Literatura

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 68 (1939), No. Suppl., D31--D44

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/120731`

LITERATURA.

A. Recense vědeckých publikací.

V. Volterra-B. Hostinský, Opérations infinitésimales linéaires. Applications aux équations différentielles et fonctionnelles. Paris 1938, VII + 238 p.

1. Po myšlenkové stránce jest tato kniha rozdělena ve dvě části, z nichž první obsahuje kapitoly I.—XV. a tvoří asi tři čtvrtiny celého rozsahu a druhá obsahuje zbývající kapitoly XVI.—XVIII.

2. První část jest překladem dvou starších pojednání p. V. Volterry: Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari (Memorie della Società Italiana delle Scienze, 3e s., t. VI, Parte prima, 1887; 3e s., t. XII, Parte seconda, 1902) s několika nepodstatnými obměnami a doplňky. V podstatě jde zde o studium dvou operací v oboru čtvercových regulárních matic, jejichž prvky jsou funkcemi jedné anebo několika proměnných, kteréžto operace odpovídají derivování po př. diferencování a integraci funkcí v obvyklém slova smyslu. (Srov. referát v knize: C. C. Mac Duffee, The theory of matrices, Berlin, 1933, str. 102—103.)

Nechť $S(x)$ jest čtvercová regulární matice, jejíž prvky jsou funkcemi proměnné x a mají v určitém čísle x derivace. Pak existují limity

$$\frac{\mathrm{d}S(x)}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \{S(x + \Delta x)\, S(x)^{-1} - I\},$$

$$S(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \{S(x)^{-1} S(x + \Delta x) - I\},$$

(I značí jednotkovou matici) a definují levou po př. pravou derivaci matice $S(x)$ v čísle x; infinitesimální matice $\mathrm{d}S(x) = S(x + \mathrm{d}x)\, S(x)^{-1}$, $S(x)\,\mathrm{d} = S(x)^{-1} S(x + \mathrm{d}x)$ jsou t. zv. levý po př. pravý diferenciál matice $S(x)$ v čísle x. Podobně se definují parciální derivace a diferenciály matic, jejichž prvky jsou funkcemi několika proměnných. — Nechť prvky matice $S(x)$ jsou ohraničené funkce v intervalu $\langle a, b\rangle$ a mají v tomto intervalu integrál ve smyslu Riemannově. Nechť $\langle a = a_0, a_1, \ldots, a_m = b\rangle$ značí dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ a x_r libovolné číslo z intervalu $\langle a_{r-1}, a_r\rangle$; nechť $T_r = I + (a_r - a_{r-1})\, S(x_r)$ a nechť

$$A_m = T_m T_{m-1} \ldots T_1,\quad A'_m = T_1 T_2 \ldots T_m.$$

Pak existují $\lim A_m$, $\lim A'_m$, když $m \to \infty$ a délky jednotlivých intervalů $\langle a_{r-1}, a_r\rangle$ konvergují k nule, a tyto limity definují levý po př. pravý integrál matice $S(x)$ v mezích $\langle a, b\rangle$. — Význam těchto pojmů a jiných s nimi souvisejících (na př. pojmu derivací matice, jejíž prvky jsou analytické funkce komplexní proměnné, křivkového integrálu matice a pod.) jest v tom, jednak, že jsou základem ucelené teorie, která jest obdobná klasickému infinitesimálnímu počtu a teorii analytických funkcí, jednak, že jsou v úzké souvislosti s klasickou teorií diferenciálních rovnic. Tak na př. ve zmíněné teorii jsou úplné obdoby vět o vztahu mezi integrálem a primitivní funkcí, o integraci totálního diferenciálu, o Cauchyově větě o analytických funkcích, o větě o residuích, o větách o Abelovských integrálech a pod. Souvislost s teorií lineárních diferenciálních rovnic může býti osvětlena na př. touto větou: Každý sloupec levého integrálu v mezích $\langle a, x\rangle$ matice $\{a_{ik}(x)\}$ n-tého řádu jest integrálem systému lineárních diferenciálních rovnic

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) \cdot y_j$$

a těchto n integrálů tvoří fundamentální systém, který se pro $x = a$ redukuje na jednotkovou matici.

3. Druhá část knihy jest věnována úvahám o funkčních lineárních transformacích, t. j. transformacích $g = S(f)$, které každé na př. spojité funkci $f(x)$ přiřazují spojitou funkci $g(x)$ a funkci $a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)$ funkci $a_1 S(f_1) + a_2 S(f_2)$, ať a_1, a_2 jsou jakékoli konstanty. Podrobně jsou studovány funkční lineární transformace tvaru

$$g(x) = f(x) + \int_a^b K(x, y, u)\, f(y)\, \mathrm{d}y, \quad g(x) = \int_a^b K(x, y, u)\, f(y)\, \mathrm{d}y,$$

při čemž $K(x, y, u)$ značí spojitou funkci proměnných x, y, u; jsou to t. zv. transformace druhé po př. první třídy. Úvahy této části jsou ovšem v souvislosti s Fredholmovou teorií integrálních rovnic a pocházejí z valné části od p. B. Hostinského. Myšlenkově souvisí tato druhá část s první obdobným tvořením pojmů, při čemž funkční lineární transformace jest obdobou lineární substituce a funkce $K(x, y, u)$ zastupuje matici $S(u)$. Jest to jakýsi přechod od nespojitých indexů k spojitým proměnným.

Při transformacích druhé třídy jest východiskem definice součinu dvou transformací $\{K(x, y, u)\}$, $\{K(x, y, v)\}$ daná vzorcem

$$\{K(x, y, v)\}\{K(x, y, u)\} =$$
$$= \{K(x, y, v) + K(x, y, u) + \int_a^b K(x, z, v) . K(z, y, u)\, \mathrm{d}z\},$$

který se obdrží postupným složením dvou takových transformací, a definice transformace inversní $\{N(x, y, u)\}$, jejíž existence jest za určitých předpokladů o funkci $K(x, y, u)$ zaručena Fredholmovou teorií:

$$f(x) = g(x) + \int_a^b N(x, y, u)\, g(y)\, \mathrm{d}y.$$

Když $K(x, y, u)$, $\dfrac{\partial K(x, y, u)}{\partial u}$ jsou spojité, existují limity

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{1}{\Delta u} \{K(x, y, u + \Delta u)\}\{N(x, y, u)\},$$

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{1}{\Delta u} \{N(x, y, u)\}\{K(x, y, u + \Delta u)\}$$

a definují levou po př. pravou derivaci transformace $\{K(x, y, u)\}$. Opět obdobně s maticemi se dá definovati levý po př. pravý integrál transformace $\{K(x, y, u)\}$ a sice jako limita součinu m určitých transformací, když $m \to \infty$. Ukazuje se, že na př. levý integrál $\{\Psi(x, y, s, t)\}$ v mezích $\langle s, t\rangle$ hoví funkční rovnici

$$\Psi(x, y, s, t) = \Psi(x, y, s, u) + \Psi(x, y, u, t) + \int_a^b \Psi(x, z, u, t)\, \Psi(z, y, s, u)\, dz.$$

V případě funkčních transformací první třídy jsou úvahy rozdílné od předešlých proto, že obecně k takové transformaci neexistuje transformace inversní. Integrační teorie vede v tomto případě k funkcím $\Phi(x, y, s, t)$, které hoví t. zv. Chapmanově rovnici

$$\Phi(x, y, s, t) = \int_a^b \Phi(x, z, s, u)\, \Phi(z, y, u, t)\, dz.$$

O této rovnici přináší kniha poučení jednak podrobně v souvislosti s předcházející teorií, jednak přehledně ve vztahu s nejnovějšími pracemi o tomto předmětu.

