Úlohy

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 67 (1938), No. Suppl., D237--D240

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120822

ÚLOHY.

Úloha 1. Poučení o transfinitní aritmetice najde český čtenář v Neubauerově referátě „Úvod do transfinitní aritmetiky", Časopis **67**, část D, str. 101—120. Jest dokázati tuto větu:

Každý alef $\aleph_\alpha$ je součtem regulárních alefů $\aleph_\xi$, kde ξ probíhá množinu regulární mohutnosti.

Pokyn: Pro irregulární $\aleph_\alpha$ nechť jest ω_β regulární ordinální číslo konfinální s ω_α. Alefy $\aleph_\xi$ se sestrojí, jak následuje. Nechť ord. čísla ξ' probíhají posloupnost typu ω_β konfinální s posloupností všech ord. čísel $< \omega_\alpha$. Pak položíme $\xi = \eta + 1$, kde $\aleph_\eta$ je mohutnost čísla ξ'.

Bedřich Pospíšil.

Úloha 2. Příklad ke cvičení na funkční rovnice.

Při označení jako v mém článku „Sur un problème de MM. Bernstein et Kolmogoroff", Časopis **65** (1936), str. 64—76, odvoditi teorém obdobný teorému loc. cit. na str. 71, kde místo Φ přijde dvojice funkcí Φ_1 a Φ_2 a rovnice (a), . . ., (d) se nahradí rovnicemi (a'), . . ., (d'), kde $UV = 0$, $\{U_\nu\}$ monotonní a $U \doteq \lim U_\nu$:

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi_1(U^*V \mid x, Y) = \\
&\quad = \int_R \Phi_1(U \mid x, \mathrm{d}Z)\, \Phi_1(V \mid z, Y) - \int_R \Phi_2(U \mid x, \mathrm{d}Z)\, \Phi_2(V \mid z, Y) \\
&\Phi_2(U^*V \mid x, Y) = \\
&\quad = \int_R \Phi_1(U \mid x, \mathrm{d}Z)\, \Phi_2(V \mid z, Y) + \int_R \Phi_2(U \mid x, \mathrm{d}Z)\, \Phi_1(V \mid z, Y)
\end{aligned}\right\} \quad \text{(a')}$$

$$\Phi_1(U_\nu \mid x, Y) \to \Phi_1(U \mid x, Y),\; \Phi_2(U_\nu \mid x, Y) \to \Phi_2(U \mid x, Y) \qquad \text{(b')}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left\{\frac{\mathrm{d}^+}{\mathrm{d}t} \Phi_1(\langle s, t\rangle \mid x, Y)\right\}_{t=s} = 0 \\
&\left\{\frac{\mathrm{d}^+}{\mathrm{d}t} \Phi_2(\langle s, t\rangle \mid x, Y)\right\}_{t=s} = A(s + 0 \mid x, Y)
\end{aligned}\right\} \quad \text{(c')}$$

$$\Phi_1(0 \mid x, Y) = E(x, Y),\; \Phi_2(0 \mid x, Y) = 0. \qquad \text{(d')}$$

Pokyn: Všimni si analogie (a') s adičními teorémy pro cosinus a sinus a rovněž analogie rovnice (a) loc. cit. s adičním teorémem pro exponenciální funkci.

Bedřich Pospíšil.

Příklady ke cvičení z topologie. Jde o příklady, které se dají řešit na základě článků, které jsem uveřejnil v Časopise vesměs v 67. ročníku (1937—38) zcela jednoduchou aplikací resp. modifikací tam obsažených úvah anebo na základě konstrukcí, které zde popisuji. Užívám názvosloví Čechových „Topologických prostorů“,[1]) k nimž se vztahují citáty v závorkách. O potřebných věcech z transfinitní aritmetiky možno se poučit z Neubauerova referátu v Časopise **67** (1938), D 101—120.

$F_{\sigma\delta}$ značí průnik spočetně mnoha F_σ (3.1). V prvních dvou příkladech se užije věty, že množina I irracionálních čísel na přímce není F_σ, ale jest $F_{\sigma\delta}$.[2])

1. O B-prostoru (8.3) P_1, který ihned popíši, jest dokázati, že to je dědičný N-prostor (8.6, str. 253), který obsahuje otevřenou množinu I, která v P_1 není F_σ a jest $F_{\sigma\delta}$.

Otevřená base U-prostoru P_1, jehož body jsou reální čísla, se skládá z otevřených intervalů a z množin (i), kde $i \in I$ (6.4).

