Sborník prací Přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci. Matematika

Jindřich Palát

О преобразованиях первых интегралов двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

Sborník prací Přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci. Matematika, Vol. 14 (1974), No. 1, 45--62

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/120032`

1974 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM — TOM 45

Katedra matematické analýzy přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci. Vedoucí katedry: prof. RNDr. Miroslav Laitoch, kandidát věd.

О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯД КА

ИНДРЖИХ ПАЛАТ

(*Поступило в редакцию* 3. 6. 1969 *г.*)

Настоящая работа является обощением работы [2].

1. Основные понятия и обозначения

В настоящей работе обозначаем матрицы большими буквами (A, B, ...), тогда как ее элементы обозначим соответствующей малой буквой (a_{ik}, b_{ik}, ...). Нулевую матрицу типа (n/k) обозначим символом $0(n/k)$ и единичную матрицу типа (n/n) буквой E. Транспонированную матрицу соответствующую матрице $A, B, \ldots$ обозначим $A', B', \ldots$. Строчную матрицу типа $(1/n)$ будем часто рассматривать как точку n-размерного Евклидова пространства.

Далее в настоящей работе предполагается, что все рассматриваемые функции многих переменных имеют в своей области определения непрерывные частные производные первого порядка по независимым переменным. Для обозначения этих частных производных используем индексы, например $\dfrac{\partial z}{\partial x_k} = z_{x_k}$, где $z = z(x_1, \ldots, x_n)$.

Обозначим

$$\bar{A}(z) = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11}(z) \ldots \bar{a}_{1n}(z) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{a}_{n1}(z) \ldots \bar{a}_{nn}(z) \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad z_X = \begin{pmatrix} z_{x_1} \\ \vdots \\ z_{x_n} \end{pmatrix},$$

$\bar{g}_k = \bar{a}_{k1}(z)\, x_1 + \ldots + \bar{a}k_{kn}(z)\, x_n$, $\bar{G}' = (\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_n)$. О функциях $\bar{a}_{ik}(z)$, i, $k = 1, 2, \ldots, n$, $c(z) \neq 0$ предполагаем, что они определены и непрерывны на интервале o_1 и что для каждого $z \in o_1$ $|\bar{A}(z)| \neq 0$. Тогда вместо уравнения

$$\sum_{k=1}^{n \geq 2} (\bar{a}_{k1}(z)\, x_1 + \ldots + \bar{a}_{kn}(z)\, x_n)\, z_{x_k} = c(z)$$

можно рассматривать уравнение

$$\sum_{k=1}^{n\geqq 2}(a_{k_1}(z)\,x_1 + \ldots + a_{kn}(z)\,x_n)\,z_{x_k} = 1, \tag{1}$$

получающееся из предыдущего делением на функцию $c(z)$ $(a_{ki}(z) = \bar{a}_{ki}(z) : c(z))$.

Квазилинейное уравнение в частных производных первого порядка (1) будем всегда рассматривать в области $o_{n+1} = \{z \in o_1, X' \in o_n\}$, где o_n обозначает n-размерное Евклидово пространство ($n \geqq 2$), несодержащее начало координат. Искомое решение z является функцией независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$. Уравнению (1) соответствует матричное уравнение

$$X'A'(z)\,z_X = 1 \tag{1}$$

или

$$G'z_X = 1,$$

где $G = \bar{G} : c\,(z)$.

Лемма 1.1. *Матрица $A(z)\,X = G$ типа $(n/1)$ отлична в каждой точке области o_{n+1} от нулевой матрицы.*

Доказательство. Допустим, что в точке $(z_0, x_{01}, \ldots, x_{0n}) = (z_0, X_0') \in o_{n+1}$, $A(z_0)\,X_0 = 0(n/1)$. Тогда имеет место система уравнений

$$a_{11}(z_0)\,x_{01} + \ldots + a_{1n}(z_0)\,x_{0n} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n1}(z_0)\,x_{01} + \ldots + a_{nn}(z_0)\,x_{nn} = 0.$$

Так как $|\,A(z_0)\,| \neq 0$, то необходимо, чтобы $X_0 = 0(n/1)$. Однако, по предположению $0'(n/1) \notin o_n$. Следовательно, $A(z_0)\,X_0 \neq 0(n/1)$.

