Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Alois Strnad
Drobné zprávy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 19 (1890), No. 1, 44--54

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120851

Z let 1829—1875 (bez 1835 a 1838) ukázal, jak často minima 3° v stinítku — a tu předpokládal, že na venkově mráz mohl se dostaviti — se vyskytla, i obdržel průběh následující:

20. dubna — 4. května	9	9	11	12	**13**	**13**	11	9	7	2	7	7	6	5	6
5. května — 19. května	5	5	3	1	2	2	**3**	2	2	1	1	1	1	1	1
20. „ — 3. června	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0

Určitě vystupuje maximum 24. a 25. dubna, druhé pak 11. května jen tím vyniká, že kolem 8. jeví se ubývání mrazů. Z toho též patrno, že dosti stejnoměrně mrazy rozděleny jsou po celý měsíc květen.

Není tedy zajisté potřebí příčin jiných kosmických hledati mimo vliv slunce jediného, a jestliže skutečně z pozorování mnoholetých jeví se přerušení ve stoupání teploty ve dny ty, pak dostačí snad úplně, když řekneme: podobně jako počtem jsme stanovili, že teplota nejnižší na 8. leden připadá, teplota nejvyšší průměrně na 24. červenec — však jak velikých tu rozdílů co do doby doznáváme v rocích jednotlivých! — tak kolem 11. května průměrně dostavuje se přechod typických poměrů tlakoměrných i teploměrných zimy a leta.

Dove nazval světce ty, kteří mrazy přinášeti měli, „rodilými Američany“, Bezold pak „rodilými Uhry“, ježto tam příčinu proudění nalezl; van Bebber zas „rodilými Švédy“, ježto odtamtud proud postupuje. Ať jsou již jakékoliv národnosti, vyznání jsou jediného, i buďme spokojeni, že aspoň poněkud popřáno nám, pomocí telegrafie povětrnosti o nastávajícím příchodu jejich se dověděti a z pozorování vlastního na brzkou návštěvu jejich, byť i mimo čas v kalendáři vytčený, se připraviti a vliv jejich zmírniti.

Ve Vídni, v prosinci 1886.

Drobné zprávy.

Napsal

A. Strnad,

professor v Hradci Králové.

Kolik kladných celistvých řešení má rovnice

(1) $$ax + by = c.$$

Je-li x_1, y_1 dvojice kořenů celistvých, rovnici této vyhovujících, jsou ostatní dvojice vyjádřeny vzorci

$$x = x_1 + b\lambda,\ y = y_1 - a\lambda,$$

kdež λ jest libovolné číslo celé. Mají-li kořeny tyto býti zároveň kladné (nullu v to čítaje), k tomu nutnou a dostatečnou jest podmínka

$$-\frac{x_1}{b} \leqq \lambda \leqq \frac{y_1}{a}.$$

Této podmínce hoví čísel buď n neb $n+1$, značí-li n celistvou část rozdílu $\frac{y_1}{a} - \left(-\frac{x_1}{b}\right)$, čili, je-li dle označení *Legendreova*

$$n = \mathrm{E}\left(\frac{x_1}{b} + \frac{y_1}{a}\right) = \mathrm{E}\left(\frac{c}{ab}\right).$$

Rovnice (1) má tudíž tolik kladných celistvých řešení, kolik jednotek má celistvá část podílu $c : ab$, aneb jest řešení těch o jedno více.

Je-li $c < ab$, přísluší rovnici té řešení jediné aneb žádné. Je-li však $c > ab$, a tedy

$$c = abn + r,\ 0 < r < ab,$$

má rovnice (1) buď n neb $n+1$ kladné řešení dle toho, nemá-li rovnice $ax + by = r$ kladného řešení aneb má-li řešení takové. Tak ku př. rovnice $9x + 11y = 200$, má jen 2 kladná řešení, ale rovnice $9x + 11y = 250$ má 3 taká řešení.

Tímto způsobem zodpovídal svrchu položenou otázku *Catalan* (Mélanges mathématiques, tome I. p. 25.); v tomto smyslu jest pak doplniti udání vyslovené v prof. dra. Studničky Nauce o číslech (str. 110) aneb téhož Algebře (1. vyd. str. 170, 2. vyd. str. 151).

