Karel Lerl

K metodice slovných rovnic

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 68 (1939), No. Suppl., D5--D13

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120757

VYUČOVÁNÍ.

K metodice slovných rovnic.

Karel Lerl, Příbor.

Po důkladném procvičení každé skupiny sestavených rovnic přistupujeme k řešení *slovných* rovnic. Jsou to úlohy, kde podmínky pronesené slovy vyjádříme rovnicemi, a tyto pak řešíme. Jednotlivé *fáze řešení* úlohy jsou: α) sestavení rovnice, β) řešení rovnice, γ) výklad a rozbor získaných výsledků a δ) kontrola výpočtu.

Úlohy možno rozděliti ve tři velké skupiny:

I. Úlohy, kde neznámá je vlastně veličinou nějakého vztahu, známého z geometrie, fysiky, atd.

II. Hříčky s uhodnutím myšleného čísla.

III. Slovné rovnice v užším slova smyslu.

I. V první skupině jde o nějaký vztah ať z geometrie, fysiky atd.; dosazujeme tudíž do známého vzorce. Není-li nám tento znám, lze jej *někdy* odvoditi na základě získaných vědomostí, a tím i tento postup je možno považovati za *sestavování rovnic.*

II. V zábavné matematice jsou úlohy, kdy jedna z osob vyzve druhou osobu, aby si myslela číslo, pak postupně nařizuje, co má s myšleným číslem prováděti, zda má nějaké číslo přičísti, odečísti, nějakým číslem násobiti nebo děliti. Po několika těchto krocích táže se první osoba na výsledek, z něhož usoudí na *myšlené číslo.* Z těchto úloh je možno sestaviti rovnice, jejichž úpravou nabudeme jednoduchý tvar. Úlohy ty jsou původu prastarého, najdeme je v řecké, indické aritmetice (*Lilâvati*) a hojně v zábavných matematikách středověkých (na př. *Cl. G. Bachet de Méziriac*, Problèmes plaisants et délectables, qui se font par les nombres, Paris, 1612; III^{e}. éd. 1874). Pro toho, kdo věc nezná, jsou tyto úlohy často překvapením. Když osoba, předkládající úlohy, vyzná se v aritmetice a algebře, může druhé osobě vůbec ponechati volbu postupu, tato musí však toliko svůj postup diktovati. Vyskytnou se obvykle lineární rovnice, někdy i vyšší. Nemusí býti neznámé jen jedno číslo, nýbrž dvě i více. Pak máme soustavu rovnic, již musíme řešiti. Je-li údajů méně než neznámých, vede řešení na neurčité rovnice (diofantické). Ve výsledcích musí se však neznámá vždy vyskytnouti, jinak je chybně rovnice určena. Rovnice bývají pak často uváděny zábavným způsobem, takže má se uhodnouti na př. stáří osoby, určitá karta, počet peněz, počet ok při vrhu kostkami atd.

III. α) Nepřísluší-li úloha do předcházejících skupin, pak podmínky a slovní text, vyřčený v úloze, hledíme vyjádřiti matematickými výrazy a ony výrazy, pro které jest udána rovnost, porovnati. Jinak řečeno, tentýž údaj hledíme vyjádřiti ve více tvarech a porovnáváme. Obtížné je často vyhledati právě onu veličinu, kterou máme považovati za neznámou, a to i z důvodů praktických, neboť nahodilá volba neznámé vede často jednak k obtížím početním, jednak k neschůdnému tvoření a vyjádření některých výrazů. Postup ten pak zoveme *sestavováním rovnice.* Jak záleží na účelné volbě neznámé, ukážeme při výkladu na vhodné rovnici tím, že ji řešíme, či lépe řečeno sestavujeme mnoha způsoby a poukážeme právě na případy, kdy nevhodnou volbou některé tvary jsou i konstruktivně těžké.

