Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Eduard Čech

Kombinatorika a počet pravděpodobnosti na středních školách

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 68 (1939), No. Suppl., D197--D206

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120733

VYUČOVÁNÍ.

Kombinatorika a počet pravděpodobnosti na středních školách.

Eduard Čech, Brno.

Tento článek vznikl z několika přednášek, které jsem měl v Brně, z jedné přednášky, kterou jsem měl v Praze, a z řady rozmluv s brněnskými středoškolskými profesory. Doufám, že také mimobrněnští profesoři v něm naleznou podněty k přemýšlení.

Pro přehlednost a usnadnění diskuse je článek rozdělen v řadu očíslovaných odstavců.

B znamená knihu: Boh. Bydžovský, St. Teplý, Fr. Vyčichlo, Aritmetika pro V.—VII. třídu středních škol (šesté vydání, 1935). **M** znamená knihu: Jindř. Muk, Aritmetika pro vyšší třídy gymnasií, reál. gymnasií a ref. reál. gymnasií (druhé vydání, 1935). **S** znamená knihu: Boh. Bydžovský, St. Teplý, Fr. Vyčichlo, Jan Vojtěch, Sbírka úloh z matematiky pro IV.—VIII. třídu středních škol (čtvrté vydání, 1936).

1. **B** i **M** postupují v kombinatorice podle schematu permutace — kombinace — variace. Myslím, že schema variace — permutace — kombinace je přirozenější logicky i vhodnější didakticky.

1·1. Úlohou kombinatoriky jest určovati počet prvků konečných souborů. To se děje pomocí dvou základních zásad:

(α) Rozložíme-li soubor S na dvě části S_1, S_2 (bez společných prvků), a má-li S_1 prvků n_1, S_2 prvků n_2, pak počet prvků celého souboru S je $n_1 + n_2$.

(β) Rozpadá-li se soubor S v r částí $S_1, S_2, \ldots, S_r$ (tak, že není prvků společných několika částem) a má-li každá část n prvků, pak počet prvků celého souboru S je $r \times n$.

Chtěl bych upozorniti *co nejdůrazněji*, že nikterak nechci doporučovati, aby žáci odříkávali znění zásad (α) a (β), naopak že bych to považoval nejen za *zbytečné* a *bezcenné*, nýbrž i za *škodlivé.* Stačí, když se podstata obou zásad objasní několika dětskými nebo i dětinskými příklady, a zavedou se heslovité názvy, třeba *zásada „plus“* a *zásada „krát“*.

Co je důležité (a ne tak lehké, jak by se na první pohled mohlo zdát), je, aby se žáci naučili *hbitě* a *spolehlivě* rozložiti složitější úkol v několikerou aplikaci obou zásad. Sním-li tři jablka denně, kolik jich sním za čtyři dni? Nepozorné děcko může se lehko dostat na scestí $3 + 4 = 7$ místo $3 \times 4 = 12$, zejména, když úloha, která mu byla předložena, vyžaduje, aby se provedly za sebou tři nebo čtyři úsudky toho druhu. A student, který byl možná v matematice více cvičen v bezduchém memorování vzorců a dosazování nežli v přímém používání zdravého rozumu na úlohy, jejichž smysl si dovede představit, je možná v septimě spíše než v primě nakloněn tomu, aby bezmyšlenkovitě dal *plus* tam, kam patří *krát.*

1·11. Správný začátek kombinatoriky bych viděl v tom, že student nejprve používá přímo pouze elementárních zásad (α) a (β). Později jest ovšem třeba zkrátit postup a používati zásady

(α^*) Rozložíme-li soubor S na části $S_1, S_2, \ldots, S_r$ (tak, že není prvků společných několika částem), a má-li S_1 prvků n_1, S_2 prvků n_2, $\ldots$ S_r prvků n_r, pak počet prvků celého souboru S je

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_r,$$

který vznikne iterací zásady (α) (obecná zásada „plus") a zásady

(β^*) Rozpadají-li se základní soubor S v r_1 souborů prvého druhu (bez společných prvků), každý soubor prvého druhu v r_2 souborů druhého druhu (bez společných prvků), $\ldots$, každý soubor druhu $k - 1$ v r_k souborů druhu k a má-li konečně každý soubor druhu k prvků n, pak počet prvků celého souboru S je

$$r_1 \times r_2 \times \ldots \times r_k \times n,$$

jež vznikne iterací zásady (β) (obecná zásada „krát").

