Vladimír Kosek

Bemerkung zum Bochnerschen Integral

Sborník prací Přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci. Matematika, Vol. 18 (1979), No. 1, 35--41

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120080

1979 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM — TOM 61

BEMERKUNG ZUM BOCHNERSCHEN INTEGRAL

VLADIMÍR KOSEK

(*Eingelangt am 31. März 1978*)

Vorwort

Die Konstruktion des Bochnerschen Integrals liegt in der Verbindung der Konstruktion des Lebesgueschen Integrals mit einem Verfahren, das in dieser Arbeit beschrieben wird. Die Aufgabe dieser Arbeit war, eine solche Verallgemeinerung dieses Verfahrens zu finden, damit sich sowohl seine Anschaulichkeit als auch seine Brauchbarkeit (siehe Beispiel am Ende) potenzieren.

Der Autor hat zu dieser Arbeit seine Dissertation benutzt.

1. Einige topologische Eigenschaften

In der ganzen Arbeit sind (F, $\| \;\|$) und (G, $\| \;\|$), kurz nur F und G, zwei allgemein verschiedene Banachräume, und E ist ein reeller Vektorraum der auf einer nichtleeren Menge T definierten endlichen reellwertigen Funktionen.

Definition 1: *Es sei* X *ein reeller Vektorraum. Eine nichtnegative auf* X *definierte Funktion p heißt Halbnorm, wenn sie für alle x, $y \in$ X und jede reelle Zahl a erfüllt:*

$$p(ax) = |a| p(x) \tag{1}$$

$$p(x + y) \leqq p(x) + p(y). \tag{2}$$

Da $f \in$ E eine reellwertige Funktion ist, definiert das Produkt $f(t) \, . \, v (v \in$ F) auf T eine Abbildung φ von E × F in den Raum Y aller Funktionen von T in F.

Satz 1: *Es sei* H *die lineare Hülle von* φ(E × F). *Dann wird eine Halbnorm mit den folgenden Eigenschaften durch*

$$q(g) = \inf \{ \sum_1^n p(f_i) \| v_i \| ; \; g = \sum_1^n \varphi(f_i, v_i) \} \tag{3}$$

auf H *definiert.*

a) $q(\varphi(f, v)) = p(f) \, . \, \| v \|$.

b) Die Abbildung $u \to u \circ \varphi$ *ist eine lineare Isomorphie von dem Raum aller stetigen* *linearen Abbildungen von* (H, q) *in* (G, $\| \|$) *auf den Raum aller stetigen bilinearen (d. h. linearen in jeder Veränderlichen) Abbildungen von* (E, p) $\times$ (F, $\| \|$) *in* (G, $\| \|$).

c) *Sei* S *eine nichtleere Teilmenge von* T *und existiere im Raum aller reellwertigen endlichen Funktionen auf* T *eine solche vollständige Hülle* ($\bar{\mathrm{E}}_S$, $\bar{p}_S$) *von* (E, p), *die diese Eigenschaften hat:*

Auf $\bar{\mathrm{E}}_S$ *ist* $\bar{p}_S(|f|) = \bar{p}_S(f)$, $0 \leqq f \leqq g \Rightarrow \bar{p}_S(f) \leqq \bar{p}_S(g)$. *Für jedes* $f \in \mathrm{H}$ *ist* $q(f) = p(\| f(t) \|)$.

(4) *Wenn eine Reihe* $\Sigma f_n, f_n \in \mathrm{E}$, *in* ($\bar{\mathrm{E}}_S$, $\bar{p}_S$) *absolut konvergiert und* f *ihre Summe ist, besteht in* E *eine solche Reihe* $\Sigma \tilde{f}_n$ *und* $\tilde{f} \in \bar{\mathrm{E}}_S$, *daß* $p(\tilde{f}_n - f_n) = 0$, $\bar{p}_S(\tilde{f} - f) = 0$, *für jedes* $t \in \mathrm{S}$ *die Reihe* $\Sigma \tilde{f}_n(t)$ *absolut konvergiert und* $\tilde{f}(t)$ *ihre Summe ist.*
Für jede konvergierte Folge $\{f_n\}$, *die in jedem* $t \in \mathrm{S}$ *gegen eine engliche auf* T *definierte Funktion* f *konvergiert, gilt:* $f \in \bar{\mathrm{E}}_S$, $\bar{p}_S(f_n - f) \to 0$.

(5) *Wenn* $f(t) = g(t)$ *für alle* $t \in \mathrm{S}$ *gilt, ist* $\bar{p}_S(f) = \bar{p}_S(g)$.

