Josef Hošek

Über einige Eigenschaften der Separation der Nullstellen von Lösungen der Gleichung $y'' = Q(t)y$ und der sie begleitenden Gleichungen

Sborník prací Přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci. Matematika, Vol. 18 (1979), No. 1, 43--50

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120081

1979 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM — TOM 61

Katedra matematické analýzy a numerické matematiky přírodovědecké fakulty
Univerzity Palackého v Olomouci
Vedoucí katedry: prof. RNDr. Miroslav Laitoch, CSc.

ÜBER EINIGE EIGENSCHAFTEN DER SEPARATION DER NULLSTELLEN VON LÖSUNGEN DER GLEICHUNG $y'' = Q(t)y$ UND DER SIE BEGLEITENDEN GLEICHUNGEN

JOSEF HOŠEK

(*Eingelangt am 31. März 1978*)

Unserem Lehrer Akademiker O. Borůvka in Dankbarkeit und Verehrung zum 80. Geburtstag

Gegeben sei eine Gleichung

$$y'' = Q(t)\,y \tag{Q}$$

und eine begleitende Gleichung von (Q)

$$y'' = \left[Q(t) + \sqrt{-Q(t)}\left(\frac{1}{\sqrt{-Q(t)}}\right)''\right] y\,, \tag{Q'}$$

wo $Q(t) < 0$ in einem offenen Intervall j, $Q \in C_j^2$. Ist die Gleichung (Q) oszillatorisch, so gilt dies auch von der Gleichung (Q). (Siehe Beweis in [1].)

Betrachten wir nun die sogenannte (erste) begleitende Gleichung von (Q) der Basis

$$y'' = Q_1(t)\,y \tag{Q$_1$}$$

deren Träger Q_1 durch folgende Beziehung

$$Q_1(t) = Q(t) + \frac{\alpha\beta Q'(t)}{\alpha^2 - \beta^2 Q(t)} + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 Q(t)}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 Q(t)}}\right)''$$

definiert wird. Es wird dabei vorausgesetzt, daß $Q(t) < 0$ für $t \in j$, und α, β reelle Konstanten $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ sind. Setzen wir $\alpha = 0$, $\beta = 1$, dann gilt für $t \in j$

$$Q_1(t) = Q(t) + \sqrt{-Q(t)}\left(\frac{1}{\sqrt{-Q(t)}}\right)'',$$

so daß die begleitende Gleichung (Q') von (Q) eigentlich die begleitende Gleichung (Q_1) von (Q) einer Basis [0, 1] darstellt. Wir zeigen, daß sich die obige Behauptung (siehe [1]) auf die begleitende Gleichung (Q_1) von (Q) beliebiger Basis $[\alpha, \beta]$ verallgemeinern läßt. Triviale Lösungen beider Gleichungen (Q) und (Q_1) werden von unseren weiteren Betrachtungen ausgeschlossen.

Satz 1: Die begleitende Gleichung (Q_1) einer Basis $[\alpha, \beta]$ von (Q) ist oszillatorisch genau dann, wenn die Gleichung (Q) oszillatorisch ist.

Beweis. Bezeichnen wir mit $U \in (Q_1)$ eine beliebige Lösung, $t_i \in j$, $i = 1, 2$ $(t_1 < t_2)$ zwei benachbarte Nullstellen, so daß $U(t_i) = 0$, $i = 1, 2$ und $U(t) \neq 0$ für alle $t \in (t_1, t_2)$. Dann gilt (nach [2])

$$U(t) = \frac{\alpha u(t) + \beta u'(t)}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 Q(t)}} \qquad (t \in j), \tag{1}$$

wo u eine gewisse Lösung der Gleichung (Q) bedeutet. Hieraus ergibt sich, daß auch für $i = 1, 2$

$$\alpha u(t_i) + \beta u'(t_i) = 0. \tag{2}$$

Es sei $\beta \neq 0$ und nehmen wir an, daß für die (1) erfüllende Lösung $u \in (Q)$ gilt: $u(t) \neq 0$ für $t \in (t_1, t_2)$. Es gilt auch $u(t_i) \neq 0$, wo $i = 1, 2$. Wäre nämlich $u(t_i) = 0$, dann nach (2) auch $u'(t_i) = 0$, $i = 1, 2$, so daß u eine triviale Lösung der Gleichung (Q) wäre, was jedoch in bezug auf die Vereinbarung nicht möglich ist. Für $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ gilt dann