4. Domnívám se, že bohatost výsledků, přehled o literatuře podaný v této knize a soustavný výklad povzbudí odborníky k pracem v tomto směru, v němž jsou nepochybně ještě velké možnosti. *O. Borůvka.*

Maurice Fréchet: Recherches théoriques modernes sur la Théorie des probabilités. Second livre. Méthode des fonctions arbitraires. Théorie des événements en chaîne dans le cas d'un nombre fini d'états possibles (Traité du Calcul des probabilités et ses applications, Tome I, fasc. III). Paris 1938; X + 315 stran.*)

Podle Poincaréa jsou dva případy, kdy pravděpodobnost, závislá na parametru n, se, jak říká Fréchet, „regularisuje". V prvním případě jsou dány pravděpodobnosti $p_1, p_2, p_3, \ldots$ zjevů $E_1, E_2, E_3, \ldots$, jež se mohou vyskytnouti jakožto výsledky nějakého pokusu; zjev F závislý na výsledku pokusu má pravděpodobnost p, která závisí jednak na pravděpodobnostech p_i jednak na parametru n. Roste-li n do nekonečna, blíží se p určité limitní hodnotě, která nezávisí na hodnotách p_i. Jen několik málo stránek je věnováno tomuto případu, který vede k t. zv. metodě libovolných funkcí; vše další týká se otázek, které se vztahují k druhému případu regularisace: parametr n udává zde, kolik pokusů bylo postupně provedeno; pravděpodobnosti $p_1, p_2, \ldots$ jednotlivých výsledků, které může míti první pokus, jsou dány. Pravděpodobnost, se kterou se očekává některý výsledek dalšího pokusu, nechť závisí na výsledku pokusu bezprostředně předcházejícího. Pravděpodobnost nějakého výsledku, který může míti n-tý pokus, závisí jednak na daných pravděpodobnostech p_i, jednak na n; její limitní hodnota, roste-li n do nekonečna, je na nich nezávislá. Pravděpodobnosti různých výsledků se zde tedy „regularisují" tím, že se pokus opakuje. To je základ úvah, které vedou k „ergodickému principu". Řada zjevů, jichž pravděpodobnosti jsou tak spojeny, že tvoří Markovův řetěz, je nejjednodušším případem, ve kterém lze uvažovati o ergodickém principu. Běží zde o řešení této algebraické úlohy: Jsou-li p_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots, r)$ koeficienty homogenní lineární substituce S o r proměnných, při čemž $p_{ik} \geqq 0$, $p_{i1} + p_{i2} + \ldots + p_{ir} = 1$, označme znakem $P_{ik}^{(n)}$ koeficienty substituce, která vznikne, aplikujeme-li S n-kráte. Platí

$$P_{ik}^{(m+n)} = \sum_{s=1}^{r} P_{is}^{(m)} P_{sk}^{(n)}, \quad P_{ik}^{(1)} = p_{ik}, \tag{1}$$

*) Referát o první části tohoto spisu vyšel v Časopise **66** (1937), D 314.

a úloha zní: za jakých podmínek má $P_{ik}^{(n)}$ určitou limitní hodnotu, když n roste do nekonečna?

Autor rozebírá tuto úlohu velmi obšírně; užívá postupně tří metod. První metoda zakládá se podle Markova na tom, že $P_{ik}^{(n+1)}$ je zobecněný aritmetický střed veličin $P_{ik}^{(n)}, P_{2k}^{(n)}, \ldots, P_{rk}^{(n)}$. Druhá metoda užívá zvláštních výrazů pro veličiny $P_{ik}^{(n)}$; při tom mají důležitou úlohu kořeny sekulární rovnice

$$\begin{vmatrix} p_{11} - s, & p_{12}, & \ldots, p_{1r} \\ p_{21}, & p_{22} - s, & \ldots, p_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{r1}, & p_{r2}, & \ldots, p_{rr} - s \end{vmatrix} = 0.$$

Třetí metoda záleží v tom, že se přímo studují různé skupiny zjevů utvořené těmi výsledky, které dává řada postupně provedených pokusů.

Poslední oddíl spisu je věnován funkční rovnici (pro $s < u < t$)

$$P_{ik}(s, t) = \sum_{j=1}^{r} P_{ij}(s, u) \, P_{jk}(u, t) \tag{2}$$

s podmínkou $P_{ik}(s, t) > 0$, $\sum\limits_{k=1}^{r} P_{ik}(s, t) = 1$. Spojitě proměnné veličiny s, u, t jsou zde obdobou indexů m a n, které se vyskytují v rovnici (1). Ve speciálním případě, že $P_{ik}(s, t)$ je funkcí jen rozdílu $t - s$ a že tento rozdíl se rovná celému kladnému číslu m, přechází rovnice (2) v rovnici (1). Veličina $P_{ik}(s, t)$ má význam „pravděpodobnosti přechodu“ podobně jako $P_{ik}^{(m)}$. Úlohou je nalézti všechny možné funkce $P_{ik}(s, t)$ vyhovující rovnici (2). Autor vykládá nejprve metodu, kterou se dá úloha uvésti na řešení diferenciálních rovnic lineárních, pak metodu, která vyjadřuje hledanou funkci nekonečnou řadou; tuto řadu lze obdržeti postupnými aproximacemi. Řešení úlohy za nejobecnějších předpokladů může se považovati za zobecnění té úlohy, která se vyskytuje při integraci diferenciálních rovnic lineárních s předepsanými počátečními hodnotami neznámých funkcí. Konečně vykládá podrobně metodu, která dovoluje jednoduchými výrazy, bez nekonečných řad, vyjádřiti nejobecnější funkci vyhovující rovnici (2) spojitou vzhledem k s a t.

Zvláštností knihy je, že z největší části se zabývá podrobným rozborem několika speciálních úloh a příkladů, které jsou řešeny z různých hledisek, každý několika metodami. Tak na př. otázka, kdy $\lim\limits_{n=\infty} P_{ik}^{(n)}$ má hodnotu nezávislou na i (viz str. 26, 31—32, kde Fréchet udává nutné a postačující podmínky, 117 a násl., 197) je řešena rozmanitými způsoby; obsáhlá kapitola je věnována řešení rovnice (2). Kniha bude významnou pomůckou ke studiu Markovových řetězů; podrobně provedený a na příkladech vysvětlený rozbor jednoduchých základních otázek zde podaný zdá se mně býti výbornou přípravou ke studiu složitějších otázek, jež se týkají Markovových řetězů. Srovnáme-li Fréchetovu knihu s brožurou, kterou jsem vydal r. 1931,*) shledáme, že teorie řetězů byla v posledních letech v nejednom ohledu zdokonalena a doplněna. Z četných prací, které byly v tomto oboru v po-

*) B. Hostinský: Méthodes générales du Calcul des probabilités (Paris, Gauthier-Villars, 1931).

slední době uveřejněny a které jsou v přehledu sestaveny na konci Fréchetovy knihy, uvádím zejména práce, které napsali Hadamard, Fréchet a Kolmogorov (viz zejména zajímavé úvahy na str. 200—201 obdobné úvahám o stabilitě pohybů podle Poissonovy definice). Autor cituje na několika místech práce českých matematiků, kteří se zabývali teorií řetězů.