Zásada (α^*) je (při numericky daném r) žákům známa již od dětského věku a z téže doby je jim známo, že zásada (β) je vlastně zvláštní případ ($n_1 = n_2 = \ldots = n_r$) obecné zásady (α^*).

Naproti tomu zásada (β^*) *při obecném* k vyžaduje dobré schopnosti abstraktně myslit, takže bych doporučoval počítati hlavně jen úlohy, ve kterých je k numerické (a malé, $k = 3$ nebo $k = 4$) a pouze v jednoduchých typických případech provésti abstrakci vedoucí k obecnému k.

1·2. Určení počtu variací $V_n^{(k)}$ se ovšem redukuje přímo na použití obecné zásady „krát". Při tom abstrakce od $V_7^{(3)}$ k $V_n^{(3)}$ je zcela jednoduchá a dá se provést ihned, kdežto abstrakce od $V_n^{(3)}$ k $V_n^{(k)}$ je mnohem složitější a nemělo by se s ní spěchat.

1·3. Dovedeme-li určit počet variací $V_n^{(k)}$, pak určení počtu permutací P_n je pouhý *příklad* (ovšem důležitý příklad, který vede k zavedení nového číselného znaku $n!$), neboť $P_n = V_n^{(n)}$. Dvojí abstrakce zdůrazněná v odst. **1·2** jest ovšem důvodem, proč je lépe začít variacemi než permutacemi. Je však ještě jeden neméně dobrý důvod. Když permutacemi kombinatoriku *začneme*, musíme udělat z permutací celý odstavec, kdežto při způsobu, který navrhuji, můžeme permutace probrat za malou chvilku. Mám-li pravdu v tom, že úkolem kombinatoriky jest určovat počet prvků konečného souboru, pak většina úloh o permutacích, které najdeme v **B**, **M** a **S**, nás odvádí od tohoto hlavního úkolu stranou, a zdá se mi mimo diskusi, že při malém počtu hodin matematiky v septimě tato ztráta času, třeba není veliká, přece jen je škodlivá.

1·4. Známe-li už počet variací (tedy speciálně také počet permutací), potřebujeme k určení počtu kombinací pouze umět řešit úlohu typu: Sním-li tři jablka denně, za kolik dní sním dvanáct jablek? Neboť soubor variací má $V_n^{(k)}$ prvků a rozpadá se v části odpovídající jednotlivým kombinacím, z nichž každá má $k!$ prvků. Tedy podle zásady (β) určíme počet $C_n^{(k)}$ kombinací z rovnice

$$V_n^{(k)} = C_n^{(k)} \, . \, k! \tag{1}$$

Oč složitější je cesta, kterou dospívá ke vzorci pro $C_n^{(k)}$ **B** str. 167 a **M** str. 216! Při tom oba mají rovnici (1) (**B** str. 172, **M** str. 222), ale používají jí k tomu, aby našli hodnotu $V_n^{(k)}$, když už známe hodnotu $C_n^{(k)}$, t. j. hledají jednoduché pomocí složitého.

2·1·1. Hodnotu $\binom{n}{k} = C_n^{(k)}$ počítá **M** str. 216 z rovnice

$$C_n^{(k)} = \frac{n - (k - 1)}{k} C_n^{(k-1)}. \tag{2}$$

Z výrazu, k němuž pomocí (2) dospěl, odvozuje pak na str. 217 vzorec

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n - k}{k + 1}. \tag{3}$$

Při tom se rovnice (2) a (3) mezi sebou liší pouze způsobem psaní.

2·1·2. **B** str. 168 upravuje zlomek

$$\frac{n\,(n - 1) \ldots (n - k + 1)}{k!}$$

na tvar

$$\frac{n!}{k!\,(n - k)!}$$

tím, že rozšiřuje (násobí čitatele i jmenovatele) číslem $(n - k)!$ a praví, že tento postup je pro $k = n$ nepřípustný proto, že nulou rozšiřovati nelze. Neběží však o rozšiřování číslem 0, nýbrž číslem $0! = 1$. (Symbol $0!$ je definován o několik řádků níže.)

