+\overline{\mathrm{I}'}\,\mathrm{T}^2\Pi'+\overline{\mathrm{I}''}\,\mathrm{T}^2\Phi=\mathrm{T}^\alpha(\mathrm{I}\Pi+\mathrm{I}'\Pi'+\mathrm{I}''\Phi),$$

z čehož soudíme

$$\overline{\mathrm{I}}=\mathrm{T}^{\alpha-2}\,\mathrm{I},\quad \overline{\mathrm{I}'}=\mathrm{T}^{\alpha-2}\mathrm{I}',\quad \overline{\mathrm{I}''}=\mathrm{T}^{\alpha-2}\mathrm{I}'',$$

čímž věta dokázána a zároveň patrno, že invarianty I, I′, I″ mají index o 2 menší než kontravariant L.

23. *Geometrický význam rovnic $F=0$ a $\Phi=0$.*

Kontravariantivní kuželosečka $\Phi=0$ jest obálkou všech přímek, jež protínají dané kuželosečky ve dvou harmonických bodových párech.

Vyjdeme hned z kanonických tvarů

$$f = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2, \quad f' = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$
$$\Phi = (a_2 + a_3)\xi_1^2 + (a_3 + a_1)\xi_2^2 + (a_1 + a_2)\xi_3^2.$$

Průsečné body A, B čáry f s přímkou ξ hoví rovnicím

$$f = 0, \quad \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0,$$

z nichž eliminací x_3 plyne

$$x_1^2(a_1\xi_3^2 + a_3\xi_1^2) + x_2^2(a_2\xi_3^2 + a_3\xi_2^2) + 2x_1x_2a_3\xi_1\xi_2 = 0, \tag{24}$$

a obdobně hoví průsečné body A′, B′ čáry f' s přímkou ξ relaci

$$x_1^2(\xi_3^2 + \xi_1^2) + x_2^2(\xi_3^2 + \xi_2^2) + 2x_1x_2\xi_1\xi_2 = 0. \tag{25}$$

Kořeny $\frac{x_1}{x_2}$ kvadratické rovnice (24) jsou úměrny dělícím poměrům paprsků spojujících základní bod $x_1 = x_2 = 0$ s body A, B, a obdobně kořeny $\frac{x_1}{x_2}$ rovnice (25) jsou úměrny dělícím poměrům spojnic tohoto základního bodu s body A′, B′. Budou tedy ABA′B′ harmonickými body, platí-li totéž o spojnicích, t. j. hoví-li jich dělící poměry α, β, α', β', rovnici

$$\frac{\alpha' - \alpha}{\alpha' - \beta} : \frac{\beta' - \alpha}{\beta' - \beta} = -1$$

čili

$$2(\alpha\beta + \alpha'\beta') - (\alpha + \beta)(\alpha' + \beta') = 0. \tag{26}$$

Dle (24) a (25) máme však

$$\alpha + \beta = -\frac{2a_3\xi_1\xi_2}{a_1\xi_3^2 + a_3\xi_1^2}, \quad \alpha\beta = \frac{a_2\xi_3^2 + a_3\xi_2^2}{a_1\xi_3^2 + a_3\xi_1^2},$$
$$\alpha' + \beta' = -\frac{2\xi_1\xi_2}{\xi_3^2 + \xi_1^2}, \quad \alpha'\beta' = \frac{\xi_3^2 + \xi_2^2}{\xi_3^2 + \xi_1^2},$$

čímž (26) po krátkém upravení podává

$$\xi_3^2[(a_2 + a_3)\xi_1^2 + (a_3 + a_1)\xi_2^2 + (a_1 + a_2)\xi_3^2] = 0$$

tedy skutečně

$$\Phi = 0,$$

jelikož obecně ξ_3 není nullou, přímka ξ neprocházejíc bodem

$x_1 = x_2 = 0$; pro dvě tečny čáry Φ tímto bodem procházející stačí užiti obdobně eliminace n. př. hodnoty x_2, t. j. užiti základního bodu $x_1 = x_3 = 0$.

Obdobně vychází, že *kovariantivní kuželosečka* $F = 0$ *jest geometrickým místem bodů, z nichž tečny k čarám f a f' vedené tvoří dva páry harmonických paprsků.*

24. *Příklady kovariantivných kuželoseček.*

A. Nechť se stanoví rovnice kuželosečky polarné ku f, vzhledem k čáře f'.

Vycházíme-li opět z kanonických tvarů f a f', jest ξ tečnou čáry f, platí-li rovnice

$$a_2 a_3 \xi_1^2 + a_3 a_1 \xi_2^2 + a_1 a_2 \xi_3^2 = 0.$$

Pol přímky ξ vzhledem k čáře f' čili $\varphi' = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 0$ má souřadnice