2. O prostoru P_2, který bude ihned popsán, dokažte, že je to AHU-prostor (6.1, 7.1, 8.4), který splňuje druhý axiom o spočetnosti (6.4.1), který má body vesměs $\overline{\overline{O}}$-oddělené (8.1) a obsahuje otevřenou I, která není F_σ a jest $F_{\sigma\delta}$.

Otevřená base U-prostoru P_2, jehož body jsou reální čísla, se skládá z otevřených intervalů a z jejich průniků s I.

Jak známo, $ABRU$-prostory (6.1, 7.1, 8.3, 8.5), které splňují první axiom o spočetnosti (6.4.1), jsou metrisovatelné (11.1). Tedy P_2 není R-prostor, poněvadž by byl jinak metrisovatelný a otevřená I by byla F_σ.

3. Dokažte, že P_3 je AHU-prostor (6.1, 7.1, 8.4), který obsahuje dva body p_1 a p_2, které v něm nejsou $\overline{\overline{O}}$-oddělené.

P_3 bude rovina s poněkud změněnou topologií. Přímka A rozetne P_3 ve dvě otevřené poloroviny A_1 a A_2. Nechť $p_1 \in A_1$, $p_2 \in A_2$. Okolím každého bodu x vyjma p_1 a p_2 rozumíme prostě vnitřek kruhu o středu x. Okolím bodu p_i bude každá množina obsahující p_i, která jest rovna A_i méně konečně mnoho uzavřených kruhů.

Definice: Nechť P a Q jsou topologické prostory; pak $P \times Q$ bude topologický prostor, jehož body jsou uspořádané páry (x, y), kde $x \in P$ a $y \in Q$; okolím bodu (x, y) v $P \times Q$ bude každá množina $\underset{(x,y)}{E}(x \in U, y \in V)$, kde U resp. V je okolí bodu x resp. y v P resp. v Q.

Jsou-li P a Q B-prostory (8.3), pak $P \times Q$ obsahuje uzavřenou část homeomorfní s P (str. 257) a stejně $P \times Q$ obsahuje uzavřenou část homeomorfní s Q (jako podprostor vnořený do $P \times Q$). Naproti tomu pro jiné prostory tomu tak není, jak ukazuje následující příklad.

---

[1]) Časopis **66** (1937), D 225—264.

[2]) Obdobné výsledky jako v příkladech 1. a 2. se dostanou i pro jiné Borelovy třídy, když se za I vezme část přímky, která patří do α-té Borelovy třídy a do žádné s pořadovým číslem $< \alpha$.

4. Pro prostor P_4 jest $P_4 \times P_4$ takový AKU-prostor (6.1, 7.1, 8.2), že neobsahuje uzavřené části, která by byla homeomorfní s P_4.

Body prostoru P_4 jsou přirozená čísla. Uzávěrem bodu n jest při tom množina všech $m \geqq n$.

5. Za pomoci mých článků „Note sur les espaces métriques compacts" (Spisy přírod. fak. Masarykovy univ. 249) a „Sur le nombre des topologies d'un ensemble donné" (Časopis 67) dokažte následující větu:

Nechť $1 < \mathfrak{a} \leqq 2^{\mathfrak{c}}$ ($\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$). Pak nutná a dostatečná podmínka, aby metrický prostor (P, u) byl kompaktní, jest, aby počet AHU-topologií na P silnějších než u (1.2) byl $< \mathfrak{a}$.

6. Souvislý prostor je takový, že ho není možno rozdělit na dvě uzavřené neprázdné disjunktní části. Urysohn sestrojil[3]) souvislý spočetný AHU-prostor, se spočetnými charaktery bodů (4.2). Na základě toho a mého článku „Mohutnost prostoru s hustou částí dané mohutnosti" (Časopis 67) sestrojte souvislý AHU-prostor mohutnosti $\mathfrak{h}$, jehož všecky body až na jakýsi ∞ mají spočetné charaktery a ∞ má charakter $\mathfrak{a}$ ($\aleph_0 \leqq \mathfrak{h} \leqq \mathfrak{a} \leqq 2^{\mathfrak{h}}$).

7. Pro $\mathfrak{a} \geqq 2^{\aleph_0}$, $\mathfrak{h} = \aleph_0$ možno prostor I v mém článku citovaném v 6. volit tak, aby to nebyl L-prostor (5.2).