Как известно, уравнению (1) соответствует характеристическая система уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}(z)\,x_1 + \ldots + a_{1n}(z)\,x_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(z)\,x_1 + \ldots + a_{nn}(z)\,x_n,$$
$$\frac{dz}{dt} = 1,$$

которую перепишем в эквивалентную систему

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dz} &= a_{11}(z)\,x_1 + \ldots + a_{1n}(z)\,x_n,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{dx_n}{dz} &= a_{n1}(z)\,x_1 + \ldots + a_{kn}(z)\,x_n,\end{aligned} \tag{2}$$

которую в свою очередь перепишем в матричный вид

$$\frac{dX}{dz} = A(z)X \qquad (= G). \tag{A}$$

Система (2) удовлетворяет на области o_{n+1} условиям теоремы о существовании и однозначности решения (см. [1] стр. 167), на основании которой через каждую точку $(z_0, X_0') \in o_{n+1}$ проходит как раз одно решение $\Phi(z)$,

$$\Phi'(z) = (\varphi_1(z), \ldots, \varphi_n(z)) \tag{3}$$

системы (2), определенное на интервале o_1 и имеющее свои концевые точки на границе области o_{n+1} (см. [1] стр. 167). Это решение определяет интегральную кривую, называемую характеристикой (характеристической кривой) системы (2) или уравнения (A).

Замечание 1.1. Для функций n и $n + 1$ переменных будем употреблять сокращенные обозначения: $f(x_1, \ldots, x_n) = f(X')$ и $f(z, x_1, \ldots, x_n) = f(z, X')$.

Определение 1.1. Функция $n + 1$ переменных $f(z, X')$ определенная в области o_{n+1}, где $f(z, X') \not\equiv \text{const}$, называется первым интегралом системы (2), уравнения (A) и (1), если она вдоль любой характеристики (3) постоянна, т. е. $f(z, \Phi'(z)) \equiv \text{const}$ для всех $z \in o_1$.

Как известно, функция $f(z, X')$, определенная в области o_{n+1} является первым интегралом системы (2), уравнения (A) и (1) тогда и только тогда, если она в этой области удовлетворяет тождеству

$$f_z + f_{x_1}g_1 + \ldots + f_{x_n}g_n \equiv 0. \tag{4}$$

Функциональную зависимость понимаем согласно определений 1 и 2 [1] стр. 302. Для определения (не)зависимости функций используем критерии, приведенные в [1] на стр. 302 и 310. Далее будем пользоваться обозначениями

$$\frac{D(f_1, \ldots, f_{k+1})}{D(z, x_1, \ldots, x_n)} = \begin{vmatrix} f_{1z} & f_{1x_1} & \cdots & f_{1x_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{(k+1)z} & f_{(k+1)x_1} & \cdots & f_{(k+1)x_k} \end{vmatrix},$$

$$\frac{M(f_1, \ldots, f_k)}{M(z, x_1, \ldots, x_i)} = \begin{pmatrix} f_{1z} & f_{1x_1} & \cdots & f_{1x_i} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{kz} & f_{kx_1} & \cdots & f_{kx_i} \end{pmatrix},$$

где $1 \leqq i, k \leqq n$.

Определение 1.2. Первый интеграл $f(z, X')$ системы (2), уравнения (A) и (1) называется главным интегралом, если в каждой подобласти $\tilde{o}_{n+1}$ области $o_{n+1}(\tilde{o}_{n+1} \subset o_{n+1}) f(z, X') \not\equiv \text{const.}$ и $f_z(z, X') \not\equiv 0$.

Определение 1.3. Функции

$$f_1(z, X'), \ldots, f_n(z, X')$$

назовем фундаментальными интегралами системы (2), уравнения (A) и (I), если они в области o_{n+1} независимые и если каждая из этих n-функций является главным интегралом системы (2), уравнения (A) и (I).

Заметим, что если $f(z, X')$ есть главный интеграл уравнения (1), то в соответствующей окрестности любой точки $(z_0, X_0') \in o_{n+1}$, где $f_z(z_0, X_0') \neq 0$, определяет уравнение $f(z, X') = f(z_0, X_0')$ однозначно решение уравнения (I), проходящее через точку (z_0, X_0').