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{\partial \varphi'}{\partial \xi_1} : \frac{\partial \varphi'}{\partial \xi_2} : \frac{\partial \varphi'}{\partial \xi_3} = \xi_1 : \xi_2 : \xi_3,$$

a tedy jest hledaná rovnice reciproké čáry

$$K = a_2 a_3 x_1^2 + a_3 a_1 x_2^2 + a_1 a_2 x_3^2 = 0.$$

Dle návodu čl. 21. pišme

$$K = \frac{a_2 a_3 (a_2 - a_3)(a_1 f + a_2 a_3 f' - F) + . + .}{G},$$

kde tečkami vyznačené dva sčítance vycházejí z prvního členu cirkularnou permutací indexů 1, 2, 3. Seřaděním dle f, f', F:

$$K = \frac{a_2^2 a_3^2 (a_2 - a_3) + . + .}{G} f' - F,$$

$$K = (a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1) f' - F,$$

$$K = \Theta f' - F,$$

což patrně jest kovariant indexu 2. Hledaná kuželosečka jest tedy kovariantivná a má rovnici

$$\Theta f' - F = 0.$$

B. Nechť se kontravariantivná kuželosečka $\Phi = 0$ vyjádří v bodových souřadnicích pomocí f, f', F.

Při kanonických tvarech f a f' máme

$$\Phi = (a_2 + a_3)\xi_1^2 + (a_3 + a_1)\xi_2^2 + (a_1 + a_2)\xi_3^2,$$

a zavedením souřadnic bodových

$$K = (a_3 + a_1)(a_1 + a_2)x_1^2 + (a_1 + a_2)(a_2 + a_3)x_2^2$$
$$+ (a_2 + a_3)(a_3 + a_1)x_3^2,$$

t. j.

$$K = (a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + a_1^2x_1^2 + a_2^2x_2^2 + a_3^2x_3^2,$$

$$K = \Theta f' + \frac{a_1^2(a_2 - a_3)(a_1 f + a_2a_3 f' - F) + . + .}{G},$$

a seřaděním dle f, f', F:

$$K = \Theta f + \frac{a_1^3(a_2 - a_3) + . + .}{G} f + a_1a_2a_3 . \frac{a_1(a_2 - a_3) + . + .}{G} f'$$
$$- \frac{a_1^2(a_2 - a_3) + . + .}{G} F,$$
$$K = \Theta f' + (a_1 + a_2 + a_3) f - F,$$
$$K = \Theta' f + \Theta f' - F,$$

čímž úkol řešen a zároveň patrno, že kontravariantivná čára Φ zavedením bodových souřadnic se jeví jakožto kovariantivnou čarou

$$\Theta' f + \Theta f' - F = 0.$$

25. *Předchozí výsledek platí o každé kontravariantivné čáře a naopak též platí, že každá kovariantivná čára vyjádřena souřadnicemi přímkovými se jeví kontravariantivnou čarou.* Skutečně, je-li

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = 0$$

rovnicí čáry kovariantivné, utvoříme eliminací hodnot x_1, x_2, x_3 z rovnice poslední a z rovnic

$$\text{(27)} \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = \xi_1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = \xi_2, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_3} = \xi_3$$

rovnici čáry

$$\chi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$$

v souřadnicích přímkových. Jest tedy

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = \chi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

za platnosti rovnic (27). Linearnou transformací mějme

(28) $$T^{\alpha}\,\psi(x_1, x_2, x_3) = \overline{\psi}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3});$$

učinivše

(29) $$T^{-\alpha}\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\overline{x_1}} = \overline{\xi_1},\ T^{-\alpha}\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\overline{x_2}} = \overline{\xi_2},\ T^{-\alpha}\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\overline{x_3}} = \overline{\xi_3},$$

snadno shledáme, že souvisí tyto hodnoty $\overline{\xi}$ s předchozími ξ transponovanou substitucí. Skutečně při

$$x_j = t_{j1}\overline{x_1} + t_{j2}\overline{x_2} + t_{j3}\overline{x_3}, \quad (j = 1, 2, 3)$$

soudíme z rovnosti (28) derivováním dle $\overline{x_j}$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1}t_{1j} + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}t_{2j} + \frac{\partial\psi}{\partial x_3}t_{3j} = \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\overline{x_j}}\,T^{-\alpha}$$

t. j.

$$\xi_1 t_{1j} + \xi_2 t_{2j} + \xi_3 t_{3j} = \overline{\xi_j}.$$

Zavedením hodnot $\overline{\xi}$ pomocí (29) do $\overline{\psi}$ patrně máme

$$\overline{\psi}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}) = \overline{\chi}(\overline{\xi_1}, \overline{\xi_2}, \overline{\xi_3})\ T^{\alpha\beta}$$

kde $\overline{\chi}$ utvořeno právě tak jako χ, však s transformovanými koefficienty a proměnnými a kde β značí stupeň funkce χ. Z (28) soudíme, že

$$T^{\alpha\beta}\,\overline{\chi}(\overline{\xi_1}, \overline{\xi_2}, \overline{\xi_3}) = T^{\alpha}\psi(x_1, x_2, x_3) = T^{\alpha}\chi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

což vzhledem k okolnosti, že byly ξ k x kontragredientními, dokazuje, že χ jest skutečně kontravariantem.