Pokyn: Pro různě volené body $f = \infty$ je těch I celkem $2^{\mathfrak{a}} > 2^{\aleph_0}$. Kdyby to byly samé L-prostory, bylo by jich nanejvýše $2^{\aleph_0}$.

8. Nechť S_n (n přirozené) jsou disjunktní množiny mohutnosti $\aleph_1$, které neobsahují prvek ∞. Body prostoru P_8 jsou prvky množiny $\sum\limits_n S_n + (\infty)$. Jednobodové množiny (s), kde $s \in \sum\limits_n S_n$, jsou v P_8 otevřené. Definujícími okolími bodu ∞ v P_8 jsou množiny tvaru $P_8 - (S_1 + S_2 + \ldots + S_n) - S$ se spočetnou S. Jest dokázati, že $\chi_{P_8}(\infty) = \aleph_1$, $\psi_{P_8}(\infty) = \aleph_0$ a jinak $\chi_{P_8}(p) = \psi_{P_8}(p) = 1$.

Pokyn: K důkazu rovnice $\chi_{P_8}(\infty) = \aleph_1$ možno si myslit, že body v P_8 jsou ordinální čísla $\leqq \omega_1$ ($\infty = \omega_1$). Pak existuje vždy $\sigma < \omega_1$ takové, že $\xi \in S \Rightarrow \xi < \sigma$, a tedy S možno brát vždy tvaru $\underset{\xi}{E}(\xi < \sigma)$.

9. Dokažte, že prostory typu N v mém článku „Théorèmes d'existence pour les caractères des points" (Časopis 67) mají vlastnost α z problému V citovaného článku p. prof. Čecha (str. 263).

Definice: Nechť P je prostor s topologií u. Pak $\sigma_P(p)$, kde $p \in P$, jest nejmenší kardinální číslo této vlastnosti: Nechť $M \subset P$, $p \in u(M) - M$; pak existuje $M_0 \subset M$ taková, že $p \in u(M_0)$ a $u(M_0) - M_0$ má mohutnost $\leqq \sigma_P(p)$.

10. Dokažte: Nechť Q je prostor vnořený do prostoru P. Nechť $p \in Q$. Pak $\sigma_Q(p) \leqq \sigma_P(p)$.

---

[3]) Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen, Math. Annalen 94 (1925).

11. Na základě konstrukce prostoru R_S, kterou ihned popíši, sestrojte $ABRU$-prostor (6.1, 7.1, 8.3, 8.5) s daným $\sigma_P(p) = \mathfrak{s}$ v bodě p a s $\sigma_P(q)$ jinak vesměs $= 1$ takový, že $\chi_P(p) = 2^{\mathfrak{s}}$.

Pokyn: V níže popsané konstrukci prostoru $P = R_S$ klásti za R prostor I citovaný v 6., kde $\mathfrak{h} = \mathfrak{s}$ a $\mathfrak{a} = 2^{\mathfrak{s}}$, a za S obyčejnou konvergentní posloupnost.

Body prostoru $P = R_S$ budou uspořádané páry (r, s), kde $r \in R$ a $s \in S$. Okolí bodu (r, s) v P se dostanou, jak popíši. Buď U_r okolí bodu r v prostoru R. Ke každému $x \in U_r$ přiřaďme okolí U_s^x bodu s v prostoru S. Pak naše okolí je $\underset{(x,y)}{E}(x \in U_r,\ y \in U_s^x)$.

Pan prof. Čech sestrojil[4]) BN-prostor (8.3, 8.6) $B = \beta(I)$ s topologií u, který má tyto vlastnosti:[5])

a) Množina I má mohutnost $\aleph_0$ a jest $u(I) = B$.

b) Jestli N jest libovolná nekonečná část množiny I, pak prostor $u(N)$ vnořený do B je homeomorfní (11.1) s B.

c) Charaktery bodů (4.2) v B jsou vesměs $\leqq 2^{\aleph_0}$.

d) B má mohutnost $2^{\mathfrak{c}}$ ($\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$).

12. Na základě udaných vlastností prostoru B dokažte existenci bodů $b \in B$ takových, že $\chi_B(b) < \sigma_B(b)$. *Bedřich Pospíšil* (Brno).

---

[4]) On bicompact spaces, Annals of Mathematics, Princeton 1937.

[5]) Poslední dvě vlastnosti prostoru B plynou z mých článků „Sur les caractères des points dans les espaces topologiques", numéro 19, Spisy přírodovědecké fakulty Masarykovy university 1937-38, a „Remark on bicompact spaces", theorem II, Annals of Math., Princeton 1937.