Bohuslav Hostinský.

J. F. Koksma: Diophantische Approximationen. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, IV. Bd., Heft 4.) Berlin 1936, stran VIII, 157, Kč 190,—.

Spisy vydávané ve sbírce „Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete" mají za úkol seznamovati čtenáře se současným stavem resp. dosavadním vývojem určitého, do jisté míry uzavřeného, matematického oboru. Svého úkolu zhostil se autor v oboru diofantických aproximací opravdu skvěle. Nepodává suše pouze výsledky a literární odkazy, nýbrž seznamuje čtenáře — a na to dává stejný, ne-li větší důraz — s typickými metodami důkazů a upozorňuje ho na skryté souvislosti mezi různými větami.

V kapitole 1. podává autor stručný přehled obsahu celé knihy, obecně formuluje úkoly, kterými se (v hlavních rysech) teorie diofantických aproximací zabývá a udává i s odůvodněním nejlepší mocninnou aproximaci pro obecný systém lineárních forem. Uvedeme zde autorovu formulaci tří základních úkolů v trochu speciální podobě. Budiž dáno m reálných funkcí n celočíselných argumentů

$$F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \; i = 1, 2, \ldots, m$$

a kladná funkce $\varphi(t)$ kladného argumentu t. Pak říkáme, že systém $\{F_i(x)\}$ *připouští aproximaci* $\varphi(t)$, jestliže ke každému $A > 0$ existuje mřížový bod $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (t. zn. celočíselný systém hodnot $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$) tak, aby $X = \underset{1 \leqq k \leqq n}{\mathrm{Max}} | x_k | \geqq A$ a aby pro vhodná celá y_i platilo

$$| F_i(x) - y_i | < \varphi(X), \; i = 1, 2, \ldots, m.$$

Úkoly, o kterých byla nahoře zmínka, jsou pak tyto: Úkol A_1. K danému systému funkcí $\{F_i(x)\}$ najíti pokud možno „nejmenší" funkci $\varphi(t)$ tak, aby daný systém $\{F_i(x)\}$ připouštěl aproximaci $\varphi(t)$.

Označme

$$\psi(t) = \underset{\substack{x_k, y_i \\ 0 < \underset{k}{\mathrm{Max}} |x_k| \leqq t}}{\mathrm{Min}} \; \underset{i}{\mathrm{Max}} \, | F_i(x) - y_i | \tag{1}$$

(x_k, y_i celá). Předpokládejme rovněž, že $\{F_i(x)\}$ je *systém vlastní*, t. zn., že výrazy $F_i(x) - y_i$ nevymizí současně pro žádný celočíselný systém x_k, y_i a že $\psi(t) \to 0$ pro $t \to \infty$. Úkol A_1 se redukuje pak (omezíme-li se na funkce $\varphi(t)$ klesající) na úkol vyšetřovati funkce $\varphi(t)$ ($\varphi(t) > 0$ pro $t > 0$), pro které nerovnost $\psi(t) < \varphi(t)$ platí pro rostoucí divergentní posloupnost kladných hodnot t, čili pro které zhruba $\liminf\limits_{t \to \infty} \dfrac{\psi(t)}{\varphi(t)} \leqq 1$. Naproti tomu úkol A_2, kterým se autor zabývá, vyšetřuje funkce $\varphi(t)$, pro které nerovnost $\psi(t) < < \varphi(t)$ je splněna pro všechna t větší než jisté t_0, čili pro které zhruba $\limsup\limits_{t \to \infty} \dfrac{\psi(t)}{\varphi(t)} \leqq 1$.

Úkol B. Nalézti pokud možno „největší" funkci $\varphi(t)$ tak, aby daný systém nepřipouštěl aproximaci $\varphi(t)$. V případě, že $F_i(x)$ jsou lineární formy (homogenní) v proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$, uvádí autor důkaz tvrzení, že tento systém připouští aproximaci $1 : t^{\frac{n}{m}}$. Na tomto jednoduchém a přece velmi důležitém případě vynikne velmi jasně důležitost a způsob užití *Dirichletova Schubfachprinzipu* v teorii diof. aproximací. Ve všech těchto problémech jedná se v podstatě o řešení jistých nerovnin celočíselnými hodnotami neznámých. Jde pak hlavně o dvě věci. Za prvé rozhodnouti otázku existence neb neexistence řešení celočíselného a za druhé (v případě, že počet řešení je velký) udati odhad pro počet mřížových bodů, hovících daným nerovninám. Tento druhý úkol spadá spíše do teorie mřížových bodů a autor všímá si ho jen výjimečně. Ke konci kapitoly zabývá se autor jednoduchým případem nehomogenním, k čemuž se však podrobněji vrací v některých kapitolách dalších.

V kapitole 2. seznamuje autor čtenáře s jednou geometrickou metodou pro řešení nahoře uvedených problémů. Díváme-li se na proměnné x_1, $x_2, \ldots, x_n$ jako na souřadnice bodu v n-rozměrném kartézském prostoru, stanoví nám dané nerovniny jistý obor Ω. Velikost objemu tohoto oboru Ω nás za jistých předpokladů poučuje o počtu (nebo aspoň o existenci) mřížových bodů v tom oboru se nacházejících, tedy o počtu resp. existenci řešení daných nerovnin. Tuto metodu ilustruje autor na krátkém a elegantním Mordellově důkaze Minkowského základní *věty o konvexním tělese* a na důkaze obecnější věty Blichfeldtovy. Na př. Minkowského věta zní: V konvexním tělese K (v kartézském n-rozměrném prostoru), symetrickém podle počátku a majícím objem $V \geqq 2^n$ existuje mřížový bod různý od počátku. Autor podává pak zobecnění této věty v různých směrech a ukazuje na klasickém případě systému lineárních forem její krásné použití. Autor uvádí rovněž Sieglův analytický důkaz Minkowského věty o lineárních formách, který je podstatně těžší, dává však výsledek bohatší. Jako další aplikací této geometrické metody zabývá se autor Minkowského nehomogenním případem ve dvou dimensích a otázkou nenulového mřížového bodu v elipsoidu.*)