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha u(t) + \beta u'(t)}{u(t)}\right) = \frac{-\beta\left(u'^2(t) - Q(t)\, u^2(t)\right)}{u^2(t)}, \tag{3}$$

wo $\dfrac{u'^2(t) - Q(t)\, u^2(t)}{u^2(t)} > 0.$

Die Integration der Identität (3) in den Grenzen von t_1 bis t_2 ergibt nach (2) ein bestimmtes Integral gleich Null an der linken Seite (3), während dasselbe an der rechten Seite (3) von Null verschieden ist, man hat somit ein Widerspruch. Wegen $u(t_i) \neq 0$ für $i = 1, 2$, ergibt sich demnach, daß im offenen Intervall $(t_1, t_2) \in j$ eine Nullstelle ξ der Lösung $u \in (Q)$, d. h. $u(\xi) = 0$ besteht. Da $t_i \in j$, $i = 1, 2$, zwei beliebige benachbarte Nullstellen einer oszillatorischen Lösung $U \in (Q_1)$ sind, ist die Lösung $u \in (Q)$ auch oszillatorisch.

Falls $\beta = 0$, so gilt für den Träger Q_1 der begleitenden Gleichung (Q_1) von (Q) einer Basis $[\alpha, 0]$, $\alpha \neq 0$ die Identität

$$Q_1(t) = Q(t),$$

wo $t \in j$ und die Satzaussage evident ist.

Umgekehrt: sei wieder $\beta \neq 0$ und es liege eine oszillatorische Lösung $u \in (Q)$ mit benachbarten Nullstellen $\xi_i \in j$, $i = 1, 2$ $(\xi_1 < \xi_2)$ vor. Dann ist nach [2] die durch die Beziehung (1) definierte Funktion U eine solche Lösung der Gleichung (Q_1), daß $U(\xi_i) \neq 0$, $i = 1, 2$. Gälte $U(\xi_i) = 0$, dann nach (1) notwendig

$$\alpha u(\xi_i) + \beta u'(\xi_i) = 0, \qquad i = 1, 2$$

und u wäre eine triviale Lösung der Gleichung (Q), was wiederum unmöglich ist.

Gegeben sei für die Lösung $U \in (Q_1)$ daß $U(t) \neq 0$ für $t \in \langle \xi_1, \xi_2 \rangle$. Dann ist in diesem Intervall auch

$$\alpha u(t) + \beta u'(t) \neq 0 .$$

Die Integration der Identität in den Grenzen von ξ_1 bis ξ_2 ergibt

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{u(t)}{\alpha u(t) + \beta u'(t)}\right) = \frac{\beta(u'^2(t) - u^2(t)\,Q(t))}{(\alpha u(t) + \beta u'(t))^2},$$

wobei $\dfrac{u'^2(t) - u^2(t)\,Q(t)}{(\alpha u(t) + \beta u'(t))^2} > 0$ und in Analogie zum vorangehenden Absatz wird ein Widerspruch erreicht. Hieraus folgt schon die Existenz vom Punkt $\bar{t} \in (\xi_1, \xi_2)$ einer solcher Basis, wo $U(\bar{t}) = 0$. Da $\xi_i \in j$, $i = 1, 2$, zwei beliebige benachbarte Nullstellen oszillatorischer Lösung $u \in (Q)$ sind, ist die Lösung $U \in (Q_1)$ auch oszillatorisch.

Falls $\beta = 0$, ist die Satzaussage evident.