2. Преобразование точек $(n+1)$-размерного Евклидова пространства

Обозначим

$$B(u) = \begin{pmatrix} b_{11}(u) \dots b_{1n}(u) \\ \dots\dots\dots\dots \\ b_{n1}(u) \dots b_{nn}(u) \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad u_Y = \begin{pmatrix} u_{y_1} \\ \vdots \\ u_{y_n} \end{pmatrix},$$

$h_k = b_{k1}(u)\, y_1 + \dots + b_{kn}(u)\, y_n$ и $H' = (h_1, \dots, h_n)$. О функциях $b_{ik}(u)$ предполагаем, что они на интервале j_1 определены, непрерывны и что для каждого $u \in j_1$ $|B(u)| \neq 0$.

Уравнение

$$\sum_{k=1}^{n \geqq 2} \left(b_{kl}(u)\, y_1 + \dots + b_{kn}(u)\, y_n\right) u_{y_k} = 1,$$

также будем всегда рассматривать в области $j_{n+1} = \{u \in j_1, Y' \in o_n\}$, где $n \geqq 2$. Искомое решение рассматриваем как функцию n независимых переменных $y_1, \dots, y_n$.

Матричный вид уравнения (1):

$$H' u_Y = 1 \text{ или } Y' B'(u)\, u_Y = 1. \qquad \textbf{(II)}$$

Уравнению (II) соответствует характеристическое уравнение

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}u} = B(u)\, Y. \qquad \textbf{(B)}$$

Замечание 2.1. В дальнейшем будем без оговорки о функции $u = r(z)$ предполагать (см. [3]), что она на интервале o_1 определена, обладает непрерывной производной отличной от нуля, отображает интервал o_1 на интервал $j_1 (j_1 = r(o_1))$ и точку $z_0 \in o_1$ на точку $u_0 \in j_1 (u_0 = r(z)_0))$. Функцию, определенную на j_1 и обратную к функции $u = r(z)$ обозанчим $z = r^{-1}(u)$.

В дальнейшем будем часто рассматривать разные множества. Условимся, что множество обозначим буквой m. Так например, множество точек интервала j_1, области o_{n+1} обозначим mj_1, mo_{n+1}.

Выберем функцию $u = r(z)$ и рассмотрим систему n^2 дифференциальных уравнений

$$\frac{dK_{im}}{dz} = \sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij}(z)\, k_{jm} - b_{jm}(r(z))\, k_{ij} \frac{dr(z)}{dz} \right), \tag{2}$$

где $i, m = 1, 2, \ldots, n$. Систему (2) перепишем в матричный вид

$$\frac{dK}{dz} = A(z)\,K(z) - K(z)\,B(r(z))\frac{dr(z)}{dz}. \tag{K}$$

Согласно леммы 1[3] существует для любой матрицы K_0 и выбранной функции $u = r(z)$ единственное решение $K(z)$ уравнения (K), определенное на интервале o_1 и удовлетворяющее начальному условию $K(z_0) = K_0$. Согласно замечанию 2[3], это решение на интервале o_1 регулярно (т. е. $|K(z)| \neq 0$ для $z \in o_1$), если $|K_0| \neq 0$. Наоборот, решение $K(z)$ на интервале o_1 сингулярно (т. е. $|K(z)| = 0$ для $z \in o_1$), если $|K_0| = 0$. Пусть $K(z)$ регулярное решение на интервале o_1, тогда обратная матрица $K^{-1}(z)$, $z = r^{-1}(u)$ удовлетворяет на интервале $j_1(j_1 = r(o_1))$ уравнению

$$\frac{dK^{-1}(r^{-1}(u))}{du} = B(u)\,K^{-1}(r^{-1}(u)) - K^{-1}(r^{-1}(u))\,A(r^{-1}(u))\frac{dr^{-1}(u)}{du}. \quad (K^{-1}).$$

Замечание 2.2. В дальнейшем будем без оговорки предполагать, что матрица $K(z)$ определена на интервале o_1 и является решением уравнения (K), соответствующем функции $u = r(z)$ и начальному условию K_0.