Kapitola 3. pojednává o případě, kdy daný systém funkcí $F_i(x)$ se redukuje na jedinou formu αx. Je ihned vidět, že v tomto případě se jedná v podstatě o nalezení pokud možno „nejmenší" kladné funkce $\varphi(t)$, $(t > 0)$, tak, aby nerovniny $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \varphi(q)$, $q > 0$ měly nekonečně mnoho celých řešení v p, q, tedy jedná se o aproximace reálných čísel α pomocí čísel racionálních (říkáme, že α připouští aproximaci $\varphi(t)$). Geometrické metody, uvedené v předcházející kapitole, podávají sice i zde základní výsledky, ale pro podrobnější studium ukazuje se účelné používati *metody řetězových zlomků*. Tuto metodu autor v hrubých rysech načrtává a ukazuje, jak pomocí ní dospíváme k základním větám sem spadajícím. Ukazuje se velmi úzká souvislost mezi posloupnostmi částečných jmenovatelů v rozvoji α v řetězový zlomek a mezi aproximacemi, které číslo α připouští. Z toho je na př. patrna metoda konstrukce čísel, majících dané aproximační vlastnosti a okolnost, že dvě irracionálná čísla, která spolu souvisí modulovou transformací, mají stejné aproximační vlastnosti. Autor dělí iracionálná α do tříd (typů) podle toho, jak silné aproximace tato čísla připouštějí, a zabývá se podrobněji t. zv. případem mezným, kdy horní hranice $M(\alpha)$ čísel $c > 0$, pro která α připouští aproximaci $\frac{1}{ct^2}$, je konečná. Tak dospívá na př. k větám: Pro

*) Krásnou aplikaci této geometrické metody nalezne čtenář ve dvou článcích, jež vyjdou v tomto Časopise: K. Mahler, Ein Übertragungsprinzip für konvexe Körper; V. Jarník, Remarque à l'article précédent de M. Mahler.

všechna iracionální α je $M(\alpha) \geqq \sqrt{5}$ (ale je $M\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \sqrt{5}$); $M(\alpha)$ může nabývati jen diskretních (isolovaných) hodnot (jichž jediným hromadným bodem je 3), pokud jsou tyto menší než 3. V tomto případě je jistě α číslo z kvadratického tělesa (pro čísla z kvadratického tělesa je ovšem vždy $M(\alpha)$ konečné). Po naznačení Hermiteovy metody (užívá se kvadratických forem binárních) k odvození $M(\alpha) \geqq \sqrt{3}$ pro iracionální α, po ukázce, jak se užívá modulového rozdělení komplexní roviny v těchto otázkách, přechází autor k větám *metrické povahy*, v nichž se zkoumá míra množství čísel α v intervalu $\langle 0, 1\rangle$, splňujících jisté aproximační vlastnosti. Autor nejprve odůvodňuje proč, všechna množství čísel α z intervalu $\langle 0, 1\rangle$, splňujících vlastnosti neměnící se při konečném počtu změn v posloupnosti částečných jmenovatelů příslušného řetězového zlomku, mají buď míru nulovou nebo rovnou 1. Dále uvádí autor řadu metrických vět, z nichž vyjímám typickou větu Khintchinovu: Budiž $\varphi(t)$ spojitá a $t^2\varphi(t)$ klesající funkce pro $t > 0$; pak *skoro* všechna α (z intervalu $\langle 0, 1\rangle$) 1. připouštějí aproximaci $\varphi(t)$, jestliže integrál $\int^{\infty} t\,\varphi(t)\,dt$ diverguje a 2. nepřipouštějí aproximaci $\varphi(t)$, jestliže tentýž integrál konverguje.

V kapitole 4. autor nejprve upozorňuje na okolnost, již z minulé kapitoly známou, že každé iracionální číslo z kvadratického tělesa má periodickou posloupnost částečných jmenovatelů příslušného řetězového zlomku a táže se, zda nelze najíti algoritmus podobný algoritmu řetězových zlomků, který by se hodil pro *simultanní* vyšetřování systému několika čísel a který by nám dovoloval najíti kriteria pro *čísla algebraická* (t. j. pro nulové body polynomů s celočíselnými koeficienty stupně alespoň prvého). Autor uvádí proto nejprve přehled takových pokusů. Dále zabývá se metodami ke zkoumání iracionálnosti čísel a vyšetřuje aproximační vlastnosti čísel algebraických. Charakteristickou pro tuto část teorie diof. aproximací je věta Thue-Siegelova (je-li α algebraické číslo stupně n-tého ($n \geqq 2$), pak nepřipouští toto číslo aproximaci $\left.\frac{1}{t^{2\sqrt{n}}}\right)$, která nám v podstatě říká, že algebraická čísla se dají jen špatně aproximovati čísly racionálními. Z této věty plyne velmi snadno překvapující Thueova věta, která sem přímo nezapadá: Je-li $a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_n$ ireducibilní polynom v z ($n \geqq 3$) s celočíselnými koeficienty, pak rovnice $a_0x^n + a_1x^{n-1}y + \ldots + a_ny^n = 0$ má jen konečný počet řešení v celých číslech x, y. Dále zmiňuje se autor o metodách ku zkoumání *transcendentnosti* (t. zn. nealgebraičnosti) čísel a uvádí několik příkladů čísel, u kterých otázka transcendentnosti byla již rozřešena. Z těchto vět vyjímám jednu, která odpovídá na známý problém Hilbertův: Je-li η a ω algebraické, $\eta \neq 0, 1$ a ω iracionální, je η^ω transcendentní.

Kapitola 5. pojednává nejprve o Khintchinově principu (*Übertragungsprinzip*), který z dostatečné znalosti aproximačních funkcí připuštěných formou $\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \ldots + \alpha_nx_n$ dovoluje stanoviti jisté odhady pro simultanní aproximace systému čísel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Speciální případ tohoto principu (totiž případ mezný) autor krátce dokazuje. Dále zabývá se autor úkolem A_2 v případě, že systém $\{F_i(x)\}$ se redukuje na jedinou lineární formu $\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \ldots + \alpha_nx_n$ nebo, že $F_i(x) = \alpha_ix$, a poukazuje na podstatný rozdíl, který se jeví mezi případem jednorozměrným ($n = 1$), vyšetřovaným v kap. 4. a případem vícerozměrným ($n > 1$). Podrobněji je pak pojednáno o „nejlepší“ simultanní aproximaci systému iracionálních čísel $\{\alpha_i\}$, platné pro všechny systémy $\{\alpha_i\}$. Říkáme, že systém čísel α_i ($i = 1, 2,$

$\ldots, m$), připouští aproximaci $\varphi(t)$, jestliže systém forem $\alpha_i x$ připouští aproximaci $t\,\varphi(t)$, čili má-li soustava nerovnin $q > 0$, $\left|\alpha_i - \frac{p}{q}\right| < \varphi(q)$, ($i = 1, 2, \ldots, m$), nekonečně mnoho řešení v celých p, q. Všechny systémy $\{\alpha_i\}$ připouštějí aproximaci $\frac{1}{ct^{1+\frac{1}{m}}}$ pro $c = 1$ (plyne přímo z Minkowského věty o lineárních formách). Horní hranici těch c, pro která nastává rovněž ještě tento případ, označme C_m. Autor ukazuje, že $C_m < \infty$ a uvádí přehled známých odhadů pro C_m, kteréžto číslo (vyjma případ $m = 1$) není přesně známo. ($C_1 = \sqrt{5}$, jak již bylo uvedeno v kap. 3.) Konečně uvádí autor několik metrických vět týkajících se simultanních aproximací a několik vět týkajících se souvislosti simultanních aproximací systému $\{\alpha_i\}$ s aproximacemi jednotlivých čísel α_i.