Dieses Ergebnis läßt sich auch auf die n-te ($n = 2, 3, 4, \ldots$) in [2] eingeführte begleitende Gleichung von (Q) einer Basis $[\alpha, \beta]$ übertragen.

Satz 2. Besteht eine n-te ($n = 2, 3, 4, \ldots$) begleitende Gleichung von (Q) einer Basis $[\alpha, \beta]$, dann ist sie oszillatorisch genau dann, wenn die Gleichung (Q) oszillatorisch ist.

Der Beweis wird leicht durch die mathematische Induktion erbracht.

Folgerung: Besteht eine n-te ($n = 2, 3, 4, \ldots$) begleitende Gleichung von der oszillatorischen Gleichung (Q) einer Basis $[\alpha, \beta]$, dann liegt genau eine Nullstelle jeder unabhängigen Lösung derselben Gleichung zwischen je zwei benachbarten Nullstellen beliebiger Lösung der n-ten begleitenden Gleichung.

Satz 3. Es seien u eine beliebige Lösung der oszillatorischen Gleichung (Q), und U eine Lösung ihrer (ersten) begleitenden Gleichung (Q_1) einer Basis $[\alpha, \beta]$, $\beta \neq 0$, für welche (1) im Intervall j gilt. Dann ist zwischen je zwei benachbarten Nullstellen von $u \in (Q)$ ($U \in (Q_1)$) genau eine Nullstelle von $U \in (Q_1)$ ($u \in (Q)$).

Beweis. Nach Satz 1 ist die Gleichung (Q_1) oszillatorisch. Wenn $u \in (Q)$, bezeichnen wir mit $\xi_1 < \xi_2$ die Punkte in denen $u(\xi_i) = 0$, $\xi_i \in j$, $i = 1, 2$ und $u(t) \neq 0$ für $t \in (\xi_1, \xi_2)$. Nach dem zweiten Teil des Beweises von Satz 1 besteht ein derartiger Punkt $\bar{t} \in (\xi_1, \xi_2)$, daß $U(\bar{t}) = 0$ für die durch (1) definierte Lösung $U \in (Q_1)$. Der Punkt $\bar{t}$ ist der einzige dieser Eigenschaft im Intervall (ξ_1, ξ_2). In der Tat, ist $\bar{t}_1 \in (\xi_1, \xi_2)$, $\bar{t}_1 \neq \bar{t}$, ein weiterer Punkt in dem $U(\bar{t}_1) = 0$, dann läßt sich voraussetzen, daß $\bar{t} < t_1$. Auf analogem Wege, wie im ersten Teil des Beweises von Satz 1, läßt sich die Existenz von Punkt $\bar{\xi} \in (\bar{t}, \bar{t}_1)$ beweisen, in dem $u(\bar{\xi}) = 0$. Wegen $(\bar{t}, \bar{t}_1) \subset \subset (\xi_1, \xi_2)$ folgt $\bar{\xi} \in (\xi_1, \xi_2)$ im Widerspruch dazu, daß die Punkte ξ_i, $i = 1, 2$, zwei benachbarte Nullstellen von $u \in (Q)$ sind. Vollkommen analog beweist man auch den restlichen Teil der Satzaussage.

Bemerkung. Setzen wir $\alpha = 0$, $\beta = 1$, dann nach (1)

$$U(t) = \frac{u'(t)}{\sqrt{-Q(t)}} \qquad (t \in j).$$

Daraus läßt sich nach den Sätzen 1 und 3 das bekannte Ergebnis herleiten: Die Ableitung u' jeder Lösung u der oszillatorischen Gleichung (Q) oszilliert auch und die Nullstellen jeder Lösung u und ihre Ableitung u' untereinander separiert werden (Siehe [1]).