Jak později na příkladu bude demonstrováno, lze pro větší názornost použíti schematických obrazů nebo grafické metody vůbec, neboť tím se nám ulehčí postup myšlení při konstrukci výrazů. Jindy podává nám grafické řešení přímo i výsledek. Na střední škole věnujeme se toliko slovným rovnicím lineárním, kvadratickým a zřídka rovnicím stupně vyššího. Nutno zde důrazně podotknouti, že sbírky úloh vůbec neobsahují slovních rovnic transcendentních, ačkoliv by jich život praktický hojně poskytl.

Není nezajímavo poukázati i na rovnice, kde vhodnější volbou lze stupeň rovnice snížiti, výpočet zjednodušiti a tím i třetí fázi postupu, t. j. rozbor výsledků ulehčiti. Další partií je *sestavování systémů rovnic.* Zde je nutno samozřejmě sestaviti tolik nezávislých rovnic, kolik hledáme neznámých, jinak je rovnice resp. soustava rovnic neurčitou nebo přeurčenou, a za zvláštních podmínek vyžaduje též metod svého druhu. Co bylo řečeno o sestavení jedné rovnice, tím více platí o soustavách rovnic, najmě pokud jde o volbu neznámých. Na několika systémech neškodí též ukázati, že vhodnou volbou lze i počet neznámých redukovati.

Zajímavým je též sestavení soustav rovnic goniometrických. Je známo, že na řešení nějakého útvaru (na př. trojúhelníka se zvláštními prvky) lze pohlížeti jako na řešení soustavy rovnic. Z ostatních postupů řešení je tento jaksi nejobtížnější, ale stojí též svou úrovní nejvýše. Při stavbě takové soustavy často obtížně hledáme zbývající rovnici k doplnění soustavy, ačkoliv je samozřejmou. Jindy se zase ukáže, že úloha je neřešitelnou (neúplně daná následkem závislosti dvou veličin nebo přeurčená zakrytým vztahem dvou veličin). Pomocné konstruktivní řešení bývá zde zase dobrým vodítkem k okamžitému poznání situace. Soustavy ty patří svou povahou spíše do první skupiny námi vytčené, ale i zde je nezbytné se o nich zmíniti. Podobně tomu bývá i v úlohách fysikálních, technických a praktických vůbec.

β) Druhá fáze je vlastní řešení sestavené rovnice nebo soustavy. Pro jistotu před řešením si ještě jednou rovnici zkontrolujeme. Zkouška ta může se díti různým způsobem. Někdy provádíme kontrolu jednotlivých výrazů dosazováním za neznámou 1, 2, 3, . . ., jindy použijeme *obecné indukce*. Často již při řešení samém lze předběžně vyloučiti řešení, jež svou povahou (praktickou podstatou) nemají významu. Na př. vede-li úloha k binomické rovnici a řešení jsou toliko reálná; zde nic nepochybíme, používáme-li prostě symbolu pro n-tou odmocninu n-značného, pomocí něhož píšeme na př. $x = \sqrt[3]{\overline{\overline{a}}}$,*) aniž bychom explicite vyjadřovali zbytečné ostatní kořeny, kromě reálného či reálných. Tím má též zavedení dvojího značení pro aritmetickou hodnotu a pro hodnotu n-značnou své odůvodnění. Mnohdy se vyskytnou při řešení kořeny, nevyhovující dané úloze; to jest nám znamením, že pravděpodobně jsme mohli voliti neznámé veličiny mnohem vhodněji a účelněji, a můžeme se pokusiti o lepší konstrukci rovnice nebo soustavy jich novou volbou neznámých. Někdy ovšem již při řešení rovnice musíme přihlédnouti též k výkladu a rozboru nalezených výsledků.