Obdobně by se stvrdila první věta.

26. *Příklady.*

A. Jakožto další příklad vytkněme kovariantivnou kuželosečku $F = 0$ v souřadnicích přímkových, tedy ve tvaru kontravariantu.

Máme při kanonických tvarech

$$F = a_1(a_2 + a_3)x_1^2 + a_2(a_3 + a_1)x_2^2 + a_3(a_1 + a_2)x_3^2 = 0,$$

a v souřadnicích přímkových táž čára:

$$\mathrm{K} = a_2 a_3(a_3 + a_1)(a_1 + a_2)\xi_1^2 + a_3 a_1(a_1 + a_2)(a_2 + a_3)\xi_2^2 + a_1 a_2(a_2 + a_3)(a_3 + a_1)\xi_3^2 = 0.$$

Dle návodu čl. 22. nyní

$$\mathrm{K} = \frac{a_2 a_3(a_3 + a_1)(a_1 + a_2)(a_2 - a_3) + \cdot}{-\mathrm{G}}\,\Pi + \frac{a_1^2 a_2 a_3(a_3 + a_1)(a_1 + a_2)(a_2 - a_3) + \cdot}{-\mathrm{G}}\,\Pi' + \frac{a_1 a_2 a_3(a_3 + a_1)(a_1 + a_2)(a_2 - a_3) + \cdot}{-\mathrm{G}}\,\Phi,$$

značí-li připojené tečky vždy další dva členy vycházející z napsaného cirkularnou permutací indexů 1, 2, 3. Snadno nalezáme, že čítatel prvního zlomku jest

$$a_2 a_3(a_1^2 + \Theta)(a_2 - a_3) + \cdot = \Theta[a_2 a_3(a_2 - a_3) + \cdot] + a_1 a_2 a_3[a_1(a_2 - a_3) + \cdot] = \Theta \mathrm{G},$$

čítatel druhého:

$$a_1 a_2 a_3[a_1(a_1^2 + \Theta)(a_2 - a_3) + \cdot] = a_1 a_2 a_3\{a_1^3(a_2 - a_3) + \cdot + \Theta[a_1(a_2 - a_2) + \cdot]\} = \Delta[a_1^3(a_2 - a_3) + \cdot] = \Delta(a_1 + a_2 + a_3)\mathrm{G} = \Delta\Theta'\mathrm{G},$$

a čítatel třetího:

$$a_1 a_2 a_3[(a_1^2 + \Theta)(a_2 - a_3) + \cdot] = \Delta\{a_1^2(a_2 - a_3) + \cdot + \Theta[a_2 - a_3 + \cdot]\} = \Delta \mathrm{G}.$$

Máme tedy

$$\mathrm{K} = -\Theta\Pi - \Delta\Theta'\Pi' - \Delta\Phi$$

aneb, vzhledem k $\Delta' = 1$, ve tvaru kontravariantivném

$$\mathrm{K} = -\Theta\Delta'\Pi - \Delta\Theta'\Pi' - \Delta\Delta'\Phi.$$

Jest tedy rovnice čáry F v souřadnicích přímkových

$$\Theta\Delta'\Pi + \Delta\Theta'\Pi' + \Delta\Delta'\Phi = 0.$$

B. Kuželosečka polarná s f vzhledem k f' měla (čl. 24.) rovnici

$$\Theta f' - \mathrm{F} = 0,$$

a obdobně jest

$$\Theta' f - \mathrm{F} = 0$$

rovnice čáry polarné ku f' vzhledem k f. *Čára kovariantivná*

$$\Theta' f - \Theta f' = 0$$

prochází čtyrmi průsečíky obou polarných čar, poněvadž její rovnice jest rozdílem rovnic předchozích, *a zároveň čtyrmi průsečíky čar f a f'.*

Podobně soudíme, že při současných rovnicích

$$\Theta f' - \mathrm{F} = 0, \quad f' = 0$$

platí $\mathrm{F} = 0$, t. j. že čára F prochází průsečíky jedné kuželosečky s polarnou čarou druhé.