Betrachten wir neben (Q_1) noch eine (erste) begleitende Gleichung von (Q) einer Basis $[\gamma, \delta]$

$$y'' = \bar{Q}_1(t)\, y, \qquad (\bar{Q}_1)$$

wobei γ, δ reelle Konstanten $\gamma^2 + \delta^2 > 0$ darstellen. Folglich gilt nach [2] für den Träger $\bar{Q}_1$

$$Q_1(t) = Q(t) + \frac{\gamma\delta Q'(t)}{\gamma^2 - \delta^2 Q(t)} + \sqrt{\gamma^2 - \delta^2 Q(t)} \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma^2 - \delta^2 Q(t)}} \right)''$$

mit $t \in j$.

Wählen wir beliebig eine (nichttriviale) Lösung $u \in (Q)$ und bezeichnen wir mit $U(\alpha, \beta)$ bzw. $U(\gamma, \delta)$ die Lösung begleitender Gleichung (Q_1) einer Basis $[\alpha, \beta]$ bzw. die Lösung begleitender Gleichung $(\bar{Q}_1)$ einer Basis $[\gamma, \delta]$, für die in j

$$U(t; \alpha, \beta) = \frac{\alpha u(t) + \beta u'(t)}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 Q(t)}} \quad \text{bzw.} \quad U(t; \gamma, \delta) = \frac{\gamma u(t) + \delta u'(t)}{\sqrt{\gamma^2 - \delta^2 Q(t)}} \qquad (4)$$

gilt.

Betrachten wir nun besonders die Separation von Nullstellen gewisser Lösungen der oszillatorischen Gleichungen (Q) und $(\bar{Q}_1)$.

Satz 4. Es sei u eine beliebige nichttriviale Lösung oszillatorischer Gleichung (Q), $U(\alpha, \beta) \in (Q_1)$, $U(\gamma, \delta) \in (\bar{Q}_1)$ mit $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Dann existiert zwischen je zwei benachbarten Nullstellen von $U(\alpha, \beta) \in (Q_1)$ bzw. $U(\gamma, \delta) \in (\bar{Q}_1)$ genau eine Nullstelle von $U(\gamma, \delta) \in (\bar{Q}_1)$ bzw. $U(\alpha, \beta) \in (Q_1)$. Gilt $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$, dann sind die Nullstellen beider Lösungen $U(\alpha, \beta) \in (Q_1)$ und $U(\gamma, \delta) \in (\bar{Q}_1)$ identisch.

Beweis. Nach Satz 1 sind die Gleichungen (Q_1) und $(\bar{Q}_1)$ oszillatorisch. Es gelte $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Es sei u eine beliebige Lösung von (Q) und für die (4) in j befriedigende Lösung $U(\alpha, \beta) \in (Q_1)$ gelte $U(t_i; \alpha, \beta) = 0$, $i = 1, 2$, $t_1 < t_2$, $U(t; \alpha, \beta) \neq 0$ für $t \in (t_1, t_2)$. Vor allem ist

$$\gamma u(t_i) + \delta u'(t_i) \neq 0, \qquad i = 1, 2 \qquad (5)$$

denn sonst hätte das System

$$\alpha u(t_i) + \beta u'(t_i) = 0$$
$$\gamma u(t_i) + \delta u'(t_i) = 0, \qquad i = 1, 2$$

in bezug auf $U(t_i; \alpha, \beta) = 0$, $i = 1, 2$ und nach (4) die Lösung $u(t_i) = u'(t_i) = 0$. Wegen $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ wäre u eine triviale Lösung von (Q) im Widerspruch zur Voraussetzung des Satzes. Aus (4) und (5) folgt sofort $U(t_i; \gamma, \delta) \neq 0$ für $i = 1, 2$. Ferner nehmen wir an, es gäbe $U(t; \gamma, \delta) \neq 0$ für $t \in (t_1, t_2)$. Man überzeugt sich leicht durch Berechnung, daß für $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha u(t) + \beta u'(t)}{\gamma u(t) + \delta u'(t)}\right) = (\alpha\delta - \beta\gamma)\frac{u'^2(t) - Q(t)\,u^2(t)}{(\gamma u(t) + \delta u'(t))^2}, \tag{6}$$

wobei $\dfrac{u'^2(t) - Q(t)\,u^2(t)}{(\gamma u(t) + \delta u'(t))^2} > 0$. Durch Integration der Identität (6) im Intervall $\langle t_1, t_2 \rangle$ erhalten wir den Ausdruck