Pravděpodobnosť, že rovnice (1) má řešení n, po případě $n+1$, stanovil *Cesáro* (Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège, 2. série, tome XII. p. 273) výrazy

$$P_0 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right),$$

$$P_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right) - \frac{1}{ab}.$$

(Viz též *Mathesis*, tome IX., 1889. p. 116).

Skupiny čísel rovných v několika stupních.

Jsou-li dvě skupiny čísel

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots, a_n$$
$$b_1,\ b_2,\ b_3, \ldots, b_n$$

té vlastnosti, že

$$\Sigma a = \Sigma b,\ \Sigma a^2 = \Sigma b^2, \ldots, \Sigma a^k = \Sigma b^k,$$

slovou obě skupiny rovnými v k stupních (égalité á k degrés). Tak jsou ku př. skupiny

$$1,\ 5,\ 6 \text{ a } 2,\ 3,\ 7$$

rovny ve dvou stupních, jelikož

$$1 + 5 + 6 = 2 + 3 + 7 = 12$$
$$1^2 + 5^2 + 6^2 = 2^2 + 3^2 + 7^2 = 62.$$

Skupiny

$$1,\ 14,\ 22,\ 35 \text{ a } 2,\ 11,\ 25,\ 34$$

jsou rovny ve třech stupních; příslušné součty jsou 72, 1906, 56268.

Hořejší výměr podal ruský mathematik *Frolov*, známý pracemi svými o magických čtvercích. Podrobněji vyšetřil skupiny rovné ve dvou stupních; rovnosť takou značí symbolem

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots, a_n \perp b_1,\ b_2,\ b_3, \ldots, b_n.$$

Klademe-li $a_k - b_k = d_k$, jsou

$$\Sigma d = 0,\ \Sigma d^2 + 2\Sigma ad = 0$$

podmínky rovnosti ve dvou stupních. Rovnosť taková neporuší se, když ke všem členům na obou stranách stejné číslo přičteme neb od všech stejné číslo odečteme; taktéž, když všechny členy stejným číslem násobíme neb dělíme. K dané rovnosti lze jinou přiřaditi neb z téže vyřaditi. Je-li

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots, a_n \perp b_1,\ b_2,\ b_3, \ldots, b_n,$$

jest též

$$(a_1 + \lambda r_1),\ (a_2 + \lambda r_2), \ldots, (a_n + \lambda r_n)$$
$$\perp (b_1 + \lambda r_1),\ (b_2 + \lambda r_2), \ldots, (b_n + \lambda r_n),$$

značí-li λ libovolné celé číslo a je-li zároveň

$$\Sigma dr = 0.$$

Na tom zakládá se methoda k utvoření skupin rovných ve dvou stupních; objasníme ji příkladem. Vyjděme od zřejmé stejniny

$$1,\ 4,\ 2,\ 3 \perp 2,\ 3,\ 1,\ 4,$$

jejíž rozdíly jsou $-1, 1, 1, -1$, a ustanovme hodnoty hovící rovnici

$$r_1 - r_2 - r_3 + r_4 = 0.$$

Zvolme ku př. $r_1 = r_2 = 0$, $r_3 = r_4 = 4$ a přičtěme je k dané stejnině; obdržíme tak

$$1, 4, 6, 7 \perp 2, 3, 5, 8.$$

Chceme-li míti rovnosť vícečlennou, vezměme jinou rovnosť

$$1, \ 5, \ 6 \perp 2, \ 3, \ 7$$

a znásobivše ji 3mi, připojme k rovnosti prvé; tím najdeme

$$1, 4, 6, 7, 3, 15, 18 \perp 2, 3, 5, 8, 6, 9, 21$$

čili, když stejné členy obou stran vynecháme a skupiny náležitě urovnáme,

$$1, 4, 7, 15, 18 \perp 2, 5, 8, 9, 21.$$

(*Bulletin de la Société mathématique de France. Tome XVII. 1889, p. 69.*)

Úloha Malfattiova. Tak slove, jak známo, úloha: Vepsati do trojúhelníka tři kružnice, z nichž každá dotýká se druhých dvou kružnic a dvou stran trojúhelníka. Původce její, italský mathematik *Malfatti* († 1807) uveřejnil ve sborníku Memorie di matematica e di fisica della Società Italiana delle Scienze (Modena, 1803) velmi jednoduché vzorce pro úseky stran počítané od vrcholů až k bodům dotyčným; podal však pouhou verifikaci těchto vzorců, nenaznačiv cesty, po které k nim dospěl.