V kapitole. 6. ukazuje nejprve autor, že pro iracionální Θ nehomogenní výraz $\Theta x - \beta$ připouští vždy aproximaci $\frac{1}{2t}$ a uvádí některá zostření této věty. Dále ukazuje, že v případě úkolu A_2 chová se nehomogenní výraz podstatně jinak, než homogenní Θx, neboť pro libovolně „velkou" positivní, spojitou, k nule klesající funkci $\varphi(t)$ dá se najíti dvojice iracionálních čísel Θ, β tak, že nerovnost $\varphi(t) < \psi(t)$ (viz (1)) je splněna pro posloupnost kladných, k nekonečnu rostoucích hodnot t. Dále studuje autor některé otázky z těchto vět vyplývající.

V kapitole 7. zabývá se autor nejdříve zobecněním některých úvah a výsledků z konce minulé kapitoly pro lineární nehomogenní výrazy o více proměnných. Dále uvádí jednoduchý důkaz t. zv. Kroneckerovy věty (jsou-li čísla Θ_i, ($i = 1, 2, \ldots, m$), lineárně nezávislá, pak množství bodů $((\Theta_1 x), (\Theta_2 x), \ldots, (\Theta_m x))$, {($\alpha$) značí $(\alpha) = \alpha - [\alpha]$, kde $[\alpha]$ je největší celé číslo $\leqq \alpha$} je husté v jednotkové m-dimensionální krychli), zabývá se některými zobecněními této věty a poukazuje na časté její aplikace v jiných oborech matematiky.

V kapitole 8. a 9. zabývá se autor *problémem rozdělení* (mod 1). Budiž dána funkce $f(x)$ pro x celé, kladné. Budiž $0 \leqq \alpha \leqq \beta \leqq 1$ a označme $N_{\alpha,\beta}(n)$ počet čísel ze systému $(f(1)), (f(2)), \ldots, (f(n))$, která padnou do intervalu $\langle\alpha, \beta)$, dále pak $\omega(\alpha) = \liminf\limits_{n\to\infty} \frac{N_{0,\alpha}(n)}{n}$, $\Omega(\alpha) = \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{N_{0,\alpha}(n)}{n}$. Zřejmě $\omega(\alpha)$ i $\Omega(\alpha)$ jsou neklesající funkce argumentu α a je $\omega(0) = \Omega(0) = 0$, $\omega(1) = \Omega(1) = 1$, $\omega(\alpha) \leqq \Omega(\alpha)$. Je-li $\omega(\alpha) = \Omega(\alpha) = \alpha$ říkáme, že $f(x)$ je rovnoměrně rozdělená (mod 1). Pak, klademe-li $R_{\alpha,\beta}(n) = N_{\alpha,\beta}(n) - (\beta - \alpha)\,n$, je $R_{\alpha,\beta}(n) = o(n)$. Autor zabývá se nejprve realisovatelností daných funkcí $\omega(\alpha)$, $\Omega(\alpha)$ vhodnou volbou funkce $f(x)$ a stanoví tyto funkce ω, Ω pro jednu, dosti obecnou třídu funkcí $f(x)$. Pak dokazuje důležité *Weylovo kriterium*: Funkce $f(x)$ je tenkrát a jen tenkrát *rovnoměrně* rozdělena (mod 1), jestliže pro každé celé $h \neq 0$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{x=1}^{n} e^{2\pi i h f(x)} = 0$. Z tohoto kriteria bezprostředně plyne na př., že funkce Θx pro iracionální Θ je rovnoměrně rozdělena (mod 1) (že čísla (Θx), $x = 1, 2, \ldots$, tvoří množství husté v intervalu $\langle 0, 1\rangle$, víme již z Kroneckerovy věty) a obecněji každý polynom $f(x)$, jehož alespoň jeden neabsolutní koeficient je iracionální, je rovnoměrně rozdělený (mod 1). Součty $\sum_{x=1}^{n} e^{2\pi i h f(x)}$ (t. zv. Weylovy) mají velkou důležitost v analytické teorii čísel. Transformace Weylových součtů dá se použíti k důkazu mnohem obecnější věty: Je-li diference $f(x + q) - f(x)$ pro každé celé $q \geq 1$ rovnoměrně rozdělena (mod 1), je i $f(x)$ rovnoměrně rozdělena (mod 1). Z Weylovy věty plyne také tato metrická věta: Nabývá-li $f(x)$ pro celá x vesměs celočíselných, navzájem různých hodnot, pak funkce $\alpha f(x)$ je pro skoro všechna (ve smyslu Lebesguovy míry) α rovnoměrně rozdělena (mod 1). Dále je zmínka o Vinogradovově metodě ke zkoumání rovnoměrného rozdělení (mod 1), které spočívá na tom, že z míry rovnoměrnosti systému čísel $\varrho_i - \varrho_k$, $(i, k = 1, 2, \ldots, m)$, dá se usuzovati na míru rovnoměrnosti systému čísel ϱ_i. Autor rozšiřuje tyto úvahy i na vícedimensionální prostory a v kapitole 9. naznačuje velmi podrobně a obšírně metody odhadů zbytku $R_{\alpha,\beta}(n)$ v některých speciálních případech, což vede k odhadu Weylových součtů. Ke konci kap. 9. uvádí pak autor některé metrické věty o rozložení cifer v rozvojích čísel v desítkové (nebo jiné) soustavě.

V kapitole 10. pojednává se o kriteriích, která nám udávají, kdy systému t. zv. diof. nerovnin $\alpha_\nu < f_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n) < \beta_\nu$ (mod 1), $\nu = 1, 2, \ldots, m$ vyhovuje nekonečně mnoho mřížových bodů $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Autor nejprve shrnuje k tomu cíli metody z kap. 8. a 9. (příbuznost tohoto problému a problému rovnoměrného rozdělení je zřejmá), pak popisuje jednu Skolemovu metodu, ke konci pak seznamuje čtenáře s pojmem *rytmického systému*, zavedeným Van der Corputem, a ukazuje jeho užití k řešení nahoře uvedeného problému v případě, že systém $\{f_\nu(x)\}$ je rytmický.

Vl. Knichal.

Jan Gebauer: Balistika vnější. Praha 1938, nákladem Vojenského ústavu vědeckého, XVI+409 str., 212 obr. Cena 510 Kč.

V 19 kapitolách této knihy je soustředěno obrovské bohatství látky, s níž se z největší části setkává čtenář v českém jazyce poprvé. Pokusím se v následujícím stručně naznačiti rozsáhlý program této první české učebnice vnější balistiky, kterou jednak autor šťastně nahradil posavadní studium různých děl cizojazyčných, jednak přinesl mnohé, co v knižní literatuře nalézáme vůbec po prvé. Autor vybral resp. zpracoval v přehledný celek vše, co při své práci může potřebovati praktik, i to, na základě čeho může přemýšleti a tvořiti sám v tomto rozsáhlém oboru. A tomu, kdo by v této disciplině chtěl jíti dále, poskytne kniha vše, s čím může přikročiti k dalšímu studiu speciálních problémů moderní balistiky.