2·2. **B** i **M** odvozují některé jednoduché vlastnosti znaku $\binom{n}{k}$. Tyto vlastnosti mají průzračný kombinatorický význam, který tvoří jejich důkaz. Místo takového kombinatorického důkazu však udávají autoři důkazy formálně aritmetické, které jednak jsou pro žáky přece jen obtížnější, jednak porušují jednotnost matematické látky v septimě.

2·2·1. Tak vzorec

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \tag{4}$$

který je kombinatoricky úplně samozřejmý, odvozují **B** str. 169 i **M** str. 218 formálním počtem ze vztahu

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}. \tag{5}$$

Ani **B** ani **M** ani **S** neříkají, že (4) znamená toto: Mám-li napsány všecky kombinace třídy 2 z pěti písmen a, b, c, d, e

$$ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de, \tag{6}$$

mohu pod ně rychle napsati kombinace třídy 3 $(= 5 - 2)$

$$cde, bde, bce, bcd, ade, ace, acd, abe, abd, abc$$

tak, že pod každou z dvojic (6) napíšu ta tři z písmen a, b, c, d, e, která se v té dvojici nevyskytují.

2·2·2. Také vzorec

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \tag{7}$$

má ovšem kombinatorický význam, který jej činí zřejmým. Je-li ve třídě vedle profesora ještě 25 žáků a máme-li vybrat ze 26 přítomných 4, pak se $\binom{26}{4}$ možných způsobů rozpadá ve $\binom{25}{4}$ způsobů, jimiž lze vybrat 4 žáky, a z $\binom{25}{3}$ způsobů dalších. Místo této kombinatorické úvahy provádí **B** str. 171 formální počet založený na (5) a **M** str. 218 formální počet založený na (3).

2·2·3. Myslím, že jest účelné prodiskutovati se žáky kombinatoricky také ze sexty známý vzorec

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{(n+1)\,n}{2} = \binom{n+1}{2}. \tag{8}$$

(8) znamená (podle principu (α^*)), že počet všech párů dvou různých čísel vzatých z řady $1, 2, 3, \ldots, n+1$ dostaneme, sečteme-li počet párů, ve kterých je větší číslo $= 2, 3, 4, \ldots, n+1$. Stejným rozkladem souboru všech kombinací podle největšího z čísel kombinaci tvořících dostaneme ovšem při každém k rovnici

$$1 + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \ldots + \binom{k+n}{k} = \binom{k+n+1}{k+1}. \quad (9)$$

Je to jistě žákům přístupnější, nežli odvoditi vzorec (9) indukcí, jak žádá **B** ve cvič. 28 na str. 172 (přesně totéž žádá znovu **S** úloha 2341, str. 135) a cennější, než verifikovat mechanickým dosazováním a upravováním speciální případ, jak žádá na př. **M** v úloze 30 na str. 221.

2·3. Myslím, že není špatné, sestaví-li si žáci Pascalův trojúhelník ještě dříve, než znají vlastnosti (4), (7) a (9), a u každé vlastnosti si hned zjistí, jaký je její význam pro Pascalův trojúhelník a ovšem použijí (7) k prodloužení trojúhelníka.

3·1. Když už se probírá kombinatorika, je na snadě mínění, že by žáci dobře rozuměli *kombinatorickému* důkazu binomické věty. Tedy

$$(a + b)^5 = (a + b)(a + b)(a + b)(a + b)(a + b);$$

součin napravo se dostane sečtením částečných součinů, které mají každý pět faktorů, při čemž je každý faktor buďto a nebo b. Máme tedy částečný součin a^5, částečný součin b^5 a řadu dalších částečných součinů, z nichž každý má některou z hodnot a^4b, a^3b^2, a^2b^3, ab^4, takže

$$(a + b)^5 = a^5 + k_1 . a^4b + k_2 . a^3b^2 + k_3 . a^2b^3 + k_4 . ab^4 + b^5.$$

Lehká úvaha ukazuje, že

$$k_1 = C_5^{(1)},\ k_2 = C_5^{(2)},\ k_3 = C_5^{(3)},\ k_4 = C_5^{(4)}.$$

3·2. **B** ani **M** nedokazují binomickou větu kombinatoricky, nýbrž indukcí. Nechtěl bych tvrdit, že by to samo o sobě bylo nevhodné. [Je-li na to čas, jest ovšem nejlépe, když se to provede oběma způsoby.] Ale proti provedení mám dvě námitky.