Úloha ta poutala pak pozornosť mnohých vynikajících geometrů. Tak *Gergonne* r. 1810 v I. svazku svých Annales ustanovil výrazy pro poloměry hledaných kružnic; avšak výrazy ty jsou tak složité, že jich ku sestrojení úlohy užiti nelze. *Steiner* uveřejnil r. 1826 v I. svazku Crelleova žurnálu řešení synthetické obsažené v následující větě, kterou bez důkazu vyslovil: Sestrojíme-li ke dvěma kružnicím Malfattiovým tečnu ve společném jich bodě dotyčném, dotýká se tato též dvou kružnic vepsaných do trojúhelníků, ve které rozpadne se daný trojúhelník příčkami půlícími úhly jeho.

Vedle těchto výtečných geometrů zabývali se úlohou tou ještě *Lechmutz* (Gergonne, Annales 1819), *Zornow* (Crelle, Journal 1833), *Schellbach* (tamže 1853), *Mertens* (tamže 1873), *Catalan* (Nouv. Annales 1845), *Simons* (Bulletin de l'Academie de Belgique 1874), *Pelletrau* (Association française 1888) a j. v. Nejnověji *Lebon* přímým spůsobem odvodil vzorce Malfattiovy; podáme stručně výsledek jeho práce (Solution du problème de Malfatti).

Užijme následujícího označení: a, b, c strany daného trojúhelníka, $2s$ obvod jeho; r poloměr kružnice vepsané; a', b', c' vzdálenosti středu jejího od vrcholů trojúhelníka; α, β, γ úseky stran od vrcholů až k dotyčným bodům kružnic Malfattiových; α', β', γ' poloměry těchto kružnic. O veličinách těchto platnou jest rovnice

$$(\beta+\gamma)^2 - 2(s-r)(\beta+\gamma) + a(b+c) - 2rs = 0$$

a dvě obdobné pro $(\gamma+\alpha)$ a $(\alpha+\beta)$. Z rovnic těchto, jichž menší kořeny úloze vyhovují, najdeme

$$\begin{aligned} \beta+\gamma &= s-r-a' \\ \gamma+\alpha &= s-r-b' \\ \alpha+\beta &= s-r-c'\,; \end{aligned}$$

odtud pak plynou Malfattiovy vzorce pro α, β, γ, kterých ku snadnému grafickému řešení úlohy upotřebiti lze. K zjednodušení výkonu toho s prospěchem slouží vztah

$$a'-\alpha = b'-\beta = c'-\gamma = \frac{a'+b'+c'+r-s}{2}.$$

Znajíce α, β, γ snadně ustanovíme poloměry kružnic Malfattiových; jestiť

$$\alpha' = \frac{r\alpha}{s-a} \text{ a t. d.}$$

Můžeme konečně všechny hodnoty vyjádřiti jakožto funkce stran, pomníce, že jest

$$a'^2 = \frac{bc(s-a)}{s} \text{ a t. d.}$$

Lebon vyšetřil též řešení úlohy Malfattiovy pro případ, že každá z kružnic dotýká se dvou stran trojúhelníka a třetí seče. Tu nastane v základní rovnici kvadratické pouze ta změna, že na místě $+r$ klásti jest $-r$ a $\beta+\gamma$ rovno většímu kořenu rovnice. Tomu přiměřeně změní se též hodnoty ostatní.

(Rendiconti del circolo matematico di Palermo. Tomo III. 1889, p. 120).