Определение 2.1. В области j_{n+1} определим преобразование $\bar{B}$ так, что каждой точке $(u, Y') \in j_{n+1}$ ставим в соответствие точку (z, X') $(n + 1)$ – размерного пространства $(z, x_1, \ldots, x_n)$, согласно следующих равенств:

$$z = r^{-1}(u), \quad X = K(z)\,Y. \tag{$\bar{B}$}$$

Заметим, что равенство $(\bar{B})$ определяет преобразование $\bar{B}$ как однозначное. Будем пользоваться следующей записью:

$$\bar{B}(u, Y') = (\bar{B}u, \bar{B}Y') = (r^{-1}(u), /K(r^{-1}(u))Y/') = (z, /K(z)Y/') = (z, X').$$

Теорема 2.1. *Пусть преобразование $\bar{B}$ определено функцией $u = r(z)$ и сингулярной матрицей $K(z)$.*

Тогда $\bar{B}$ преобразует множество точек mj_{n+1} в множество точек $m\bar{o}_{n+1} = m\bar{o}_{n+1} \cup m(z, 0, \ldots, 0)$, где $z \in o_1$.

Доказательство. Пусть $u_0 \in j_1$. Так как $|K(r^{-1}(u_0))| = 0$, *то существуют* точки $(u_0, Y') \in j_{n+1}$, для которых $K(r^{-1}(u_0))\,Y = 0(n/1)$; значит точки, которые $\bar{B}$ преобразует в точку $(z_0, 0, \ldots, 0)$, $z_0 = r^{-1}(u_0)$).

С другой стороны, нельзя в общем утверждать, что любая точка $(z_0, X') \in o_{n+1}$ имеет в преобразовании $\bar{B}$ свой прообраз. Это вытекает из того, что в силу сингулярности матрицы $K(z)$, вообще говоря, не обязательно существует решение Y уравнения $K(r^{-1}(u_0))\,Y = X_0$.

Теорема 2.2. *Пусть преобразование $\bar{B}$ определено функцией $u = r(z)$ и регулярной матрицей $K(z)$.*

Тогда $\bar{B}$ преобразует множество mj_{n+1} на множество mo_{n+1}.

Доказательство. Пусть $(u_0, Y_0') \in mj_{n+1}$. так как матрица $K(z)$ регулярная, то согласно лемме 1.1 $K(r^{-1}(u_0))\,Y_0 \neq 0(n/1)$. Следовательно, $\bar{B}(u_0, Y_0) = (r^{-1}(u_0), \; /K(r^{-1}(u_0))\,Y_0/') \in mo_{n+1}$. Рассмотрим произвольную точку $(z_1, X_1') \in mo_{n+1}$. Пусть $u_1 = r(z_1)$, $Y_1 = K^{-1}(r^{-1}(u_1))\,X_1 (\neq 0(n/1))$. Очевидно, точка $(u_1, \; Y_1') \in mj_{n+1}$. Кроме того она является прообразом точки (z_1, X_1'): $\bar{B}(u_1, Y_1') = (r^{-1}(u_1), /K(r^{-1}(u_1))\,Y_1/') = (z_1, /K(z_1)\,K^{-1}(z_1)\,X_1/') = (z_1, X_1')$.

Определение 2.2. Пусть $\bar{B}$ преобразование множества mj_{n+1} на (в) множество $mo_{n+1}(m\bar{o}_{n+1})$, определенное функцией $u = r(z)$ и регулярной (сингулярной) матрицей $K(z)$.

Тогда точку $(z_1, X_1') \in mo_{n+1} (\in m\bar{o}_{n+1})$ назовем сопряженной по отношению к преобразованию $\bar{B}$ с точкой $(u_1, Y_1') \in mj_{n+1}$, если $\bar{B}(u_1, Y_1') = (z_1, X_1')$.