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha u(t) + \beta u'(t)}{\gamma u(t) + \delta u'(t)}\right)\right]dt = (\alpha\delta - \beta\gamma)\int_{t_1}^{t_2}\frac{u'^2(t) - Q(t)\,u^2(t)}{(\gamma u(t) + \delta u'(t))}\,dt$$

d. h.

$$\left[\frac{\alpha u(t) + \beta u'(t)}{\gamma u(t) + \delta u'(t)}\right]_{t_1}^{t_2} = (\alpha\delta - \beta\gamma)\int_{t_1}^{t_2}\frac{u'^2(t) - Q(t)\,u^2(t)}{(\gamma u(t) + \delta u'(t))^2}\,dt\,.$$

Da der Ausdruck auf der linken Seite der Gleichheit verschwindet, während der auf der rechten Seite von Null verschieden ist, ergibt dies einen Widerspruch. Daher gibt es eine Zahl $\xi \in (t_1, t_2)$ so beschaffen, daß $U(\xi; \gamma, \delta) = 0$. Es seien $\xi_i \in (t_1, t_2)$, $i = 1, 2$, $\xi_1 < \xi_2$ zwei Zahlen, für die $U(\xi_i; \gamma, \delta) = 0$ und $U(t; \gamma, \delta) \neq 0$ in $(\xi_1, \xi_2) \subset \subset (t_1, t_2)$. Wir integrieren die Identität

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\gamma u(t) + \delta u'(t)}{\alpha u(t) + \beta u'(t)}\right) = (\alpha\delta - \beta\gamma)\frac{u'^2(t) - Q(t)\,u^2(t)}{(\alpha u(t) + \beta u'(t))^2}$$

im Intervall $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle$, wobei wiederum $\dfrac{u'^2(t) - Q(t)\,u^2(t)}{(\alpha u(t) + \beta u'(t))^2} > 0$. Auf analogen Wege wie oben läßt sich herleiten, daß eine Zahl $\bar{t} \in (\xi_1, \xi_2)$ mit der Eigenschaft $U(\bar{t}; \alpha, \beta) = = 0$ besteht. Dies widerspricht jedoch der Voraussetzung des Satzes.

Ganz ähnlich geht man bei dem Beweis der Behauptung für die Nullstellen von der Lösung $U(\alpha, \beta) \in (Q_1)$ vor. Ist $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$, dann können folgende Fälle eintreten:

1. $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma \neq 0, \delta \neq 0$,
2. $\alpha = 0, \beta \neq 0, \gamma = 0, \delta \neq 0$,
3. $\alpha \neq 0, \beta = 0, \gamma \neq 0, \delta = 0$.

In jedem der vorliegenden Fälle gilt für $t \in j$

$$U(t; \gamma, \delta) = kU(t; \alpha, \beta)$$

wo k eine beliebige Konstante darstellt, $k \neq 0$.

Daraus geht hervor, daß $U(t; \gamma, \delta) = 0$ genau dann, wenn $U(t; \alpha, \beta) = 0$. Folglich die Nullstellen der Lösung $U(\alpha, \beta) \in (Q_1)$ und der Lösung $U(\gamma, \delta) \in (\bar{Q}_1)$ sind identisch.