Dann existiert in Y *eine solche vollständige Hülle* ($\bar{\mathrm{H}}_S$, $\bar{q}_S$) *von* (H, q), *die, schreiben wir statt* E H *und statt* p q, *die Eigenschaften (4) und (5) hat.*

Beweis von den Behauptungen a) und b) kann der Leser in [5], Abschnitt 6., Kapitel 3., finden. Dort sagt man auch, daß ein beliebiges Element x aus einer vollständigen Hülle (H_1, q_1) von (H, q) eine Summe der absolut konvergierten Reihe $\Sigma\varphi(f_i, v_i)$, wo $f_i \in \mathrm{E}$ und $v_i \in \mathrm{F}$, ist. Aber das heißt nach dem Satz 1a) und nach den Voraussetzungen in c), daß auch die Reihe (*) $\Sigma p(f_i) \| v_i \| = \Sigma p(\tilde{f}_i \| v_i \|)$ konvergiert. Von da und von den Anforderungen in c) bekommt man, daß die Reihe $\Sigma \| \tilde{f}_i(t) v_i \|$ für alle $t \in \mathrm{S}$ konvergiert und auf S eine Funktion $\tilde{f}$ mit Werten aus F definiert. Setzen wir für jedes $g \in \mathrm{Y}$, das auf S gleich $\tilde{f}$ ist, $g \in \bar{\mathrm{H}}_S$, und führen wir $\bar{q}_S(g)$ als den Wert von $q_1(x)$ ein. Wenn wir das für jedes (*) und $x \in \mathrm{H}_1$ durchführen, erhalten wir den Raum $\bar{\mathrm{H}}_S$ und die Halbnorm $\bar{q}_S$, die schon sichtlich alle Eigenschaften aus dem Satz 1c) haben.

Bemerkung 1: Wenn wir an Stelle einer Menge S ein System $\mathscr{R}$ dieser Mengen S annehmen und definieren:

$$f \in \bar{\mathrm{H}} \Leftrightarrow f \bar{\mathrm{H}}_S \quad \text{für ein } \mathrm{S} \in \mathscr{R} \quad \text{und} \quad \bar{q}(f) = \bar{q}_S(f)$$

genügt dazu, daß ($\bar{\mathrm{H}}$, $\bar{q}$) ein vollständiger Raum war, die Abgeschlossenheit von $\mathscr{R}$ bezüglich abzählbarer Durchschnitte.

2. Topologie und Verband

Dieser Abschnitt hat zwei Teile. Der erste Teil enthält eine Definition und zwei Sätze und der zweite ein wichtiges Beispiel.

Definition 2: *Es sei* X *ein reeller Vektorraum und* (X, $\leqq$) *ein Verband.* Dann X *heißt linearer Verband, wenn für alle* $x, y, z \in$ X *und jede positive Zahl* a

a) $x \leqq y \Rightarrow x + z \leqq y + z$,
b) $x \leqq y \Rightarrow ax \leqq ay$

gelten. Bezeichnen wir noch $\sup\{-x, x\}$ *durch* $|x|$.

Es sei S eine nichtleere Teilmenge von T, V der Raum aller endlichen auf T definierten reellwertigen Funktionen und die Relationen $=_S$ und $\leqq_S$ durch

$$f =_S g \Leftrightarrow f(t) = g(t) \qquad \text{für alle } t \in S$$
$$f \leqq_S g \Leftrightarrow f(t) \leqq g(t) \qquad \text{für alle } t \in S$$

bestimmt. Dann V ist mit $=_S$ und $\leqq_S$ ein linearer Verband. Endlich sei E ein Vektorteilraum von V, der bezüglich $=_S$ und $\leqq_S$ Verband ist.

Satz 2: *Seien* (F, $\| \; \|$) *und* (G, $\| \; \|$) *zwei Banachräume und* ψ *eine solche bilineare Abbildung von* E$\times$F *in* G, *daß für jedes* $f \in$ E

$$p(f) = \sup\{\sum_1^n \|\psi(f_i, v_i)\|; 0 \leqq_S f_i, \sum_1^n f_i \leqq_S |f|, \|v_i\| \leqq 1\} \tag{6}$$

endlich ist. Dann ist p *eine Halbnorm und*

a) auf E *ist* $p(|f|) = p(f)$,

$$p(|f| + |g|) = p(|f|) + p(|g|)$$

b) ψ: (E, p)$\times$(F, $\| \; \|$) $\to$ (G, $\| \; \|$) *ist stetig,*

c) jede andere Halbnorm mit den Eigenschaften a), b) definiert auf E *eine stärkere Topologie als* p.