C. *Nechť se odvodí rovnice čtyr tečen kuželosečky f' sestrojených v průsečných bodech s kuželosečkou f.*

Vycházíme-li opět z kanonických tvarů

$$f = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2, \quad f' = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

hoví společný bod obou čar rovnicím $f = 0$, $f' = 0$ a jsou tedy jeho souřadnice vytknuty proporcí

$$x_1^2 : x_2^2 : x_3^2 = a_2 - a_3 : a_3 - a_1 : a_1 - a_2.$$

Učinivše $\sqrt{a_2 - a_3} = \alpha_1$, $\sqrt{a_3 - a_1} = \alpha_2$, $\sqrt{a_1 - a_2} = \alpha_3$, jsou tedy

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \ (\alpha_1, \alpha_2, -\alpha_3), \ (\alpha_1, -\alpha_2, \alpha_3), \ (\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3)$$

čtyry průsečíky čar f a f'. Součin rovnic tečen čáry f' v těchto bodech sestrojených jest

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 - \alpha_3 x_3)$$
$$(\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)(\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 - \alpha_3 x_3) = 0,$$

čili

$$\alpha_1^4 x_1^4 + \alpha_2^4 x_2^4 + \alpha_3^4 x_3^4 - 2\alpha_2^2\alpha_3^2 x_2^2 x_3^2 - 2\alpha_3^2\alpha_1^2 x_3^2 x_1^2 - 2\alpha_1^2\alpha_2^2 x_1^2 x_2^2 = 0,$$

t. j.

$$\begin{aligned}(30) \qquad & (a_2 - a_3)^2 x_1^4 + (a_3 - a_1)^2 x_2^4 + (a_1 - a_2)^2 x_3^4 \\ & - 2(a_3 - a_1)(a_1 - a_2) x_2^2 x_3^2 - 2(a_1 - a_2)(a_2 - a_3) x_3^2 x_1^2 \\ & - 2(a_2 - a_3)(a_3 - a_1) x_1^2 x_2^2 = 0.\end{aligned}$$

Nahrazením hodnot x_1^2, x_2^2, x_3^2 výrazy (21) lze tuto rovnici psáti

$$\frac{(a_2 - a_3)^4(a_1 f + a_2 a_3 f' - \mathrm{F})^2 + .}{\mathrm{G}^2}$$

$$- 2 \frac{(a_3 - a_1)^2(a_1 - a_2)^2(a_2 f + a_3 a_1 f' - \mathrm{F})(a_3 f + a_1 a_2 f' - \mathrm{F}) + .}{\mathrm{G}^2} = 0,$$

načež po seřadění dle mocností hodnot f, f', F bysme se přesvědčili, že jsou všecky koefficienty v čítateli hodnotou G^2 dělitelny, a že podíly jsou invarianty. Rychleji však dojdeme cíle, přepíšeme-li rovnici (30) do tvaru

$$(a_2 + a_3)^2 x_1^4 + . \quad - 2(a_3 - a_1)(a_1 - a_2) x_2^2 x_3^2 - . \quad = 4 a_2 a_3 x_1^4 + .$$

čili

$$(a_2 + a_3)^2 x_1^4 + . \quad + 2(a_3 + a_1)(a_1 + a_2) x_2^2 x_3^2 + .$$
$$= 4 a_2 a_3 x_1^4 + . \quad + 4(a_3 a_1 + a_1 a_2) x_2^2 x_3^2 + .,$$

t. j.

$$[(a_2 + a_3) x_1^2 + (a_3 + a_1) x_2^2 + (a_1 + a_2) x_3^2]^2$$
$$= 4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(a_2 a_3 x_1^2 + a_3 a_1 x_2^2 + a_1 a_2 x_3^2),$$

kterouž rovnici lze zavedením invariantův patrně psáti

$$(\Theta' f' - f)^2 = 4 f' (\Theta f' - \mathrm{F}),$$

aneb ve tvaru kovariantivném

$$(\Theta' f' - \Delta' f)^2 - 4 \Delta' f' (\Theta f' - \mathrm{F}) = 0, \tag{31}$$

čímž úkol řešen a zároveň vypočtěn kovariant bikvadratický o daném geometrickém významu.

27. *Transformace dvou ternarných kvadratických forem do kanonických tvarů* jest jednou z hlavních applikací předchozích úvah.

Jde-li o převedení ternarných forem

$$f = \Sigma a_{hk} x_h x_k, \quad f' = \Sigma'_{hk} x_h x_k$$

linearnou transformací

$$x_j = t_{j1} \overline{x}_1 + t_{j2} \overline{x}_2 + t_{j3} \overline{x}_3, \quad (j = 1,\ 2,\ 3)$$

na kanonické tvary

$$\overline{f} = a_1 \overline{x}_1^2 + a_2 \overline{x}_2^2 + a_3 \overline{x}_3^2, \quad \overline{f'} = \overline{x}_1^2 + \overline{x}_2^2 + \overline{x}_3^2,$$

připomeňme především, že tento požadavek patrně ukládá devíti transformačním koefficientům t_{hk} devět rovnic, dle čl. 14. splnitelných.