3·2·1. Myslím, že nejsrozumitelnější formu má (induktivní) důkaz binomické věty, když se provádí v těsné souvislosti s Pascalovým trojúhelníkem. Žáci znají z dřívějška vzorce

$$\begin{aligned}
(a + b)^0 &= 1,\\
(a + b)^1 &= a + b,\\
(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2,\\
(a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.
\end{aligned}$$

Nyní se upozorní, že koeficienty napravo dávají právě první čtyři řádky u Pascalova trojúhelníka. Abychom dokázali, že týž zjev pokračuje také u vyšších mocnin, stačí jednak si uvědomiti, že víme, jak následující řádek Pascalova trojúhelníka vznikne z předchozího pomocí vzorce (7), jednak si všimnouti, že $(a + b)^{n+1}$ vznikne z $(a + b)^n$ pomocí vzorce

$$(a + b)^{n+1} = a . (a + b)^n + (a + b)^n . b.$$

Je asi nejlépe, když se to provede třeba pro $n = 7$ s úplným vypsáním všech členů, načež žáci sami nahlédnou, že je to postup správný obecně. Provádí-li se důkaz s „obecným" exponentem, mám obavu, že méně nadaným žákům to není dosti jasné.

3·2·2. Poznámce **B** str. 174 a **M** str. 225 by se mohlo rozuměti tak, že se na tomto místě (t. j. při binomické větě) poprvé používá důkazu indukcí. Ve skutečnosti je jen o *slovu* indukce pravda, že se zde poprvé vyskytuje. Důkaz indukcí se v obou knihách vyskytuje mnohem dříve a to několikrát, poprvé **B** str. 5 a **M** str. 9; v obou případech běží o vzorec pro $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2$.

Jest ovšem pravda, že při důkaze binomické věty se poprvé indukce provádí *formálně*, t. j. s obecným n. Ale jednak, jak jsem řekl na konci odst. **3·2·1**, má tato formalisace možná jen ten účinek, že se stane důkaz nesrozumitelnějším, jednak není žádný důvod pro to, aby se formalisovaného tvaru použilo právě v jednom isolovaném případě a dokonce předstíralo, že běží o metodu důkazu, která se zde vyskytuje poprvé (viz **M** str. 225 pod čarou).

3·3. Z binomické věty plyne, že $(1 + x)^n$ je při malém x přibližně rovné $1 + nx$. Tato důležitá věc u **B** je (str. 174 a 175, cvič. 37 a 38), ne však u **M**. Jest ovšem pravda, že se táž věc dá (a to s pohodlnějším odhadem chyby) odvodit také jinak. Žákům je totiž známo z dřívějška, že

$$(1 + x)^n - 1 = [1 + (1 + x) + (1 + x)^2 + \ldots + (1 + x)^{n-1}] \cdot x,$$

a je zřejmé, že při malém x je pravá strana přibližně nx.

4. Myslím, že jsou dobré důvody pro to, aby se po probrání prvých základů kombinatoriky (podle hesel: zásada „plus", zásada „krát", variace, permutace) přešlo hned k základům počtu pravděpodobnosti a teprve za ně umístilo $\binom{n}{k}$ s binomickou větou.