Beweis: a) Wenn $0 \leqq_S f$, $0 \leqq_S g$, $e =_S f + g$ und ε eine positive Zahl ist, können wir nach (6) schreiben:

$$p(e) - \sum_1^n \|\psi(e_k, s_k)\| \leqq \varepsilon.$$

Bezeichnen wir $e_1^1 = \inf\{e_1, f\}$ und $e_1^2 = e_1 - e_1^1$. Die Eigenschaften von E gewährleisten, daß für $t \in$ S entweder $e_1^1(t) = e_1(t)$ oder $e_1^1(t) = f(t)$. Von da und aus der Beziehung $e_1 \leqq_S f + g$ bekommt man $e_1^1 \leqq_S f$ und $e_1^2 \leqq_S g$.

Definieren wir für $k = 2, \ldots, n$

$$e_k^1 = \inf\{e_k, f - \sum_1^{k-1} e_j^1\}, \qquad e_k^2 = e_k - e_k^1.$$

Wenn wir für $k = 2, \ldots, n$ dieselbe Betrachtung wie für $k = 1$, wobei wir statt f

$f = \sum_1^{k-1} e_j^1$ und statt g $g - \sum_1^{k-1} e_j^2$ stellen, ausführen, erhalten wir $\sum_1^n e_k^1 \leqq_S f$ und $\sum_1^n e_k^2 \leqq_S g$. Daher

$$p(f+g) \leqq \varepsilon + \sum_1^n \| \psi(e_k, s_k) \| = \varepsilon + \sum_1^n \| \psi(e_k^1 + e_k^2, s_k) \| \leqq \varepsilon + \sum_1^n \| \psi(e_k^1, s_k) \| +$$
$$+ \sum_1^n \| \psi(e_k^2, s_k) \| \leqq \varepsilon + p(f) + p(g), \text{ d. h. } p(f+g) \leqq p(f) + p(g)$$

Die umgekehrte Ungleichung und die Beziehung $p(|f|) = p(f)$ folgen direkt aus (6).

b) Jedes $f \in \mathrm{E}$ hat die Gestalt $f^+ - f^-$, wo $0 \leqq_S f^+, 0 \leqq_S f^-, |f| =_S f^+ + f^-$ (siehe [6]).

Es ist klar, daß ψ stetig ist, wenn

$$\| \psi(f, v) \| \leqq p(f) \| v \| \tag{7}$$

gilt. Beweisen wir jetzt für ψ (7).

Wenn $v = 0$, hat (7) sichtlich Gültigkeit. Sei $v \neq 0$, d. h. $\| v \| \neq 0$. Dann $\| v \| v \|^{-1} \| = 1$ und für f^+, f^- ist nach (6)

$$\| \psi(f^+, v \| v \|^{-1}) \| \leqq p(f^+)$$
$$\| \psi(f^-, v \| v \|^{-1}) \| \leqq p(f^-).$$

Davon $\| \psi(f^+, v) \| \leqq p(f^+) \| v \|$ und $\| \psi(f^-, v) \| \leqq p(f^-) \| v \|$. Durch die Verbindung der bisher erworbenen Erbegnisse über p bekommen wir (7).

c) Wenn p_1 die Eigenschaften a), b) hat, muß eine solche positive Zahl C bestehen, daß $\| \psi(f, v) \| \leqq Cp_1(f) \| v \|$ und für die in (6) auftretenden f_i, v_i $\| \psi(f_i, v_i) \| \leqq \leqq Cp_1(f_i) \| v_i \|$ ist. Daher $\sum_1^n \| \psi(f_i, v_i) \| \leqq Cp_1(\sum_1^n f_i) \leqq C(p_1(|f|) - \sum_1^n f_i) + p_1(\sum_1^n f_i)) = Cp_1(f)$, d. i. $p(f) \leqq Cp_1(f)$.

Sei (E, p) der Raum aus Satz 2 und $(\hat{\mathrm{E}}_S, \hat{p}_S)$ seine vollständige Hülle in V. Setzen wir voraus, daß $\hat{\mathrm{E}}_S$ bezüglich $=_S$ und $\leqq_S$ ein Verband ist und $\hat{p}_S$ die Eigenschaft a) aus Satz 2 hat.