Koefficienty a_1, a_2, a_3 kanonického tvaru obdržíme rázem, uvážíme-li, že diskriminant formy $\overline{f}-\lambda\overline{f'}$ se liší faktorem T^2 od diskriminantu $D(\lambda)$ formy $f-\lambda f'$, t. j. od

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda a'_{11}, & a_{12}-\lambda a'_{12}, & a_{13}-\lambda a'_{13} \\ a_{21}-\lambda a'_{21}, & a_{22}-\lambda a'_{22}, & a_{23}-\lambda a'_{23} \\ a_{31}-\lambda a'_{31}, & a_{32}-\lambda a'_{32}, & a_{33}-\lambda a'_{33} \end{vmatrix}.$$

Z rovnosti

$$(32) \quad T^2D(\lambda)=\begin{vmatrix} a_1-\lambda, & 0, & 0 \\ 0, & a_2-\lambda, & 0 \\ 0, & 0, & a_3-\lambda \end{vmatrix}=(a_1-\lambda)(a_2-\lambda)(a_3-\lambda)$$

soudíme, že hodnoty a_1, a_2, a_3 jsou kořeny λ kubické rovnice

$$D(\lambda)=0.$$

Nyní dle čl. 22. máme

$$-G\overline{\xi}_1^2=(a_2-a_3)(\overline{\Pi}+a_1\overline{\Phi}+a_1^2\overline{\Pi'})$$

t. j.

$$-G\overline{\xi}_1^2=(a_2-a_3)T^2(\Pi+a_1\Phi+a_1^2\Pi'),$$

a obdobné rovnice pro $\overline{\xi}_2^2$, $\overline{\xi}_3^2$; zde značí $-G$ součin

$$(a_1-a_2)(a_2-a_3)\ (a_3-a_1)$$

a vzhledem k

$$T^2\Delta'=1$$

má T^2 hodnotu $\frac{1}{\Delta'}$. Tím nabýváme rovnic

$$\overline{\xi}_1=t_{11}\xi_1+t_{21}\xi_2+t_{31}\xi_3=\sqrt{\frac{\Pi+a_1\Phi+a_1^2\Pi'}{(a_1-a_2)(a_3-a_1)\Delta'}},$$

$$\overline{\xi}_2=t_{12}\xi_1+t_{22}\xi_2+t_{32}\xi_3=\sqrt{\frac{\Pi+a_2\Phi+a_2^2\Pi'}{(a_2-a_3)(a_1-a_2)\Delta'}},$$

$$\overline{\xi}_3=t_{13}\xi_1+t_{23}\xi_2+t_{33}\xi_3=\sqrt{\frac{\Pi+a_3\Phi+a_3^2\Pi'}{(a_3-a_1)(a_2-a_3)\Delta'}},$$

v nichž znamení odmocnin jest patrně libovolné.

Z nich plynou, klademe-li za ξ_1, ξ_2, ξ_3 resp. hodnoty

1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1 transformační koefficienty t_{hk}. Jich výrazy jakož i poslední tři rovnice lze formalně zjednodušiti tím, že derivováním rovnice (32) dle libovolné hodnoty λ a dosazením a_1 za λ odvodíme

$$T^2 D'(a_1) = -(a_2 - a_1)(a_3 - a_1),$$

čili

$$D'(a_1) = (a_1 - a_2)(a_3 - a_1)\Delta'.$$

Tím lze poslední tři rovnice napsati ve tvaru

$$\overline{\xi_k} = t_{1k}\xi_1 + t_{2k}\xi_2 + t_{3k}\xi_3 = \sqrt{\frac{\Pi + a_k\Phi + a_k^2\Pi'}{D'(a_k)}}\,,$$

a odtud naznačeným specialisováním hodnot ξ_1, ξ_2, ξ_3:

$$t_{1k} = \sqrt{\frac{\Pi(1,0,0) + a_k\Phi(1,0,0) + a_k^2\Pi'(1,0,0)}{D'(a_k)}}\,,$$

$$t_{2k} = \sqrt{\frac{\Pi(0,1,0) + a_k\Phi(0,1,0) + a_k^2\Pi'(0,1,0)}{D'(a_k)}}\,,$$

$$t_{3k} = \sqrt{\frac{\Pi(0,0,1) + a_k\Phi(0,0,1) + a_k^2\Pi'(0,0,1)}{D'(a_k)}}\,;$$

zde odmocniny mají dříve zvolený význam.

Tím problem transformace na kanonické tvary řešen.