γ) Při úlohách, daných čísly zvláštními, je z povahy výsledků ihned patrno, zda kořen vyhovuje předložené úloze či nikoliv. Jinak je tomu při úlohách obecných; rozborem sice určí se závislost těchto veličin buďto nerovninami nebo vytčením intervalů pro jednotlivé veličiny ($a < x < b$, $c \leqq y < d$), resp. oborů (řešení má býti na př. racionálné); konečně v složitých případech mohou se tato omezení vyskytnouti hromadně, čímž rozbor se stává složitým a velmi zdlouhavým. Když však někdy provedeme rozbor toliko ledabyle a povrchně, zanedbáváme některá řešení a problém tím vlastně ochuzujeme. Jindy dojdeme k výsledkům, které sice na první pohled zdají se vzhledem k textu úlohy protismyslnými, avšak taková řešení mohou nám býti pobídkou v tom směru, že můžeme úlohu pojímati obecněji. Tak na př. některým veličinám dáme širší pojem, nebo mezi veličinami zavedeme obecnější vztahy. Stejně i rozbor — jak výše bylo řečeno — může nám býti jakousi výstrahou, že předložená slovná rovnice dala by se sestrojiti jednodušeji a účelněji. Mohou se zde vyskytnouti i znaky, jež poukazují k tomu, že rovnice byla chybně sestavena; nebo dokonce úloha sama je chybně udána a neřešitelná. Proto důkladné provedení rozboru, jež zakončuje a korunuje naši práci, je velmi důležité.

δ) Jako u jiných rovnic, tak i zde, zvláště když rozborem naskytnou se nám celé skupiny řešení, provádíme *kontrolu*. Kontroly tu však nejdříve provádíme na sestrojených výrazech a nikoliv již v sestavené rovnici, neboť tato může býti chybnou, zkouška by

---

*) Symbol $\sqrt[n]{\overline{\overline{a}}}$ značí nám n hodnot současně.

dopadla kladně, ale výsledky by nehověly předložené slovné rovnici. Při geometrických a zvláště fysikálních rovnicích je též vhodné dosaditi za veličiny jejich rozměry, čímž poznáme, zda rovnice je homogenní a zda výsledek má svůj příslušný rozměr. Tato jednoduchá zkouška je nám často velmi dobrým vodítkem, když jsme pochybili.

O povaze slovných rovnic platí vše to, co o slovných úlohách vůbec. Mají se co nejvíce přimykati k praktickému životu. Hojně se však ve sbírkách vyskytují příklady z řecké a indické matematiky, často přepisované z jedné sbírky do druhé. Ale i ty nejsou nijak na škodu, neboť při nich zase lze přičiniti tu a tam některé poznámky z historie matematiky beztoho tolik v učebnicích dějepisu neprávem zanedbávané. Na počátku jich probírání používáme zhusta a hojně *dotazovací metody* a tímto způsobem zacvičíme též žáky do sestavování rovnic. Otázky pokud možno měníme: kterou veličinu zvolíme za neznámou, jak bude ten nebo onen výraz vyhlížeti, co kdybychom volili za neznámou jinou veličinu atd., zjednoduší se či je rovnice složitější a pod. Učitel při tom ihned pozná, kde žáci váznou, a stačí někdy malá vhodná poznámka, aby se vyvarovali chyb. Není třeba využívati vynalézavosti a bystrosti žáků nejlepších; postačí, obíráme-li se žáky prostředními. Zde se často nejlépe ukáže bystrost žáka slabšího, který překoná houževnatostí a samočinností žáka lepšího; někdy se v tom zračí pevná vůle dojíti k cíli. Jako všude, tak i zde samozřejmě vycházíme od nejjednoduššího a požadavky opatrně stupňujeme. Vzpomeňme jenom množství chyb, jež jsou důsledkem špatného překladu slovného vyjádření do vyjádření algebraického. Počátečníci, jsou-li tázáni na číslo, které je o 3 větší než x, odpovídají $3x$. Typickým je pak vypsání podmínky „x je o 3 větší než y“. Obvykle píší $x + 3 = y$, místo správného $x = y + 3$. Běžné obraty jsou žákům známé již ze slovných úloh. Připomínky, učiněné v předcházejících soustavách, ukážeme na vhodně volených úlohách.