Satz 3: *Wenn wir zu den schon angeführten Voraussetzungen und Bezeichnungen noch das Symbol* E_1 *für einen dichten linearen Teilverband von* $(\hat{\mathrm{E}}_S, \hat{p}_S)$ *hinzufügen, kann man die bilineare Abbildung* ψ *von* $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ *auf* $\mathrm{E}_S \times \mathrm{F}$ *eindeutig ausdehnen, wobei ihre Einschränkung auf* $\mathrm{E}_1 \times \mathrm{F}$ *eine Funktion durch* (6) *auf* E_1 *definiert, die auf* E_1 *gleich* $\hat{p}_S$ *ist.*

Beweis: Wir benutzen die Ungleichung (7) und wählen in (7) v fest. Dann ist ψ eine lineare stetige Abbildung, die wir auf $\hat{\mathrm{E}}_S$ ausdehnen können (siehe [6]). Führen wir das für jedes $v \in \mathrm{F}$ durch und bezeichnen wir diese Ausdehnung wieder mit ψ. ψ ist offenbar bilinear und die Ungleichung (7) hat Gültigkeit auf $\hat{\mathrm{E}}_{\mathrm{S}} \times \mathrm{F}$. Daraus folgt die Stetigkeit von ψ. Verwenden wir im Satz 2 statt E den Raum E_1, bekommen wir durch (6) auf E_1 eine Funktion (bezeichnen wir sie $\tilde{p}$), für die (7) auf $\mathrm{E}_1 \times \mathrm{F}$ die Gestalt

$$\| \psi(f, v) \| \leqq \tilde{p}(f) \,.\, \| v \| \tag{8}$$

hat. Nach Satz 2c) für $\tilde{p}$ muß die vollständige Hülle von $(\mathrm{E}_1, \tilde{p})$ den Raum $\hat{\mathrm{E}}_{\mathrm{S}}$ enthalten. Daher können wir (8) in gleicher Weise wie (7) auf $\hat{\mathrm{E}}_{\mathrm{S}} \times \mathrm{F}$ ausdehnen und durch Einsetzen (7) in (6) für $\tilde{p}$ und (8) in (6) für p bekommen wir den ganzen Beweis von Satz 3.

Bemerkung 2: Auch hier können wir statt S ein System $\mathscr{R}$ der nichtleeren Teilmengen von T in Betrachtung ziehen und Relationen $=$, $\leqq$ auf diese Art einführen:

$$f = g \Leftrightarrow f \leqq_{\mathrm{S}} g \qquad \text{für eine Menge } \mathrm{S} \in \mathscr{R}$$
$$f \leqq g \Leftrightarrow f \leqq_{S} g \qquad \text{für eine Menge } \mathrm{S} \in \mathscr{R}$$

Beispiel: Es sei T ein lokal kompakter Raum, W der Raum aller stetigen Abbildungen von T in F, deren Träger kompakt ist. Setzen wir $\mathscr{R} = \{\mathrm{T}\}$ und $\mathrm{E} = \mathrm{C}_\infty(\mathrm{T})$, siehe die Bemerkungen 1, 2, und [6]. Ferner sei W_{K}, bzw. E_{K}, ein Vektorraum aller Funktionen aus W, bzw. E, deren Träger die Teilmenge von der kompakten Menge K ist. Auf jedem W_{K} und E_{K} setzen wir die gleichmäßige Konvergenz voraus. Es sei J eine lineare Abbildung von W in G, deren Einschränkung auf die beliebige Menge W_{K} stetig ist.

Wählen wir eine kompakte Menge $\mathrm{K} \subset \mathrm{T}$ fest. Sichtlich ist $\varphi(\mathrm{E}_{\mathrm{K}} \times \mathrm{F}) \subset \mathrm{W}_{\mathrm{K}}$. Nach (3) aus Satz 1 kann man für eine beliebig kleine positive Zahl ε und g aus der linearen Hülle H_{K} von $\varphi(\mathrm{E}_{\mathrm{K}} \times \mathrm{F})$ schreiben:

$$\sum_1^n \| f_i \| \; \| v_i \| \leqq q(g) + \varepsilon, \qquad \text{wo } g = \sum_1^n \varphi(f_i, v_i)$$

Daher gilt für die Norm des Raumes W_{K}:

$$\| g \| \leqq \sum_1^n \| f_i \| \,.\, \| v_i \| \leqq q(g) + \varepsilon, \qquad \text{d. h. } \| g \| \leqq q(g)$$

Daraus folgt, daß J auf $(\mathrm{H}_{\mathrm{K}}, q)$ stetig ist. Nach Satz 1b) ist auch $\psi = \mathrm{J} \circ \varphi$ eine stetige Abbildung von $\mathrm{E}_{\mathrm{K}} \times \mathrm{F}$ in G.