Jiné řešení podává kovariant F. Máme totiž dle rovnic (21) ve čl. 21.

$$\overline{x}_1^2 = \frac{a_2 - a_3}{G}(a_1\overline{f} + a_2 a_3\overline{f'} - \overline{F}),$$

a obdobné rovnice pro $\overline{x}_2^2$, $\overline{x}_3^2$; vzhledem k

$$\overline{f} = f,\quad \overline{f'} = f',\quad \overline{F} = T^2F$$

máme tedy

$$\overline{x}_1^2 = \frac{a_2 - a_3}{G}\left(a_1 f + a_2 a_3 f' - \frac{F}{\Delta'}\right),$$

čili

$$\overline{x}_1 = \sqrt{\frac{F - \Delta'(a_1 f + a_2 a_3 f')}{D'(a_1)}}\,,$$

$$\overline{x}_2 = \sqrt{\frac{F - \Delta'(a_2 f + a_3 a_1 f')}{D'(a_2)}}\,,$$

$$\overline{x}_3 = \sqrt{\frac{F - \Delta'(a_3 f + a_1 a_2 f')}{D'(a_3)}}\,.$$

Klademe-li do těchto výrazů za x_1, x_2, x_3 resp. hodnoty 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1, plynou koefficienty τ_{hk} reciproké substituce

$$\overline{x_k} = \tau_{k1}x_1 + \tau_{k2}x_2 + \tau_{k3}x_3,$$

z nichž by ovšem snadno plynuly koefficienty t_{hk}.

První methoda jest tedy v tom výhodnější, že vede přímo ke koefficientům t_{hk} substituce, transformující dané formy do tvarů kanonických.

28. *Kubický kovariant ternarných forem f a f'.*

Strany polarného trojúhelníku oběma kuželosečkám f a f' společného tvoří zvrhlou čáru kubickou, jejíž povaha se linearnou transformací patrně nemění, a jež repraesentuje kubický kovariant forem f a f'.

Abychom to ukázali, uvažujme tři kuželosečky

$$f = 0, \quad f' = 0, \quad f'' = 0$$

a tažme se po geometrickém místě bodu x, jehož polary, vzhledem k těmto čarám vzaté, procházejí jedním bodem. Značíme-li literou X běžné souřadnice, jsou rovnice těchto polar

$$\Sigma \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \mathrm{X}_\nu = 0, \quad \Sigma \frac{\partial f'}{\partial x_\nu} \mathrm{X}_\nu = 0, \quad \Sigma \frac{\partial f''}{\partial x_\nu} \mathrm{X}_\nu = 0, \quad (\nu = 1,\ 2,\ 3)$$

a procházejí tudíž jedním bodem, platí-li

$$\mathrm{J}_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}, & \frac{\partial f}{\partial x_2}, & \frac{\partial f}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f'}{\partial x_1}, & \frac{\partial f'}{\partial x_2}, & \frac{\partial f'}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f''}{\partial x_1}, & \frac{\partial f''}{\partial x_2}, & \frac{\partial f''}{\partial x_3} \end{vmatrix} = 0,$$

t. j. vymizí-li funkcionelný čili t. zv. *Jacobi*-ho determinant funkcí f, f', f''. Rovnice ta stanoví kubickou čáru *Jacobi*-ho.

Jacobi-ho determinant jest kovariantem forem f, f', f'', a to i v případě, kdy tyto formy jsou libovolných stupňů. Skutečně, přejdou-li linearnou transformací o modulu T:

$$x_j = t_{j1}\overline{x_1} + t_{j2}\overline{x_2} + t_{j3}\overline{x_3},$$

formy f, f', f'' na $\overline{f}, \overline{f'}, \overline{f''}$, máme

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{x}_k} = \frac{\partial f}{\partial x_1} t_{1k} + \frac{\partial f}{\partial x_2} t_{2k} + \frac{\partial f}{\partial x_3} t_{3k},$$

a obdobně pro derivace funkcí f' a f''; tím ale

$$\overline{\mathrm{J}}_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} t_{11} + \frac{\partial f}{\partial x_2} t_{21} + \frac{\partial f}{\partial x_3} t_{31}, & \dots \\ \frac{\partial f'}{\partial x_1} t_{11} + \frac{\partial f'}{\partial x_2} t_{21} + \frac{\partial f'}{\partial x_3} t_{31}, & \dots \\ \frac{\partial f''}{\partial x_1} t_{11} + \frac{\partial f''}{\partial x_2} t_{21} + \frac{\partial f''}{\partial x_3} t_{31}, & \dots \end{vmatrix} = \mathrm{J}_3 \mathrm{T},$$

čímž tvrzení dokázáno. Zároveň patrno, že jest J_3 kovariant indexu 1.