Autor, vysvětliv účel a úkoly vnější balistiky, přechází k historické skizze, kterou, bohužel, končí zhruba 18. stoletím. A přece jeho velká zkušenost by mu snadno dovolila dovésti tento nástin až do současné doby, pro balistiku tak významné, a tím vyzdvihnouti a do vývojového celku vřaditi mnohá jména, s nimiž se napořád setkáváme při četbě knihy. Tu by našel také lepší místo literární soupis, který přišel na konci knihy poněkud zkrátka, v němž bylo možno k jednotlivým dílům připojiti jejich stručné zhodnocení, vyzdvihnouti rozdílný způsob zpracování. Čtenář, který by chtěl ve studiu dále pokračovati, získal by takto určité kritické vodítko. Vím sám, že všechny uvedené knihy nejsou stejné, a autor také svého času je zhodnotil dosti podrobně.

V první kapitole (str. 9—33) nacházíme obligátní parabolickou balistiku. Autor, který se tu dostává i na některé otázky dosti speciální (zbraň v pohybu, balistika v konvergentním gravitačním poli), odkazuje často na vývody, podané v obou svazcích jeho Aplikované matematiky, což poněkud porušuje kontinuitu kapitoly, ač jejich uvedením by rozsah podstatně nevzrostl. Již na začátku nacházíme řadu statí, majících ryze praktický význam, na př. měření zdvižného (na str. 13 nesprávně zdviženého) úhlu, pojem balistického větru, význam počátečních tečen pro usnadnění rýsování balistických grafikonů a pod., s nimiž se znovu a znovu setkáváme při další četbě knihy.

Druhá kapitola (str. 34—66), která jedná o odporu vzduchu, přináší nejprve asi na 20 stránkách základní poznatky z meteorologie, jichž užívá vnější balistika, a fotograficko-akustické studium dějů při výstřelu. Zejména tato část, která ke starším poznatkům Machovým a novějším Cranzovým (a jeho spolupracovníků) připojuje nové zkušenosti, která je nad to doprovázena řadou pěkných reprodukcí (až na neprůkazné obrázky 43 a 44 na str. 47), poskytne fysikovi mnohé zajímavé poučení. Část, která jedná o vlastním odporu vzduchu, není zatížena hydrodynamickými úvahami, jak je nacházíme u některých francouzských autorů (Dufrénois-Risser-Rousier*), podávajíc fenomenologické odvození Sarrauovo. Probrány podrobněji koeficient tvaru („Koeffizient unserer Unkenntnis") a balistický koeficient a ukázána jejich funkční povaha; v závěru kapitoly podán stručný přehled různých druhů odporových zákonů.

Balistiku přímých drah (kapitola třetí, str. 67—104) klade autor před hlavní problém vnější balistiky. Probrány čtyři hlavní typy přímých drah: „skoro vodorovný vrh na malou dálku", dráhy zenitální, nadirální a „dráhy šikmé, skoro přímé". Teorie, týkající se drah prvního typu, je aplikována na šrapnelovou kuličku a na některé otázky balistiky experimentální (měření počáteční rychlosti střely a měření balistického koeficientu). Dráhy zenitální a nadirální, pro velký jejich význam, jsou probírány velmi podrobně (str. 73—102). U zenitálních drah uvedeny starší francouzská metoda Charbonnierova (grafická), moderní (1926) německá metoda Eberhardova (analytická) a první (jednodušší) francouzská metoda Garnierova výpočtu po úsečkách postupných (1918, numerická integrace), kde třeba autorovi přiznati výklad daleko jednodušší a srozumitelnější, než je výklad samotného tvůrce metody (Garnier). Analogické rozvržení podržuje výklad drah nadirálních. Po metodě Charbonnierově uvedeny některé výpočty za speciálních předpokladů o odporové funkci (opět s užitím na balistiku leteckých pum) a všeobecná metoda Eberhardova pro výpočet drah obojího typu (zenitálních i nadirálních), užívající grafické integrace. Podrobně je opět probrána první (jednodušší) Garnierova metoda výpočtu nadirálních drah po úsečkách postupných, kde třeba zdůrazniti tytéž přednosti, jaké má výklad drah zenitálních.

Ve čtvrté kapitole (str. 105—118), jež zabývá se t. zv. hlavním problémem vnější balistiky, podáno odvození soustav pohybových rovnic pro různé argumenty a to za platnosti klasických zjednodušujících předpokladů (tíhové zrychlení a balistický koeficient konstantní podél celé dráhy), odvozeny všeobecné teorémy Robertovy, věta Ollerova a pod., z praktických vět pak pravidlo o přestřelitelnosti krytu, figurující v mnohých služebních předpisech. Aspoň zněním mohly býti tu připojeny některé věty ruských balistiků (Mečnikov, Okuněv), mající užití při konstrukci grafických tabulek střelby. Dvě stránky věnovány Esclangonově teorii zobecněných drah (balistický koeficient proměnný s výškou podle barometrické formule), která existuje snad jen v manuskriptu gâvreské komise. Studium těchto drah dalo v poslední době balistice nový ráz, neboť zbavilo ji posavadního ryze formálního charakteru a postavilo balistiku na přísnou matematickou základnu (Popov). Literatura, týkající se tohoto problému, vyšla většinou po ukončení rukopisu knihy; snad také zařazení těchto otázek do rámce knihy neodpovídalo autorovu rozvrhu, vytčenému v předmluvě.

*) Prostrkáním značím autory balistických prací.

Přesto matematika by zajímalo něco více, než Esclangonův teorém o rychlostech zobecněných drah. Vždyť za jistých plausibilních předpokladů byla již podána geometrie na zobecněné trajektorii (Charbonnier). Snad i Drachova teorie, týkající se podmínek integrability rovnic základní soustavy, zasloužila by více místa.

První skupina výpočtu křivých drah (kapitola pátá, str. 119 až 129) zahrnuje ze starších metod ony, které pro jisté otázky přicházejí v úvahu ještě dnes. Jsou to některá řešení hlavního problému pro speciální předpoklady o odporových funkcích: d'Alembertovo (1744) a Bernoulliho (1719) pro zákon potenční, Eulerovo (1753) pro zákon kvadratický a řešení Bashforthovo pro zákon kubický. Oprávněně obecné řešení d'Alembertovo uvedeno jako první (zároveň se specialisací na lineární zákon Chapelův) a řešení Bernoulliho pak proto, že vede k důležitému pojmu balistické podobnosti a definuje důležité balistické funkce $\xi_n(\tau)$. Na základě Eulerova řešení vypočtl Otto (po něm Lardillon a j.) první balistické tabulky v pravém slova smyslu, jichž se používá dodnes při výpočtech s malými počátečními rychlostmi (miny). Jen stručně naznačeného výpočtu Bashforthova užívalo se v Anglii. Snad aspoň zběžně mohlo tu býti uvedeno řešení téhož problému Greenhillem (Charbonnier), které představuje jednu z nejzajímavějších aplikací eliptických funkcí v mechanice, a Zabudského řešení pro zákon bikvadratický (Okuněv).