Násobné body křivek racionálných. Rovinná křivka racionálná dána jest rovnicemi

$$x = \frac{\varphi(t)}{f(t)},\ y = \frac{\psi(t)}{f(t)},$$

v nichž φ, ψ, f jsou celistvé funkce proměnného parametru t. Chceme-li vyšetřiti násobné body takové křivky, pišme rovnice dané v podobě

$$A \equiv xf(t) - \varphi(t) = 0$$
$$B \equiv yf(t) - \psi(t) = 0.$$

Mají-li mnohočleny A, B při určitých hodnotách x, y společnou mírou mnohočlen C, který jest stupně n dle t, jest příslušný bod n-násobným bodem křivky.

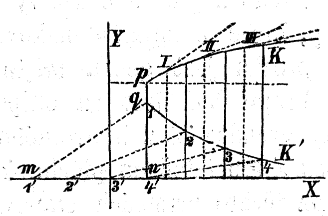
Tuto podmínku, nutnou i dostatečnou, vyslovil *Antomari*.

(Nouvelles Annales de Mathématiques. 1888, p. 356.)

Křivosť křivky integrálné. Upozornili jsme v lonském ročníku Časopisu (str. 36) na methodu ku grafické integraci *prof. Šolínem* podanou. Dána-li křivka K′ rovnicí $y' = f'(x)$, slove integrální její křivkou křivka K určená rovnicí

$$y = \int f'(x)dx,$$

i lze ji dle návodu na citovaném místě vyloženého přibližně sestrojiti. Povšimnutí zasluhuje snadné sestrojení středu křivosti v libovolném bodě této křivky, které objevil *d'Ocagne.*



Je-li p bod křivky integrální, q bod křivky původní a mají-li oba body v pravoúhlé soustavě společnou úsečku $x = \overline{on}$; je-li dále m takový bod osy X, že jest $\overline{mn} = l = 1$ a tudíž $\overline{mq}$ rovnoběžno s tečnou křivky K v bodě p, jest poloměr křivosti této křivky v témž bodě

$$\varrho = \frac{(l^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{l^2} \cdot \frac{dx}{dy},$$

a na vzorci tom založena konstrukce následující:

V bodě q sestrojme ku křivce K' tečnu T a v bodě p ku křivce K normálu N; v průsečíku r tečny T a osy X vztyčme ku X kolmici, která normálu N v bodě t seče. Zde ku N vztyčená kolmice protíná $\overline{pn}$ v bodě u a bodem tím vedená rovnoběžka ku x stanov v normále N střed křivosti s.

(Nouvelles Annales de mathématiques 1888. p. 438).

Zvláštní plocha 4. stupně.

Rudio vyšetřoval plochy, jichž hlavní středy křivosti mají geometrickým místem dvé konfokálných ploch 2. stupně; zabýval se též středovými plochami paprskové soustavy 4. stupně a 4. třídy, jejíž ohniskovými plochami jsou dvě konfokálné plochy 2. stupně.

Zvláštním případem jest známá cyklida Dupinova; u této přejdou ony dvě konfokální plochy ve dvé fokálných kuželoseček. V pravoúhlé soustavě prostorové jsou rovnice jich

$$E \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

$$H \equiv \frac{x^2}{c^2} - \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0,$$

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

Zajímavou jest středová plocha soustavy paprsků protínajících tyto dvě křivky, které zastupují ohniskové plochy soustavy.

Tato středová plocha jest geom. místem bodů půlících úsečky, jichž jeden krajní bod jest na ellipse E a druhý na hyperbole H. Přímky vycházející z libovolného bodu hyperboly H a protínající ellipsu E tvoří točnou plochu kuželovou a středy úseček obsažených na těchto přímkách stanoví ellipsu os a, b.

Naopak zase středy úseček obsažených na paprscích, které z některého bodu ellipsy E vycházejí a hyperbolu H protínají, stanoví hyperbolu os c, b. Odtud vysvítá, že uvažovanou plochu protíná rovina osnovy XY ve dvou ellipsách, rovina osnovy XZ ve dvou hyperbolách; veškeré tyto ellipsy a hyperboly jsou vespolek shodny.