1. Začínáme s příklady, kde máme jednoduché výkony mezi násobky a díly neznámé, ty pak se rovnají konstantě nebo nějakému výrazu, který zde porovnáme. Uveďme na př. „náhrobní desku Diofantovu“; nápis na jeho legendárním náhrobku zněl:

Náhrobek kryje tu Diofanta, zázrak to k podívání;
kámen tě o jeho stáří uměním mrtvých poučuje.
Životodárce bůh šestinu věku mu popřál hošíkem býti,
nežli pak tvář mu dal ochmýřenou, dvanáctina zas uplynula.
Po nové sedmině let svatební ohně mu jasně vzplály,
synem pak obdařil jej po pěti letech zas bůh.
Běda ti však, ty pod hvězdou nešťastnou narozený,
Hades tě serval se stromu žití dřív, nežli půl otcova věku jsi měl.
Po čtyři leta pak bolest svou utápí v mystice čísel
nešťastný otec, by v přístavu žití pak Hadu se vzdal.

Sestavená rovnice zní $\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x$, z čehož plyne $x = 84$.

2. Důležitá je skupina o číslech, kde číslo se vyjádří mnohočlenem; jsou to úlohy vedoucí buďto k lineární rovnici nebo jejich soustavě. Jindy výsledek plyne porovnáním koeficientů u stejných mocnin 10 v sestavené rovnici, čímž získáme jednotlivé číslice. Konečně mnohdy získáme rovnici, jež je na prvý pohled neurčitou, avšak jednoduchá úvaha skýtá nám neznámé číslice. Je pochopitelné, že mnohé z těchto úloh jsou mnohoznačné. Na př.: Je doplniti číslo 4*18*, kde hvězdičky značí nám neznámé číslice, víme-li, že číslo je dělitelno 101. Jest

$$(80 + y) + 4 - (10x + 1) = 101k,$$

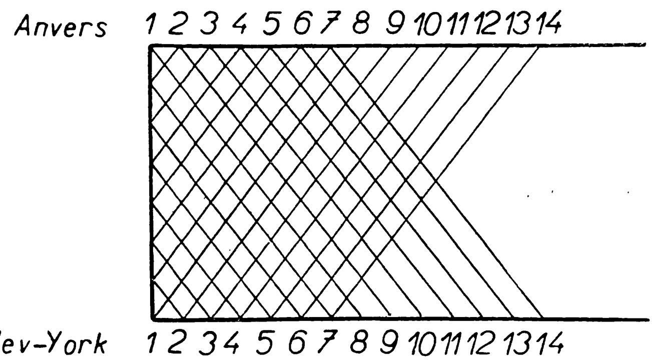
z čehož

$$y = 101k - 83 + 10x.$$

Je patrno, že veličině k lze dáti toliko hodnotu 0, abychom získali $0 \leqq y < 10$; tedy $x = 9$, $y = 7$.

Úlohy ty hojně se vyskytují v zábavných matematikách; obzvláště budiž doporučena kniha *B. Niewenglowskiho,**) kde čtenář se setká se základy číselné teorie, podané formou elementární.

3. Výše bylo řečeno, že často se uchylujeme k nějakému grafickému znázornění, čímž někdy přímo získáme výsledek. Jsou to obvykle úlohy o pohybu, a proto jednu typickou uvedeme:**)



„Každého dne v poledne vyjíždí z Anvers do New Yorku dopravní loď, a stejně v touž dobu z New Yorku do Anvers. Doba cesty je přesně 7 dní. Kolik dopravních lodí potká loď z New Yorku?“

*) B. Niewenglowski, Questions d'arithmétique.

**) *M. Kraitchik,* La mathématique des jeux ou récréations mathématiques, p. 29.

Grafickým řešením získáme 13, 14 nebo 15 podle toho, počítáme-li setkání též v obou jmenovaných přístavech (viz obr.).