4·1. Co potřebujeme umět z kombinatoriky, abychom mohli řešit úlohy z pravděpodobnosti, třeba ty, které předkládá **M** a **S**, jsou pouze zásady „plus" a „krát" a zdravý rozum, opřený o jasnou představu toho, oč v úloze jde. Pravidlo o pravděpodobnosti úhrnné je konec konců pouze zásada „plus" v jiném tvaru a stejně je tomu s pravidlem o pravděpodobnosti složené (**M** říká složité, což se mi zdá nevhodné*) a zásadou „krát". Vsunou-li se mezi dvě tak příbuzné věci úvahy zcela jiného druhu (a zejména když se, jak jsem vytýkal v odst. **2·2**, při studiu $\binom{n}{k}$ kombinatorické pojetí odsune úplně stranou), pak se zcela zbytečně hřeší proti zřejmým didaktickým principům.

---

*) A odporuje schválenému názvosloví. (*Pozn. redakce.*)

4·2. Znáti $\binom{n}{k}$ není třeba ani v jediné z úloh o pravděpodobnosti, které má **M**. Příklad 3 na str. 229 je jen zdánlivou výjimkou. Předně, když táhnu ty tři koule *za sebou*, ne *současně* (oboje dává ovšem stejnou pravděpodobnost), nepotřebuji vůbec znát počet kombinací, nýbrž pouze počet variací. Za druhé se celá úloha pomocí zásady „krát" a zdravého rozumu rozřeší srozumitelněji a méně uměle, než pomocí $\binom{n}{k}$.

4·3. Proti návrhu, který činím v odst. **4**, lze ovšem namítnout, že $\binom{n}{k}$ potřebujeme při výpočtu pravděpodobnosti opakovaných zjevů (**B** odst. 11, str. 184—187).

4·3·1. **M** tuto partii prostě vynechává, jelikož patrně soudí, že na to není času. Takový úsudek jest ovšem zajisté opřen o učitelskou zkušenost, které nemám, takže nemohu tvrdit, že není oprávněný. Přes to se domnívám, že trochu času by se dalo získat vynecháním úplně bezvýznamných příkladů o permutacích (viz odst. **1·3**), a další čas by se získal, kdyby se trochu krotila rovnicová manie (viz třeba **M** str. 223, úloha 7b). Je třeba, aby také u nás konečně pronikl ne již zrovna nový poznatek, že formální algebraický výcvik je tím bezcennější, čím je vypěstěnější, je-li pěstěn na úkor výcviku v dovednosti používati zcela jednoduché algebry na úlohy předložené v nealgebraickém tvaru. Ostatně i ten, kdo má o rovnicích zcela jiné názory než já, musí uznati, že v septimě může svůj hlad po rovnicích uspokojiti v analytické geometrii v míře zcela dostatečné.

4·3·2. Na námitku vyslovenou v odst. **4·3** odpovídám tímto návrhem. V prvém pololetí nechť se věnuje několik prvých hodin *nejjednodušší* (viz odst. **4**) kombinatorice, načež by se probíraly základy počtu pravděpodobnosti (bez pravděpodobnosti opakovaných zjevů) až do konce pololetí.

Ve druhém pololetí by přišlo na řadu $\binom{n}{k}$ a binomická věta. Možná, že žáci, kteří již znají základy počtu pravděpodobnosti, budou pro tuto látku lépe připraveni než dosud. Vždyť jednotlivá čísla řádku

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}.$$

Pascalova trojúhelníka udávají právě počty případů při rozkladu všech 2^n možných výsledků n-násobného hození mince podle toho, kolikrát padl líc. Rekurentní vytvoření následujícího řádku Pascalova trojúhelníka z řádku předchozího je při tomto nazírání zvláště názorné. Také kombinatorický důkaz binomické věty (viz odst. **3·1**) se možná stane názornějším, sdružíme-li u každého faktoru $a + b$ v mysli a s jedním a b s druhým možným výsledkem hození mince.

Po probrání $\binom{n}{k}$ a binomické věty zbude — myslím — pak ještě čas na probrání pravděpodobnosti opakovaných zjevů. O této partii však se na tomto místě nehodlám šířiti. Poznamenávám pouze mimochodem, že úloha **S** 2404 (str. 139) jest asi nevhodná, protože se v ní přehlížejí ta n, u kterých je m/n přesně rovné pravděpodobnosti.