Čára Jacobi-ho příslušná třem kuželosečkám o společném polarném trojúhelníku se zvrhne na tři strany tohoto trojúhelníku. Zvolíme-li totiž tento trojúhelník za základní, máme f, f', f'' ve tvarech

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2, \quad a'_1 x_1^2 + a'_2 x_2^2 + a'_3 x_3^2,$$
$$a''_1 a_1^2 + a''_2 x_2^2 + a''_3 x_3^2$$

a

$$\mathrm{J}_3 = 8 x_1 x_2 x_3 \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ a'_1, & a'_2, & a'_3 \\ a''_1, & a''_2, & a''_3 \end{vmatrix}.$$

Jsou-li nyní

$$f = \Sigma a_{hk} x_h x_k, \quad f' = \Sigma a'_{hk} x_h x_k$$

dvě obecné kvadratické ternarné formy, tu rovnice $\mathrm{F} = 0$, kde F značí dříve vytknutý kovariant, náleží kuželosečce, jež má s f a f' společný polarný trojúhelník; stačí pohlednout na výraz F v případě kanonických tvarů f a f'. Z toho soudíme, ***že Jacobi-ho čára příšlušná kuželosečkám f, f', F se skládá ze stran tohoto polarného trojúhelníka.*** Jacobi-ho determinant

$$\mathrm{J}_3 = \Sigma \pm \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f'}{\partial x_2} \quad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_3} \right)$$

jsa kovariantem forem f, f', F, jest též kovariantem forem f a f'; vskutku jest dle definice kovariantu přímo jasné, ***že kovariant kovariantu jest kovariantem původních forem.***

V případě kanonických tvarů

$$f = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2, \quad f' = x_1^2 + x_2^2 + x_3$$

jest

$$F = a_1(a_2 + a_3)x_1^2 + a_2(a_3 + a_1)x_2^2 + a_3(a_1 + a_2)x_3^2,$$
$$J_3 = 8(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)x_1x_2x_3.$$

29. *Každý kovariant ternarných forem f a f' lze vyjádřiti jakožto racionalnou celistvou funkcí výrazů f, f' a kovariantů F a J_3, o invariantivných koefficientech.*

Různěme případ, kdy index α kovariantu K jest sudý od případu, kdy jest lichý.

Je-li α sudé, soudíme právě tak jako jsme v čl. 21. učinili, že kovariant K utvořeny pro kanonické tvary může obsahovati jen sudé mocnosti proměnných x_1, x_2, x_3, a že jej tedy lze pomocí formul (21) vyjádřiti hodnotami f, f', F. Na tento výraz se tedy K redukuje transformací do tvarů kanonických; soudíme tudíž vzhledem ke

$$\overline{f} = f, \quad \overline{f'} = f', \quad \overline{F} = T^2F,$$

že má K i původně takový tvar, čímž tvrzení dokázáno.

Je-li α liché, ukazuje úvaha čl. 21., že pro kanonické tvary f, f' má K nutně tvar

$$K = x_1x_2x_3L,$$

kde L obsahuje jen čtverce proměnných. Vzhledem k tomu, že $x_1x_2x_3$ jest Jacobi-ho kovariant, soudíme, že L jest též kovariantem a sice sudého indexu $\alpha - 1$; lze tedy v tomto případě kovariant vyjádřiti ve tvaru

$$K = J_3L,$$

kde kovariant L jest racionalná celistvá funkce výrazů f, f', F, o invariantivných koefficientech.

Jakožto příklad vyjadřme J_3^2, což jest kovariant sudého indexu 2, pomocí f, f', F. Při kanonických tvarech jsme v předešlém článku nalezli

$$J_3 = -8Gx_1x_2x_3,$$

a tedy vzhledem k rovnicím 21.

$$\frac{1}{64}J_3^2 = G^2 \cdot \frac{-G}{G^3}(a_1f + a_2a_3f' - F)(a_2f + a_3a_1f' - F)$$

$$(a_3 f + a_1 a_2 f' - \mathrm{F}),$$

čili

$$-\frac{\mathrm{J}_3^2}{64} = \Delta f^3 + \Delta^2 f'^2 - \mathrm{F}^3 + f^2 f'(\Theta^2 - 2\Delta\Theta') - f^2\mathrm{F}\Theta$$

$$+ f'^2 f\Delta(\Theta'^2 - 2\Theta) - f'^2\mathrm{F}\Delta\Theta' + \mathrm{F}^2 f\Theta' + \mathrm{F}^2 f'\Theta - ff'\mathrm{F}(\Theta\Theta' - 3\Delta),$$

což vzhledem k $\Delta' = 1$ upravíme do žádaného tvaru kovariantivného

$$\frac{\mathrm{J}_3^2}{64} = \mathrm{F}^3 - \mathrm{F}^2(\Theta' f + \Theta f') + \mathrm{F}[\Delta'\Theta f^2 + \Delta\Theta' f'^2 + (\Theta\Theta' - 3\Delta\Delta')ff']$$

$$- \Delta\Delta'(\Delta' f^3 + \Delta f'^3) + ff'[\Delta'(2\Delta\Theta' - \Theta^2)f + \Delta(2\Delta'\Theta - \Theta'^2)f'].$$

30. *Každý kontravariant ternarných forem kvadratických f a f' lze vyjádřiti jakožto racionalnou funkci kontravariantů Π, Π', Φ a jich funkcionalného determinantu I_3, o invariantivných koefficientech.*