4. Kde závislosti ve výstavbě rovnice jsou složité, nutno se pokusiti o různou volbu neznámé a pak jednotlivé výrazy porovnati. Stejně získané rovnice srovnáváme a volíme tu nejjednodušší. Užijeme-li čísel obecných, nutno provésti i náležitou diskusi. Na př.

„Kdosi, tázán po stáří, odpověděl: Nyní je mně a-krát tolik jako synovi, za n let bude mi však b-krát tolik, kolik synovi. Kolik let bylo otci?"

Je-li synovi x let, je otci ax roků, po n letech je synovi $x + n$ a otci $ax + n$ let, ale tento věk otcův je b-krát větší než věk synův, tedy

$$ax + n = b\,(x + n),$$

z čehož

$$x = \frac{n\,(b - 1)}{a - b}$$

a otec má $\dfrac{an\,(b - 1)}{a - b}$ let. Má-li býti řešení možné, musí $b > 1$, $a > b$.

5. Kdy nemají všechny kořeny význam. Na př. „Ze stanice po drahách k sobě kolmých vyjedou dva vlaky s rychlostmi c, c'; kdy jsou od sebe vzdáleny o d?

Jest $(cx)^2 + (c'x)^2 = d^2$, z čehož $x = \pm \dfrac{d}{\sqrt{c^2 + c'^2}}$. Zde zřejmě druhý kořen nemá význam. Tak je tomu v mnohých úlohách, zvláště fysikálních.

6. Budiž dán též jednoduchý příklad, jak lze i při zdánlivě nemožných výsledcích někdy slovnou rovnici zobecniti. Na př. „Dvě tělesa pohybují se současně z bodů A a B týmž směrem přímočaře a rovnoměrně. Je-li bod A o d metrů za B, a pohybuje-li se první těleso rychlostí c, druhé c' (v m/sec), za jakou dobu a ve které vzdálenosti od prvního bodu se tělesa setkají?"

Nazveme-li počet časových jednotek, jež uplynou do setkání obou těles x, vykoná první dráhu cx m, druhé $c'x$ m; ježto na počátku byla vzdálenost obou těles d m, vykonalo první o d m větší dráhu, tedy $cx - c'x = d$, z čehož $x = \dfrac{d}{c - c'}$, t. j. za $\dfrac{d}{c - c'}$ jednotek časových se tělesa setkají. Jelikož těleso pohybující se z A pohybuje se rychlostí c po dobu $\dfrac{d}{c - c'}$, vykoná dráhu $\dfrac{cd}{c - c'}$, a v této vzdálenosti od bodu A se tělesa setkají.

Rozbor. α) Pokud $c - c' > 0$, tedy $c > c'$, je x kladné a udává určitou dobu, ve které se tělesa setkají.

β) Kdyby $c - c' = 0$, tedy $c = c'$, je řešení úlohy nemožné, neboť tělesa by se setkala v době nekonečně velké, t. j. nikdy, jsouce při stejné rychlosti stále od sebe vzdálena o d m.

γ) Pro $c - c' < 0$, t. j. $c < c'$, je $x = \frac{d}{c - c'} = -\frac{d}{c' - c}$ záporné.

Výsledek ten je hledíc k doslovnému znění úlohy nemožný. Nemožnost řešení úlohy v tomto znění vysvitá také odtud, že těleso zadní o menší rychlosti nejen nemůže přední dohoniti, ale zůstává stále více a více pozadu. Avšak můžeme položiti otázku obecněji takto: Pohybují-li se dvě tělesa stejnoměrně týmž směrem po přímce majíce rychlosti první c a druhé c', a je-li v jistém okamžiku vzdálenost jejich d m, za kolik časových jednotek by se vůbec setkala? — Pak má negativní výsledek $x = -\frac{d}{c' - c}$ ten význam, že se tělesa nesetkají po onom okamžiku, když jejich vzdálenost je d m, ale že se byla setkala tolik časových jednotek před tímto okamžikem.