5. V počtu pravděpodobnosti soudím, že postup, kterým se řídí obě naše učebnice, má tu základní vadu, že se budí dojem, jakoby mezi pravděpodobností *a priori* a pravděpodobností *a posteriori* byla mnohem větší propast, nežli tomu je ve skutečnosti. **M** (str. 227 a 228) tvrdí, že případy, kdy jednotlivé zjevy nejsou stejně pravděpodobné, *nemohou* býti předmětem počtu. Pak by ovšem i normální distribuce byla mimo dosah počtu pravděpodobnosti.

Myslím, že se dá zmíněná propast snadno překlenouti tím, že se už pravděpodobnost a priori zavede také empiricky. Jakýsi náznak toho druhu najdeme u **B** str. 176, kde stojí psáno toto. Při 1800 vrzích kostkou byla získána tato čísla:

Číslo:	1	2	3	4	5	6
padlo:	299	296	302	306	292	305krát.

Autor zřejmě netuší, jak úžasně nepravděpodobný je tak „dobrý" souhlas teorie se skutečností.

5·1. Ve dnech 22. XII. 1938 a násl. jsem si provedl pokus, jehož výsledky zde uvádím v předpokladu, že by se mělo zkusit, jaké výsledky by měl pokus tohoto druhu ve skutečné učitelské praxi.

Představoval jsem si, že mám třídu se dvaceti žáky. Každý z mých imaginárních žáků si (před probíráním počtu pravděpodobnosti) doma hodil padesátkrát třemi kostkami (červenou, modrou a černou). Žáky jsem rozdělil v deset skupin po dvou, a každý žák si sestavil na tvrdém papíře do čtverce tabulku všech 10×10 výsledků 2×50 hodů svých a svého kamaráda. (Každý výsledek je zapsán trojciferným číslem. Na př. 324 znamená, že padla trojka na červené, dvojka na modré a čtyřka na černé kostce.) Máme tedy celkem 1000 výsledků na deseti parciálních tabulkách po 100 výsledcích, a každou tabulku máme (pro kontrolu počtu) ve dvou exemplářích.

Ježto žáci existovali pouze v mé fantasii, provedl jsem ovšem všech 1000 hodů sám. (Vzhledem k násl. příkladu XVII jsem provedl o jeden hod více.)

5·2. Nyní jsem volil různými způsoby náhodný zjev, jak to hned popíši. V každém případě udávám

(a) teoretickou pravděpodobnost (na tři desetinná místa), t. j. poměr počtu případů příznivých k počtu případů možných,

(b) kolikrát zjev nastal v jednotlivých stovkách pokusů,

(c) kolikrát nastal zjev celkem při všech 1000 pokusech.

Zjev I. *Všecka tři čísla jsou sudá.*
(a) 0,125, (b) 17, 15, 6, 9, 9, 12, 14, 15, 8, 10, (c) 115.

Zjev II. *Všecka tři čísla jsou lichá.*
(a) 0,125, (b) 12, 12, 14, 15, 18, 12, 13, 12, 17, 20, (c) 145.

Zjev III. *Přesně jedno ze tří čísel je liché.*
(a) 0,375, (b) 33, 40, 40, 38, 41, 37, 33, 32, 47, 22, (c) 363.

Zjev IV. *Přesně jedno ze tří čísel je sudé.*
(a) 0,375, (b) 38, 33, 40, 38, 32, 39, 40, 41, 28, 48, (c) 377.

Zjev V. *Všecka tři čísla mají stejnou paritu.*
(a) 0,250, (b) 29, 27, 20, 24, 27, 24, 27, 27, 25, 30, (c) 260.

Zjev VI. *Padne aspoň jedna šestka.*
(a) 0,421, (b) 50, 47, 39, 35, 45, 48, 37, 48, 45, 48, (c) 442.

Zjev VII. *Šestka padne aspoň dvakrát.*
(a) 0,074, (b) 10, 16, 9, 6, 8, 12, 6, 4, 7, 9, (c) 87.

Zjev VIII. *Tři šestky.*
(a) 0,004, (b) 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, (c) 5.

Zjev IX. *Tři jedničky.*
(a) 0,004, (b) 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 2, (c) 9.

Zjev X. *Tři dvojky.*
(a) 0,004, (b) 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, (c) 1.