Satz 5. Gegeben seien eine oszillatorische Gleichung (Q) und zwei begleitende Gleichungen (Q_1), $(\bar{Q}_1)$ der nacheinanderfolgenden Basen $[\alpha, \beta]$ und $[\gamma, \delta]$. Es seien ferner zwei linear abhängige Lösungen u, v von (Q). Ist $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, dann die Nullstellen von $U(\alpha, \beta) \in (Q_1)$ und $U(\gamma, \delta) \in (\bar{Q}_1)$, wobei

$$U(t; \alpha, \beta) = \frac{\alpha u(t) + \beta u'(t)}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 Q(t)}} \tag{7}$$

$$V(t; \gamma, \delta) = \frac{\gamma v(t) + \delta v'(t)}{\sqrt{\gamma^2 - \delta^2 Q(t)}} \qquad (t \in j) \tag{8}$$

untereinander separiert werden. Falls $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$, so fallen die Nullstellen von $U(\alpha, \beta)$ und $U(\gamma, \delta)$ zusammen.

Beweis. Nach Satz 1 sind auch beide Gleichungen (Q_1) und $(\bar{Q}_1)$ oszillatorisch. Nach der Voraussetzung des Satzes besteht eine reelle Konstante $h \neq 0$ so beschaffen, daß

$$u(t) = hv(t), \qquad (t \in j). \tag{9}$$

Durch Einsetzen von (9) in (7) ergibt sich für jedes $t \in j$

$$U(t; \alpha, \beta) = \frac{\alpha hv(t) + \beta hv'(t)}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 Q(t)}} = h\frac{\alpha v(t) + \beta v'(t)}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 Q(t)}} = hV(t; \alpha, \beta). \tag{10}$$

Wegen $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, $V(\alpha, \beta) \in (Q_1)$ und $U(\gamma, \delta) \in (\bar{Q}_1)$, nach Satz 4 folgt daraus, daß die Nullstellen von diesen Lösungen untereinander separiert werden. Da nach (10) $U(t; \alpha, \beta) = 0$ genau dann, wenn $V(t; \alpha, \beta) = 0$, ermittelt man daraus weiter, daß die Nullstellen von Lösungen $U(\alpha, \beta) \in (Q_1)$ und $V(\gamma, \delta) \in (\bar{Q}_1)$ auch untereinander separiert werden.

Es sei $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$; dann besteht eine Konstante $k \neq 0$ so beschaffen, daß

$$\alpha = k\gamma, \qquad \beta = k\delta. \tag{11}$$

Unter Berücksichtigung von (7), (8) und (9) erhalten wir für die Lösung $U(\alpha, \beta) \in$ $\in (Q_1)$ in j

$$U(t; \alpha, \beta) = h \operatorname{sgn} k V(t; \gamma, \delta),$$

wobei $h \operatorname{sgn} k \neq 0$. Offensichtlich fallen die Nullstellen der betrachteten Lösungen $U(\alpha, \beta)$ und $V(\gamma, \delta)$ zusammen.

Satz 6. Gegeben sei eine oszillatorische Gleichung (Q) mit zwei begleitenden Gleichungen (Q_1), $(\bar{Q}_1)$ von nacheinanderfolgenden Basen $[\alpha, \beta]$ und $[\gamma, \delta]$. Dabei seien u, v zwei linear unabhängige Lösungen von (Q). Wenn $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, dann liegen höchstens zwei Nullstellen von $V(\gamma, \delta) \in (\bar{Q}_1)$ bzw. $U(\alpha, \beta) \in (Q_1)$ zwischen beliebigen zwei benachbarten Nullstellen von $U(\alpha, \beta) \in (Q_1)$ bzw. $V(\gamma, \delta) \in (\bar{Q}_1)$. Wenn $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$, dann werden die Nullstellen von $U(\alpha, \beta) \in (Q_1)$ und $V(\gamma, \delta) \in \in (\bar{Q}_1)$ voneinander separiert.