Že I_3 jest též kontravariantem forem f a f' a sice o indexu 5., snadno plyne z rovnic

$$\overline{\Pi} = \mathrm{T}^2\Pi, \quad \overline{\Pi'} = \mathrm{T}^2\Pi', \quad \overline{\Phi} = \mathrm{T}^2\Phi;$$

značíme-li totiž T_{hk} minor modulu T příslušný elementu t_{hk}, máme z transponované transformace

$$\overline{\xi_j} = t_{1j}\xi_1 + t_{2j}\xi_2 + t_{3j}\xi_3$$

řešením

$$\mathrm{T}\,\xi_j = \mathrm{T}_{j1}\overline{\xi_1} + \mathrm{T}_{j2}\overline{\xi_2} + \mathrm{T}_{j3}\overline{\xi_3},$$

a tedy

$$\frac{\partial\overline{\Pi}}{\partial\overline{\xi_1}} = \mathrm{T}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial\xi_1}\mathrm{T}_{11} + \frac{\partial\Pi}{\partial\xi_2}\mathrm{T}_{21} + \frac{\partial\Pi}{\partial\xi_3}\mathrm{T}_{31}\right), \text{ atd.}$$

Tím funkcionalný determinant utvořený z transformovaných forem

$$\overline{\mathrm{I}_3} = \mathrm{T}^3\mathrm{I}_3\,|\mathrm{T}_{hk}| = \mathrm{T}^5\mathrm{I}_3.$$

Vzhledem k třem libovolným kvadratickým formám utvořená rovnice $\mathrm{I}_3 = 0$ repraesentuje obálku všech přímek, jichž tři poly jsou na přímce; mají-li dané tři kuželosečky společný polarný trojúhelník, tu se obálka $\mathrm{I}_3 = 0$ rozloží na tři linearné faktory, t. rovnice rohů onoho trojúhelníku. Tento případ patrně nastane pro čáry Π, Π' a Φ a jest pak

$$\mathrm{I}_3 = 0$$

rovnicí náležející třem vrcholům polarného trojúhelníku čar f a f'.

Je-li nyní K kontravariant o sudém indexu, tu úvaha čl. 22. ukazuje, že utvořen pro kanonické tvary obsahuje jen čtverce proměnných ξ_1, ξ_2, ξ_3, a že jej tedy pomocí formul (23) lze racionalně hodnotami Π, Π', Φ vyjádřiti.

Je-li však K lichého indexu α, plyne obdobně, že při kanonických tvarech musí

$$K = \xi_1\xi_2\xi_3 L,$$

kde L značí kontravariant indexu $\alpha - 5$, tedy sudého; tak že pro obecné formy máme

$$K = I_3 L,$$

a L opět lze racionalně vyjádřiti kontravarianty Π, Π', Φ.

Jakožto příklad vytkněme kontravariant I_3^2 o indexu 10, a vyjadřme jej kontravarianty Π, Π', Φ. Při kanonických tvarech f a f' máme

$$-\Pi = a_2a_3\xi_1^2 + a_3a_1\xi_2^2 + a_1a_2\xi_3^2,$$
$$-\Pi' = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2,$$
$$\Phi = (a_2 + a_3)\xi_1^2 + (a_3 + a_1)\xi_2^2 + (a_1 + a_2)\xi_3^2,$$

a tedy

$$I_3 = 8G\xi_1\xi_2\xi_3.$$

Nyní vzhledem k formulím (23):

$$-\frac{1}{64} I_3^2 = (\Pi + a_1\Phi + a_1^2\Pi')(\Pi + a_2\Phi + a_2^2\Pi')(\Pi + a_3\Phi + a_3^2\Pi'),$$

a seřadíme-li dle Φ:

$$-\frac{1}{64} I_3^2 = \Delta\Phi^3 + (\Theta\Pi + \Delta\Theta'\Pi')\Phi^2 + [\Theta'\Pi^2 + \Delta\Theta\Pi'^2 + (\Theta\Theta' - 3\Delta)\Pi\Pi']\Phi + \Pi^3 + \Delta^2\Pi'^3 + \Pi\Pi'[(\Theta'^2 - 2\Theta)\Pi + (\Theta^2 - 2\Delta\Theta')\Pi'],$$

aneb, vzhledem k $\Delta' = 1$, v invariantivném tvaru

$$-\frac{1}{64} I_3^2 = \Delta\Delta'\Phi^3 + (\Delta'\Theta\Pi + \Delta\Theta'\Pi')\Phi^2 + [\Delta'\Theta'\Pi^2 + \Delta\Theta\Pi'^2 + (\Theta\Theta' - 3\Delta\Delta')\Pi\Pi']\Phi + \Delta'^2\Pi^3 + \Delta^2\Pi'^3 + \Pi\Pi'[(\Theta'^2 - 2\Delta'\Theta)\Pi + (\Theta^2 - 2\Delta\Theta')\Pi'].$$