7. Někdy sestavení rovnice zase skýtá velké obtíže, jež jsou zaviněny tím, že podmínky v textu vyslovené jsou vždy závislé na předcházejících podmínkách, a je tedy třeba v prvé řadě vhodně voliti neznámou. Závislost ta se někdy stává dosti složitou. Často nutno použíti i obecné indukce nebo různých obratů z kombinatoriky.

Uveďme si tento příklad: „Město má podobu čtverce, jehož každá strana jest opatřena branou s mýtem. Mýtné se platí jak při vstupu v obnose a Kč, tak při východu z města v částce b Kč. Jistý venkovský občan vstoupil do města všemi branami a po každém vstoupení do města utratil tam polovinu svých peněz. Naposledy mu zbylo m Kč. Kolik měl před prvním vstupem do města?“

Původně měl x peněz, při prvním vstupu $x - a$, utratil $\frac{x-a}{2}$ a odešel, tedy zbylo mu $\frac{x-a}{2} - b$. Při druhém vstupu $\frac{x-a}{2} - b - a$, utratil $\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{2} - b - a\right)$ a když se vrátil měl $\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{2} - b - a\right) - b$. Při třetím vstupu $\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{2} - b - a\right) - b - a$, utratil atd. Vidíme, že výrazy stávají se více a více složitější. Lépe je pokračovati opačně od konce, abychom získali žádanou veličinu.

Uveďme si ještě složitější příklad. *A. Rebière* ve své knize*) uvádí praktickou úlohu. „Podle zák. čl. 757 civilního francouzského práva nemanželské dítě má právo na třetinu podílu z dědictví, jaké by mělo, kdyby bylo legitimní. Podle toho jest rozděliti pozůstalost osoby, jež zanechává l dětí legitimních a n dětí nemanželských.“ Odpověď podal známý matematik *Catalan*, jenž nalezl pro legitimní dítě, je-li jmění položeno rovno jedné, výraz

$$D_{l,n}^{l} = \frac{1}{l} - \frac{n}{3l(l+1)} + \frac{n(n-1)}{3^2 l(l+1)(l+2)} - \dots$$

$$\dots + (-1)^n \frac{n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{3^n l(l+1)(l+2)\dots(l+n)}.$$

Na tomto příkladě je patrné, jak úvaha se stává složitou, jde-li o obecné vyjádření a různá konstrukce jeho stává se nepřehlednou. Můžeme psáti:

$lD_{l,0}^{l} = 1,$

$lD_{l,1}^{l} = 1 - D_{l,1}^{n};$

$lD_{l,2}^{l} = 1 - D_{l,1}^{n}(1 - D_{l,2}^{n});$

$lD_{l,3}^{l} = 1 - D_{l,1}^{n}[1 - D_{l,2}^{n}(1 - D_{l,3}^{n})];$

$lD_{l,4}^{l} = 1 - D_{l,1}^{n}\{1 - D_{l,2}^{n}[1 - D_{l,3}^{n}(1 - D_{l,4}^{n})]\};$

$lD_{l,5}^{l} = 1 - D_{l,1}^{n}\langle 1 - D_{l,2}^{n}\{1 - D_{l,3}^{n}[1 - D_{l,4}^{n}(1 - D_{l,5}^{n})]\}\rangle;$ atd.