Setzen wir voraus, daß die Funktion p aus Satz 2 für jedes $f \in \mathrm{E}_{\mathrm{K}}$ und jede kompakte Menge K existiert. Aus (6) folgt die Eindeutigkeit der auf diese Weise auf E definierten Funktion p.

Nach [6], Seite 76, können wir zu einer kompakten Menge $\mathrm{K}_1 \subset \mathrm{T}$ eine kompakte Menge K_2 wählen, daß $\mathrm{K}_1 \subset \mathrm{K}_2$ und eine nichtnegative Funktion $f_2 \subset \mathrm{E}_{\mathrm{K}_2}$, die auf K_1 gleich 1 ist, besteht. Daraus folgt: Für $f \in E$, d. h. $f \in E_{K_1}$ für eine K_1, ist auf T $|f(t)| \leqq \|f\|$ und $p(f) \leqq p(\|f\|) \cdot f_2 - |f|) + p(|f|) = p(f_2) \|f\|$. Also p ist in $(E_K, \| \|)$ stetig.

Nach [6] ist zu p ein Maß μ zugeordnet ($p(f) = \int |f(t)| d\mu$). Sei $\mathscr{R}$ jetzt die Menge aller Teilmengen A von T, die die Gleichung $\mu(T - A) = 0$ erfüllen, und sei E der Raum integrierbarer Treppenfunktionen. Dann können wir ψ auf $E \times F$ eindeutig ausdehnen und nach Satz 1b), c) und Bemerkung 1 zu ψ auf $(\overline{H}, \bar{q})$ eindeutig eine lineare stetige Abbildung I von $\overline{H}$ in G zuordnen. I heißt das Bochnersche Integral.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] N. Dinculeanu: *Vector Measures.* Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1966.

[2] N. Dunford—J. T. Schwartz: *Linear Operators.* Part I: General Theory. New York, Interscience Publishers, Inc. 1958.

[3] P. R. Halmos: *Measure Theory.* Princeton—New York, D. Van Nostrand Co., Inc. 1950.

[4] J. L. Kelley: *General Topology.* Princeton—New York, D. Van Nostrand Co., Inc. 1955.

[5] Ch. Šefer: *Topologičeskie vektornye prostranstva.* Moskva, Mir, 1971.

[6] A. E. Taylor: *Úvod do funkcionální analýzy.* Praha, Academia, 1973.

Adresa autora: Vladimír Kosek, lékařská fakulta UK v Hradci Králové, výpočetní středisko, Šimkova 870

Shrnutí

POZNÁMKA K BOCHNEROVU INTEGRÁLU

VLADIMÍR KOSEK

Přechod od Lebesgueova integrálu k Bochnerovu integrálu spočívá na těchto principech: Určitému topologickému prostoru E reálných funkcí definovaných na T a normovanému prostoru F se přiřadí topologický prostor H zobrazení z T do F tak, že mezi spojitými lineárními zobrazeními na H a spojitými bilineárními zobrazeními na $E \times F$ existuje vzájemně jednoznačná korespondence (viz věta 1, kde se také sleduje vztah mezi zúplněním prostorů E a H při speciální volbě E). Druhý princip se týká vztahů mezi topologií v E a bilineárním zobrazením na $E \times F$ (viz věty 2 a 3). Přístup k těmto principům jsem zvolil tak, aby se zvýšila jejich názornost a použitelnost (viz příklad). Co se týče důkazů jednotlivých tvrzení, byly důkazy provedeny jen tam, kde nebyl možný odkaz na literaturu.

Резюме

ЗАМЕЧАНИЕ К ИНТЕГРАЛУ БОХНЕРА

ВЛАДИМИР КОСЕК

Переход от интеграла Лебега к интегралу Бохнера состоит в следующих принципах: определенное топологическое пространство E действительных функций, определяемых на T и нормированное пространство T приводится в соответствие с топологическим пространством H отображений T в T так, что между непрерывными линейными отображениями на H и непрерывными билинейными отображениями на E $\times$ T существует взаимно однозначная корреспонденция (см. теорема 1, где также исследуется отношение между пополнением пространств E и H при специальном выборе E). Второй принцип касается отношений между топологией в E и билинейным отображением на E $\times$ T (см. теоремы 2 и 3). Подход к данным принципам выбирается таким образом, чтобы повысить их наглядность и применяемость (см. пример). В отношение доказательств отдельных утверждений указывается, что доказательства делаются лишь там, где невозможна ссылка на литературу.