Výpočet plochých drah (kapitola šestá, str. 130—165) podán velmi podrobně. Probrány nejprve přehledně italské metody Siacciho, jakožto obecnější rámec starších případů zvláštních, definovány primární funkce Siacciho a funkce Eberhardovy. Stupeň přibližnosti jednotlivých řešení posouzen na základě alternačního faktoru, zavedeného Emerym. Z mnoha speciálních případů, které autor probírá, zmiňme se o povšechném nástinu tří řešení Siacciho (1880, 1888, 1896), která objasňují francouzskou „hypothèse aide-mémoire". Podrobně vysvětlena metoda Didionova-Bernoulliho, pojem funkcí G_i a k nim se připínajících Chapelových faktorů střelby a řešení Chapelovo-Zedlitzovo. Řešení Didionovo-Bernoulliho pro kvadratický předpoklad je aplikováno na výpočet drah leteckých pum; vysvětleny italské Brunovy faktory střelby, s jejichž tabulkami lze velmi snadno řešiti základní úlohy letecké balistiky. Balistika leteckých pum je pravděpodobně oblíbené téma autorovo, kterému také před nedávnem věnoval samostatnou práci; nepochopitelný ediční postup však způsobil, že tato pozoruhodná monografie není téměř známa. Následuje podrobný výklad metod Siacciho, sekundárních funkcí Siacciho (Siacciho faktory střelby), jejich užití na řešení řady balistických úkolů a j. Posléze probráno jiné řešení Charbonnierovo, francouzský způsob výpočtu záměrného úhlu, vypracovaný Gazotem, a dva způsoby výpočtu drah leteckých pum, starší Cranzův a modernější (1923) Chrétienův.

Nejrozsáhlejší kapitola sedmá (str. 166—212) obsahuje metody výpočtu křivých drah po obloucích postupných. Nejprve metodu gâvreskou, které ještě dnes se užívá, zvláště při výpočtu konců drah pro grafické tabulky střelby. Slavným francouzským metodám (první a druhé) GHM (Garnier-Haag-Marcus), jež vznikly ze snahy po zpřesnění metody gâvreské, věnováno 20 stran, které s postačující úplností informují nás o tom, čemu bylo věnováno 1200stránkové samostatné dílo (Garnier). Novum v knižní literatuře představuje zařazení tří amerických metod (Moulton, 1918), které nepoužívají vůbec goniometrických funkcí, tohoto nejpravděpodobnějšího zdroje počtářských chyb, a ruské metody Krylovovy (1927), jíž je předeslán nevyhnutelný úvod o Adamsově-Störmerově způsobu numerické integrace. Ukazuje autorovu svědomitost a píli, že informuje čtenáře o metodách, které jinak i v memoirové literatuře jsou těžko přístupné. Na řešení Siacciho je založen Eberhardův způsob výpočtu velmi dlouhých drah z r. 1924, na Chrétienově řešení autorův výpočet drah leteckých pum po obloucích postupných, kterého se používá u nás.

V kapitole osmé (str. 213—224) probrány řady, které vyjadřují rozmanité závislosti balistických prvků. Některé z těchto rozvojů jsou opět aplikovány na balistiku leteckých pum. Bylo by si přáti, aby volbou četnějších příkladů nebo aspoň všeobecným zhodnocením v širším měřítku byl vyzdvižen význam těchto řad; tímto způsobem a také odkazy na užití v následujících kapitolách byla by odstraněna jistá suchopárnost, kterou této stati nelze upříti. Informovanější čtenář je si ovšem vědom jejich praktického dosahu; u jiného čtenáře bude však zbytečně buditi dojem formálnosti.

Řešení hlavního úkolu vnější balistiky tabulkami a abaky je věnována kapitola devátá (str. 225—229). Tuto kapitolu lze také považovati za vstupní stať k další převážně praktické části knihy. Je psána pro balistické pracovníky, kteří měli možnost styku s obrovským číselným a grafickým materiálem balistickým. Těm především přináší cenný přehled a pro ně byla hlavně určena. Tento drahý materiál je však privilegovaným majetkem nemnoha ústavů (vojenských technických ústavů nebo balistických kanceláří velkých zbrojních továren) a ostatním je nepřístupný. Vidíme tu, jak kniha by nesmírně získala, kdyby k ní byl připojen vhodný výběr tabulek a grafikonů, aspoň těch, jejichž hodnot autor užívá v četných příkladech. Bez něho cenná místa knihy ztratí často čtenářův zájem.

Vedlejší problémy vnější balistiky, perturbace, jejich druhy, význam a výpočet, jsou probrány v kapitole desáté (str. 230—247). Tu nacházíme také odvození klasických vztahů, známých jako Stüblerovy vzorce. Složitá otázka vlivu větru na dráhu střely a fiktivní vítr balistický probrány jsou v kapitole jedenácté (str. 248—259). Výpočet perturbací trajektorie po obloucích postupných, jeden z nejdůležitějších problémů praktické balistiky, podán v kapitole dvanácté (str. 260—288), výpočet t. zv. diferenciálních koeficientů při francouzských metodách po obloucích postupných vysvětlen podrobně v kapitole třinácté (str. 289—306). Význam těchto kapitol ocení opět praktik; přehledné zpracování a výběr látky nemůže autorovi upříti nikdo, kdo se v pravém slova smyslu „prokousával“ původními pracemi zatíženými detaily (Garnier).

V kapitole čtrnácté (str. 307—321) probrán t. zv. inversní problém vnější balistiky a grafická representace trajektorií. Z aplikací uveden pohyb v odporujícím prostředí, které lze ovládnouti lineárním zákonem (aplikováno na pohyb pumy), kubická parabola Piton-Bressantova a Siacciho, bikvadratická parabola Duchêneova a hyperboly Newtonova i Petitcolova. Mohla být připojena trajektorie Hamiltonova, Sugotova a j. (Okuněv). Dráhy střel jsou aproximovány především kuželosečkami, zejména oblouky hyperbol. Pěkným úvodem k této partii mohla býti stať o interpolaci, nacházející se v prvním svazku autorovy Aplikované matematiky. Leccos snad mohlo být připojeno ze starší autorovy práce (1926), Výpočet grafických tabulek střelby. Probrána posléze konstrukce na základě principu otáčivosti (ztrnulosti) drah a hypotésy aide-mémoire; v závěru kapitoly uvedeny vzorce Dufrénoisovy, vhodné pro výpočet konců trajektorií.

Obtížnému výkladu střely jakožto setrvačníku a stejně obtížné otázce t. zv. derivace střely věnována kapitola patnáctá (pohyb střely kolem těžiště, str. 322—340), která soustřeďuje četné technické poznatky posledních let. Kapitola šestnáctá (str. 341—357), zabývající se balistickými střelbami na pokusné střelnici, ukazuje pracné a obtížné zpracování těchto střeleb i velkou autorovu zkušenost v tomto oboru. Přímým pokračováním je vlastně kapitola sedmnáctá (str. 358—369), vyrovnání výsledků balistických střeleb pro účely výpočtu tabulek střelby, vyrovnání balistického koeficientu, derivace, konstant, které se vyskytují při časování střel s hořící složí a vyrovnání t. zv. úchylek. Jsou to rozmanité početní metody, z nichž mnohé autor vypracoval sám a kterým také věnoval četné obsáhlé články ve Vojenských technických zprávách. Kapitola osmnáctá (str. 370—391) ukazuje nám složitost práce při výpočtu číselných tabulek střelby, konstrukci grafické tabulky pomocí náhradních křivek, kde teprve vidíme důležitost kapitol VIII. a XIV. Kapitola obsahuje také řadu speciálních otázek zbrojní techniky. Poslední kapitola, devatenáctá (str. 392—398), věnována praktickým otázkám, které se vyskytují v balistice leteckých pum, jak při bombardování z bombardovacích letounů, tak z upoutaných balonů.