Zjev XI. *Tři trojky.*
(a) 0,004, (b) 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, (c) 2.

Zjev XII. *Tři čtyřky.*
(a) 0,004, (b) 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, (c) 2.

Zjev XIII. *Tři pětky.*
(a) 0,004, (b) 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, (c) 3.

Zjev XIV. *Všecka tři čísla jsou stejná.*
(a) 0,028, (b) 3, 0, 2, 6, 3, 2, 2, 1, 0, 3, (c) 22.

Zjev XV. *Všecka tři čísla jsou nestejná.*
(a) 0,556, (b) 61, 53, 51, 59, 50, 45, 57, 51, 56, 56, (c) 539.

Zjev XVI. *Na červené kostce padne méně než na modré a na modré padne méně než na černé.*
(a) 0,093, (b) 9, 13, 7, 9, 9, 2, 10, 11, 8, 5, (c) 83.

Zjev XVII. *Žádné z čísel, které padnou, nepadne (ani na jiné kostce) znova při následujícím hodu.*
(a) 0,209, (b) 21, 26, 18, 23, 18, 25, 16, 19, 17, 19, (c) 202.

5·3. Počet všech možných případů jest u všech uvedených zjevů (mimo podstatně složitější zjev XVII., který teď pusťme z mysli) roven $6^3 = 216$, takže potřebujeme k výpočtu zlomku (a) pouze určit počet příznivých případů. Toto určení provedou žáci (kteří dosud o pravděpodobnosti nic nevědí) jistě u většiny udaných zjevů bez nesnází; u několika zjevů bude snad třeba, aby učitel vedl diskusi. Počet (b) spočítá každý žák na své tabulce; ježto vždy dva žáci mají stejnou tabulku, máme nutnou kontrolu. Počet (c) pak spočítají všichni žáci.

Myslím, že takové nebo podobné zahájení počtu pravděpodobnosti, při němž žáci si vlastními pokusy získají správnou představu o empirickém významu pravděpodobnosti, má mimo jiné tu výhodu, že se vzbudí zájem, který je nutnou složkou úspěchu. Snažil jsem se (pokud je to bez praktického provedení možné) navrhnouti takový postup, který by si nevyžádal příliš mnoho času. Zejména upozorňuji (a považuji za účelné), že každý z mých imaginárních žáků házel pouze padesátkrát a u každého zjevu počítal četnost pouze u sta daných případů, že teprve spojením výsledků celé třídy se dospělo k souhlasu mezi teorií a praksí, a že se u všech zjevů vystačilo s jedinou tabulkou. Experiment toho druhu se může podařit jen, když není příliš pracný; přeháněním by se došlo k pravému opaku toho, co se zamýšlelo.

6. Vylíčil jsem právě, jak bych si představoval *začátek* vyučování počtu pravděpodobnosti. Měl jsem původně v úmyslu, napsati ještě řadu poznámek o dalším průběhu tohoto vyučování. Zdá se mi však, že bude prozatím lépe, vyčkám-li napřed úsudku profesorů samých o podnětech, které jsem dosud sepsal. Budou-li profesoři toho mínění, že četba tohoto článku jim umožnila vyučování zlepšit, a budou-li si to přát, milerád přijdu s dalšími pokyny.

Kartotéka příkladů z matematiky, fysiky a deskriptivní geometrie a popisů fysikálních pokusů.

Dr. **Kliment Šoler,** učitelský ústav, Čes. Budějovice.

Mladším profesorům, zejména těm, kteří učí prvým rokem, se doporučuje, aby si učebný plán pro jednotlivé hodiny připravovali alespoň pro začátek písemně. Důležité jest to zejména v matematice, kde učitel při výkladu píše neb kreslí na tabuli, takže musí míti látku a celý postup dobře připraven, aby výklad podal plynule. Při přípravě jde jednak o myšlenkový postup při výkladu nové látky, o procvičení této látky na vhodných příkladech a při dalších hodinách o její zopakování a prohloubení na příkladech přiměřeně obtížnějších.

Většina středoškolských učitelů v prvních letech své činnosti tímto způsobem skutečně postupuje. Často si však tuto přípravu