Plocha tato, jejíž rovnice jest

$$(4a^2y^2+4c^2z^2-b^4)^2$$
$$=8b^2x^2(a^2b^2+b^2c^2-2b^2x^2-4a^2y^2+4c^2z^2),$$

má v rovině YZ dvojnásobnou křivku elliptickou

$$4a^2y^2+4c^2z^2-b^4=0.$$

(Crelle-Kronecker, Journal für reine und angewandte Mathematik. 1888, 104. Bd., p. 85).

Obsahujíc dvě soustavy shodných křivek, náleží tato ellipticko-hyperbolická plocha k plochám posouvání, o kterých prof. *Tilšer* v přednáškách svých na české vysoké škole technické se stanoviska kynetického pojednává. Plocha posouvání vzniká, pohybuje-li se křivka A tak, že všechny její body vytvořují dráhy shodné s křivkou B; táž plocha vytvoří se pohybem křivky B, jejíž body opisují dráhy shodné s A. Každým bodem plochy prochází jedna křivka shodná s A a jedna shodná s B.

Zobecněním úvah Rudiových přicházíme k poznání věty: *Dány-li křivky A, B a je-li proměnná úsečka ab, mající jeden krajní bod v A, druhý v B, dělena bodem c dle stálého poměru, jest geometrickým místem bodu c plocha posouvání ve smyslu Tilšerově.*

Přejde-li jedna z křivek daných v přímku, jest geom. místem plocha válcová; nahradíme-li obě křivky přímkami, bude geom. místem rovina.

Nekrolog.

KORNEL PLCH.

Jednota naše utrpěla ztrátu velmi bolestnou. Odešelť na věčnosť jeden z nejpilnějších a nejpovolanějších spolupracovníků Časopisu našeho a zvláštní příznivec Jednoty.

Kornel Plch narodil se dne 22. července roku 1838 v Jedovnicích na Moravě, studoval gymnasium v Brně a vstoupil roku 1856 do řádu Tovaryšstva Ježíšova. Odbyv noviciát v Baumgartenbergu v Horních Rakousích, zabýval se horlivě studiem klassických jazyků, načež od roku 1860 do 1863 konal podle stanov řádu studia filosofická v Břetislavi v Uhrách, kdež jest řádový filosofický ústav provincie Rakousko-Uherské. Potom poslán na gymnasium do Bohosudova v Čechách, kdež byl činným od r. 1864 do r. 1868. Od roku 1869 do r. 1871 včetně oddával se studiím theologickým na universitě v Inomostí v Tyrolsku, kde také r. 1871 na kněžství jest posvěcen. Na to vyučoval po čtyři roky, až do r. 1876, mathematice na filosof. ústavu v Břetislavi. Pobyv rok v Praze, učiteloval zase po 2 leta na vyšším gymn. v Kalksburku u Vídně a od r. 1879 do r. 1888 v Bohosudově, kde kromě mathematiky po několik let i češtině vyučoval. Pro chorobu žaludeční bylo mu roku 1888 Bohosudov opustiti a v jižních krajích hledati úlevy. Zotaviv se poněkud, převzal na podzim r. 1888 professuru mathematiky na gymnasiu v Travníku v Bosně, kde však propuknuvší stará choroba činnému životu jeho učinila konec 23 června 1889.

P. Kornel Plch vyznamenával se po celý život neúmornou pilností a láskou ku vědám zvláště mathematickým. Již na gymn. brněnském, ovšem tehdy německém, ve všech třídách vynikal nad spolužáky své, bývaje vždy prvním ve třídě. Miluje vědy, miloval ovšem i knihy a už jako student každý groš vynakládal na zakupování kněh, ba často i ve věcech nejpotřebnějších se uskrovňoval, by jen knihovnu svou mohl obohatiti knihou novou; zvláště pak objednával knihy české, kde která jen vyšla. Tak stalo se, že již ku konci studií gymn. měl knihovnu nenepatrnou.

Později oddal se výhradně a se zdarem studiím mathematickým. Některé z prací jeho uveřejněny jsou v Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky a to:

Průměrová rovnice ellipsy v podobě vzorce pro záchvěje elliptické (roč. V.).