Shrnuji: Autor způsobem téměř vyčerpávajícím vykládá v knize balistiku z obvyklého formálního hlediska, které pravděpodobně nadlouho zůstane jediným východiskem všech praktických učebnic balistiky. *První předností knihy* proti cizojazyčným učebnicím zdá se mi účelná restrikce látky, která spočívá jednak ve vyloučení četných statí, dnes více méně bezvýznamných nebo speciálně bezvýznamných pro nás, jednak ve volbě takové cesty, která čtenáře dovede nejrychleji k aplikacím. Někdo by mohl namítati, že leckdy došlo k tomu na úkor přesnosti v matematickém vyjadřování nebo že se tak stalo formulací příliš střízlivou. Myslím však, že nejsou v rozporu s praktickým posláním knihy ani technický způsob výkladu, ani častá dikce služebních předpisů. *Druhou předností knihy* je zařazení řady kapitol, které nenalezneme ani v rozsáhlých kompendiích cizojazyčných, jak na příslušných místech jsem rozvedl podrobněji.*) Shrnutí předností knihy v tyto dva body je ovšem jen lapidární a individuální. Knize *vadí* nedostatek číselných tabulek. Bohaté autorovy zkušenosti ze světové války i z pokusných střeleb a jeho literární práce mohly nalézti místo v kapitole, věnované poslední fázi střely, účinku projektilu v cíli, průbojnosti a pod. A u nás snad z jedinečné zkušenosti autorovy mohl vzniknouti na konci knihy terminologický slovníček v nejdůležitějších jazycích.

Zdeněk Pirko.

C. Publikace česko-slovenských matematiků a fysiků.

E. Čech - B. Pospíšil: I. Sur les espaces compacts. II. Sur les caractères des points dans les espaces $\mathfrak{L}$. Spisy přír. fak. Brno, **258** (1938), 14.

A. Erdélyi: Bemerkungen zur Integration der Mathieuschen Differentialgleichung durch Laplacesche Integrale. Compositio Mathematica, **5** (1938), 435—441.

A. Erdélyi: Einige Integralformen für Whittakersche Funktion. Proceedings Kon. Nederland. Ak. **41** (1938), 481—486.

A. Erdélyi: The Hankel transform of a product of Whittaker's function. Journal London Math. Soc., **13** (1938), 146—154.

A. Erdélyi: On some expansions in Laguerre polynomials. Journal London Math. Soc., **13** (1938), 154—156.

F. Erhart: Proces v pístovém stroji ve světle rázové teorie. Praha 1938. 4° 7 str. 4 obr.

J. Gebauer: Balistika vnější. Praha 1938. 4° XVI, 410 str. 211 obr. Váz. 510 K. (Vojenský ústav vědecký.)

J. Hrdlička: Možnosti a předpoklady našeho optického průmyslu. Brázda, 1938, č. 13.

J. Hrdlička - J. Krombholz: Photometre portatif sans écran diffusant. Revue d'Optique, **17** (1938), 28—33.

*) Viz můj článek v loňském ročníku Vojenských technických zpráv (**15**, 1938, 191).

J. Hronec: Lineárne diferenciálne rovnice obyčajné, Praha 1938. 4° 111 str. 3 obr. Brož. 30 K, váz. 36 K. Česká Matice Technická..

J. Klíma: Deskriptivní geometrie čtyřrozměrného prostoru. Sborník vys. šk. tech., Brno, **12**/44 (1938), 23.

F. Křeček: Metoda příčinková u veličin diferenciálně-lineárních. Sborník MAP, **12** (1938), 74—113.

M. Neubauer: Sur l'espace des fonctions continues. Fundamenta Mathematica, **31** (1938), 269—278.

M. Pelíšek: O přemístění rovnostranného trojúhelníka v prostoru a speciální ploše osmého stupně vytvořené tímto pohybem. Spisy přír. fak. Brno, **254** (1938), 28.

Z. Sekera: Nomogramme zur Bestimmung von Höhe und Azimut der Sonne bei Dämmerung. Meteorologische Zeitschrift, 1938, 337—339.

Z. Sekera: Über die Bedeutung der Übergangsschicht in der Theorie der Helmholtzschen Luftwogen. Gerlands Beiträge zur Geophysik, **54** (1938), 9—20.

Z. Sekera: Zur Wellenbewegung in Flüssigkeitsschichten mit vertikal veränderlicher Geschwindigkeit. Astrophysica Norvegica, **3** (1938), 1—69.

K. Šoler: Dnešní stav praktické geofysiky. Hornický věstník, 1938.

K. Šoler: Magnetoelektrická kontrola železa a ocelí a výrobků z nich zhotovených. Strojnický obzor, 1938.

K. Šoler: Užití vysokofrekventních proudů v lékařství. Elektrotechnický obzor, **26** (1937).

J. Trůneček: Katodový oscilograf ve škole a praksi. Praha 1938. 8° 65 str. 36 obr. Brož. 15 K. (J. Šváb.)

J. Zahradníček: Akustická měření katodovým oscilografem. Spisy přír. fak. Brno, **252** (1938), 10.

D. Publikace redakci zaslané.

S. Bechyně: Stavitelství betonové, díl II. Konstruktivní prvky a jejich statické výpočty. Praha 1938. 4° IV, 654 str. 748 obr. Brož. 180 K, váz. 190 K. Česká Matice Technická.

M. Fendrych: Základy biologie. Co potřebuje vědět vzdělaný člověk z vědy o životě. Praha 1938. 8° 312 str. 245 obr. v tekstu a 34 obr. na příl. Brož. 50 K, váz. 60 K. (Unie.)

V. Krouza - J. Machek: Strojnický slovník, díl II. Všeobecné strojnictví, sv. 2. G — M. Praha 1938. 8° VIII, 443 str. Brož. 102 K. Česká Matice Technická.

V. J. Paulat: Hospodářská výstavba druhé republiky. Zvl. otisk z Věstníku SIA, 1938, č. 12. 120 str.

Výroční statistika nemocenských pojišťoven sdruž. v Ústř. svazu nem. poj. za rok 1937. Praha 1938. 4° 31 str. Vl. nákl.

American Mathematical Society: Semicentennial publications. New York 1938. 8° Vol. 1. A semicentennial history of AMS by R. C. Archibald. XI, 262 str. obr. příl. Vol. 2. Semicentennial adresses of the AMS. VII, 315 str.

Kernfragen der Versicherungs-Rechtsprechung. Ein Rechtswahrerbuch. Berlin 1938. 8° VIII, 136 str. 32 K. (Mittler. u. Sohn.)

Ch. N. Moore: Summable series and convergence factors. New York 1938. 4° VI, 105 str. Váz. 65 K. (American Mathematical Society.)

Opuscula Mathematica. Seš. 1. 4° 1937. Vychází ve volných lhůtách a obsahuje kratší práce z matem. ústavu vys. školy báňské v Krakově.