8. Zvláštním druhem slovných rovnic jsou rovnice z řad aritmetických a geometrických. Abychom zodpověděli otázku, na jaké základní úlohy se tyto rovnice redukují, všimněme si nejdříve při řadách aritmetických obou základních formulí

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \quad s_n = \tfrac{1}{2}n(a_1 + a_n),$$

v nichž se vyskytuje celkem pět veličin a_1, a_n, d, n, s_n. Může nám zde celkem vzniknouti deset základních úloh, a to:

jest dáno:

a_1, d, n	a_1, d, s_n	a_1, a_n, s_n	n, a_n, s_n
a_1, d, a_n	a_1, n, s_n	d, a_n, s_n	
a_1, n, a_n	d, n, s_n		
d, n, a_n			

a hledá se:

a_n, s_n	n, a_n	d, n	a_1, d
n, s_n	d, a_n	a_1, n	
d, s_n	a_1, a_n		
a_1, s_n			

Při jejich řešení docházíme k rovnicím lineárním a kvadratickým;

*) *A. Rebière,* Mathématiques et mathématiciens, str. 502.

ve slovných úlohách dávají vyslovené podmínky často popud k vyšším rovnicím. Omezení v základních úlohách jest obecně toliko pro n, jež má býti číslem přirozené řady číselné.

Pro řady geometrické máme ze základních vzorců

$$a_n = a_1 q^{n-1}, \quad s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

obdobně deset základních úloh, ale na rozdíl vyskytnou se úlohy (na př.

$$\left.\begin{matrix} a_1, n, s_n \\ a_n, n, s_n \end{matrix} \text{ a jest nalézti } \begin{matrix} q, a_n \\ q, a_1 \end{matrix}\right),$$

které vedou k rovnicím vyšším (stupně $n - 1$), tedy obecně neřešitelným. Často však v úlohách mají význam toliko kořeny s jistým omezením (na př. kořeny reálné). Je třeba ještě vysvětliti tu okolnost, že při řešení geometrických řad se vyskytly rovnice vyšších stupňů, čímž byla porušena analogie mezi oběma druhy řad. Analogie zůstává toliko mezi obecnými členy $a_n = a_1 + (n - 1)\, d$, $a_n = a_1 q^{n-1}$, kde pouze stupeň početních výkonů u geometrických řad jest o jednotku zvýšen. Je na místě otázka, proč taková analogie není mezi součty oněch řad. Utvořme místo součtu $s_n = \frac{1}{2} n\, (a_1 + a_n)$ součin členů; pak máme

$$p_n = a_1 \,.\, a_1 q \,.\, a_1 q^2 \,.\, \ldots \,.\, a_1 q^{n-1} = a_1{}^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} = (a_1 \,.\, a_1 q^{n-1})^{\frac{1}{2}n} = (a_1 \,.\, a_n)^{\frac{1}{2}n}.$$

Kdybychom tedy uvažovali u geometrických řad místo součtu součin jejich členů, byla by zmíněná nehomogenita zcela odstraněna. Při geometrických řadách lze u konvergentních řad uvažovati dále s_∞. Přibráním s_∞ a p_n (resp. p_∞, existuje-li) se počet základních úloh velmi zvětší proti řadám aritmetickým.

9. Bylo již řečeno, že hlavně při fysikálních úlohách dbáme na rozměry a že nehomogenost rovnice často upozorní na chybu v sestavení. Důsledné používání rozměrů má mnohý význam; jednak žáci více dbají, aby za veličiny téhož druhu dosazovali hodnoty řádově stejné, jednak je jim to dobrou průpravou k fysikálnímu vyučování ve vyšších třídách, kde mají odvozovati rozměry jednotlivých veličin nebo jednotek, jež jsou v magnetismu a elektřině složité. Na př. „Jest odvoditi rozměr magnetického množství.“ Dosadíme-li do Coulombova zákona $f = c \frac{m_1 m_2}{r^2}$ rozměry známých veličin a položíme-li $m_1 = m_2 = m$, jest

$$[m^2] = [m]^2 = \frac{\text{g cm}}{\text{sec}^2} \,.\, \text{cm}^2, \text{ tedy } [m] = \text{g}^{\frac{1}{2}} \, \text{cm}^{\frac{3}{2}} \, \text{sec}^{-1}.$$

Těmito několika malými poznámkami zakončujeme. Čtenář si jistě sám najde vhodné další příklady.