Společný způsob dokazování různých pouček a vzorců na základě skracování stálých poměrů proměnnými veličinami (roč. X.).

Kratičké odvození vzorců pro $\frac{\sin}{\cos}(\alpha+\beta)$ na základě sinusové věty (roč. XI.).

Dráha pohybu rovnoměrně zrychleného (roč. XII.).

Trojí způsob elementárného odvození vzorce pro obvod ellipsy (roč. XII.).

Poznámky k nekonečným řadám (roč. XIII.).

O ploském obsahu kruhového výkrojku (roč. XIV.).

Odchylka Foucaultova kyvadla (roč. XV.).

O úchylce roviny Foucaultova kyvadla (roč. XV.).

Přirozený kyvadlový stroj a dva nápodobené kyvadélkové strojky (roč. XVII.).

Braunův trigonometr a jeho upotřebení (roč. XVII.).

Nástin školního výkladu Foucaultovy odchylky (roč. XVII.).

Druhý nástin školního výkladu Foucaultovy odchylky (roč. XVIII.).

Redakce tohoto Časopisu chová ještě rukopis článku s názvem: „Poznámky ku počtu differencialnímu.“

Osobní povahou byl zesnulý mužem skromným a tichým, mysli ušlechtilé a pln přívětivé úslužnosti, za největší potěšení sobě klada, mohl-li komu v něčem posloužiti. Professorem byl vzorným a v přednáškách svých nad míru jasným, pro kterouž příčinu byl miláčkem všech žáků svých.

Vypsání ceny.

Královský ústav benátský pro vědy, písemnictví a umění (Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti) ve své slavnostní valné hromadě dne 19. května 1889 vypsal některé cenné otázky, mezi nimiž k návrhu schůze ze dne 17. března 1889 tuto: „Žádá se *Rukověť dějin mathematických věd* opatřená chrestomatií mathematickou obsahující výtahy z děl mathematických ze starého a středního věku, renaissance a doby nové. Při těch výtazích postačí, budou-li vedle autora, titulu a rozsahu spisu udána vydání. Konkurrent pak má při každém oddílu udati motivy, z kterých vřadil jej do chrestomatie.

Upozornění.

Rukověť má podáti stručně a v hrubých rysech formou moderní vývin vědy; naproti tomu chrestomatie má studujícího ušetřujíc mu nutnosť vraceti se ku pramenům, uvésti ve styk se smýšlením geometrů dob minulých ve formě jeho konkretní.

Konkurs ostane otevřen do 31. prosince 1891.

Ku konkursu jsou připuštěni Italové a cizinci, vyjma činné členy král. ústavu benátského. Rukopis může býti psán italsky, latinou, francouzsky, německy nebo anglicky a budiž zaslán vyplacen sekretariatu ústavu.

Dle obyčeje buďtež opatřeny rukopisy heslem, které budiž zároveň napsáno na obálce zapečetěné obsahující úplnou adressu spisovatelovu. Otevřena bude jediné obálka spisu cenou pocténého; všecky rukopisy ostanou uloženy v archivu ústavu se zajištěním zatajení pronešených úsudků, autorům vyhrazeno jediné právo dáti si zhotoviti opisy vlastním nákladem.

Výsledek konkursu bude prohlášen při roční slavné veřejné valné hromadě. Cena obnáší 3000 lir.

Úlohy.

Úloha 1.

Stanoviti kladnou hodnotu x tak, aby čísla

$$546+x, \quad 327+x$$

měla největší společnou míru 73. *Prof. A. Strnad.*

Úloha 2.

Řešiti rovnici

$$\operatorname{cosec} x - \sec 2x = 2.$$

Týž.

Úloha 3.

V trojúhelníku dána jedna strana $= a$, součet druhých dvou $= m$ a úhel jimi sevřený α. Sestrojte oba možné trojúhelníky a dokažte, že jsou shodné. *Prof. A. Sucharda.*

Úloha 4.

Dokázati větu:

Stojí-li úhlopříčny rovnoramenného lichoběžníka na sobě kolmo a vedeme-li jich průsečíkem kolmici k jednomu rameni, půlí tato druhé rameno. *Prof. A. Strnad.*