Beweis. Aus Satz 1 folgt, daß die Gleichungen (Q_1) und $(\bar{Q}_1)$ oszillatorisch sind. Es seien $t_i \in j$, $i = 1, 2$ $(t_1 < t_2)$ zwei benachbarte Nullsteller von $U(\alpha, \beta) \in (Q_1)$. Der Satz gillt, falls keine Nullstelle von $V(\gamma, \delta) \in (\bar{Q}_1)$ zwischen den Stellen t_1 und t_2 liegt. Es gebe nun eine Lösung $V(\gamma, \delta) \in (\bar{Q}_1)$ mit wenigstens drei Nullstellen ξ_i, $\xi_i \in (t_1, t_2)$, $i = 1, 2, 3$, wo $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$. Betrachten wir die Lösung

$$V(t; \alpha, \beta) = \frac{\alpha v(t) + \beta v'(t)}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 Q(t)}}$$

von (Q_1), finden wir, daß hier, nach Satz 4, genau zwei benachbarte Nullstellen $\bar{t}_i$, $i = 1, 2$ von dieser Lösung so baschaffen existeren, daß $\xi_1 < \bar{t}_1 < \xi_2 < \bar{t}_2 < \xi_2$. Mithin $\bar{t}_i \in (t_1, t_2)$, $i = 1, 2$. Diese Beziehung führt zum Widerspruch, denn $U(\alpha, \beta)$ und $V(\alpha, \beta)$ sind zwei linear unabhängige Lösungen der oszillatorischen Gleichung (Q_1). Wenn $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$, dann ist (11) wiederum befriedigt. Daraus nach (7) und (11) ergibt sich im Intervall j

$$U(t; \alpha, \beta) = \operatorname{sgn} k \frac{\gamma u(t) + \delta u'(t)}{\sqrt{\gamma^2 - \delta^2 Q(t)}} = \operatorname{sgn} k U(t; \gamma, \delta) \,. \tag{12}$$

Da $U(\gamma, \delta)$ und $V(\gamma, \delta)$ linear unabhängige Lösungen oszillatorischer Gleichung (Q_1) darstellen, werden deren Nullstellen voneinander separiert. Wegen der Gültigkeit von (12) ergibt sich hieraus, daß auch die Nullstellen von $U(\alpha, \beta)$ und $V(\gamma, \delta)$ voneinander separiert werden.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] O. Borůvka: *Diferenciálne rovnice.* Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava, 1961.

[2] M. Laitoch: *L'équation associée dans la théorie des transformations des équations différentielle du second ordre.* Acta Univ. Palackianae Olomucensis, F. R. N. T. 12, 45—62 (1963).

Souhrn

NĚKTERÉ VLASTNOSTI ODDĚLOVÁNÍ NULOVÝCH BODŮ ŘEŠENÍ ROVNICE $y'' = Q(t)\,y$ A ŘEŠENÍ ROVNIC K NÍ PRŮVODNÍCH

JOSEF HOŠEK

V práci je dokázáno, že oscilatoričnost rovnice

$$y'' = Q(t)\,y \tag{Q}$$

je nutnou a postačující podmínkou pro oscilatoričnost n-té ($n = 1, 2, 3, \ldots$) průvodní rovnice k rovnici (Q) při bázi $[\alpha, \beta]$. Dále se vyšetřují vlastnosti oddělování nulových bodů řešení průvodních rovnic při bázích $[\alpha, \beta]$ a $[\gamma, \delta]$ k rovnici (Q).

Резюме

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОТДЕЛЕНИЯ НУЛЕВЫХ ТОЧЕК РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ $y'' = Q(t)\,y$ И РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ СОПРОВОДИТЕЛЬНЫХ

ИОСИФ ГОШЕК

В работе доказано, что колеблеемость всех решений уравнения

$$y'' = Q(t)\,y \tag{Q}$$

является необходимым и достаточным условием для колеблеемости всех решений n-того ($n = 1, 2, 3, \ldots$) сопроводительного уравнения (Q) при базисе $[\alpha, \beta]$.

Далее исследуются свойства отделения нулевых точек решений сопроводительных уравнений при базисе $[\alpha, \beta]$ и $[\gamma, \delta]$ к уравнению (Q).