Теорема 2.3. *Пусть преобразование $\bar{B}$ определено функцией $u = r(z)$ и регулярной матрицей $K(z)$.*

Тогда $\bar{B}$ преобразует множество mj_{n+1} на множество mo_{n+1} взаимнооднозначно, причем обратное преобразование $\bar{B}^{-1}$ определено равенствами:

$$u = r(z), \; Y = K^{-1}(z)\,X. \qquad (\bar{B}^{-1})$$

Доказательство. Пусть $(u_1, Y_1') \neq (u_2, Y_2')$ две точки множества mj_{n+1}. Если $u_1 \neq u_2$, то в силу строгой монотонности функции $r^{-1}(u)$ есть $r^{-1}(u_1) \neq r^{-1}(u_2)$ и, следовательно, $\bar{B}(u_1, Y_1') \neq \bar{B}(u_2, Y_2')$. Если $u_1 = u_2$, то обязательно $Y_1 \neq Y_2$ и в силу регулярности матрицы $K(z)$ $K(r^{-1}(u_1))\,Y_1 \neq K(r^{-1}(u_2))\,Y_2$; значит опять $\bar{B}(u_1, Y_1') \neq \bar{B}(u_2, Y_2')$.

Вторую часть утверждения теоремы проверим непосредственным подсчетом:

$$\bar{B}^{-1}\bar{B}(u, Y') = \bar{B}^{-1}(r^{-1}(u), /K(r^{-1}(u))\,Y/') =$$
$$= B^{-1}(z, /K(z)\,Y/') = (r(z), /K^{-1}(z)\,K(z)\,Y|') = (u, Y').$$

Замечание 2.3, Пусть $\bar{B}$ взаимнооднозначное преобразование множества mj_{n+1} на множество mo_{n+1} и $(z_0, X_0') \in mo_{n+1}$ сопряженная точка по отношению к $\bar{B}$ с точкой $(u_0, Y_0') \in mj_{n+1}$. Из теоремы 2.3 тогда следует, что (u_0, Y_0') будет сопряженной точкой по отношению к обратному преобразованию $\bar{B}'$ с точкой (z_0, X_0'). Договоримся, что в таком случае назовем точки (z_0, X_0') и (u_0, Y_0') просто сопряженными.

Замечание 2.4. Из свойств функции $u = r(z)$ и матрицы $K(z)$ вытекает, что $\bar{B}$ преобразование непрерывное и, следовательно, как известно, отображает каждую область из j_{n+1} на определенную область из o_{n+1}.

Лемма 2.1. *Пусть* $X_0' \in o_n$, $Y_0' \in o_n$.

Существует регулярная числовая матрица K_0 *типа* (n/n) *такая, что* $K_0 Y_0 = X_0$.

Доказательство. Построим матрицы типа (n/n) $X = (X_0, X_2, \dots X_n)$ и $Y = (Y_0, Y_2, \dots, Y_n)$, где $X_2', \dots, X_n' \in o_n$ и $Y_2', \dots, Y_n' \in o_n$ выбраны так, чтобы $|X| \neq 0$ и $|Y| \neq 0$. Тогда матричное уравнение $KY = X$ имеет единственное решение $K_0 = XY^{-1}$, причем $K_0 Y_0 = X_0$.

Теорема 2.5. *Пусть* $(u_0, Y_0') \in mj_{n+1}$ и $(z_0, X_0') \in mo_{n+1}$.

Существует взаимнооднозначное преобразование $\bar{B}$ *множества* mj_{n+1} *на множество* mo_{n+1} *такое, что точки* (u_0, Y_0'), (z_0, X_0') *будут сопряженными.*

Доказательство. Определим функцию $u = r(z)$ и регулярную матрицу $K(z)$ так, чтобы $u_0 = r(z_0)$ и $K(z_0) Y_0 = X_0$ (см. лемму 2.1). Этим выбором определено какое-то взаимоотнозначное преобразование множества mj_{n+1} на множество mo_{n+1}, причем $\bar{B}(u_0, Y_0') = (r^{-1}(u_0), /K(z_0) Y_0/') = (z_0, X_0')$.

Определение 2.4. N точек $(u_0, Y_1'), \dots, (u_0, Y_n')$ $(n + 1)$ – размерного пространства назовем регулярными, если матрица типа (n/n) $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ регулярная.

Теорема 2.6. *Пусть* $\bar{B}$ *взаимнооднозначное преобразование* mj_{n+1} *на множетсво* mo_{n+1}.

Тогда $\bar{B}(\bar{B}')$ *преобразует регулярные точки* $(u_0, Y_1'), \dots, (u_0, Y_n')$ $((z_0, X_1'), \dots, (z_0, X_n'))$ *пространства* $j_{n+1}(o_{n+1})$ *опять в регулярные точки* $\bar{B}(u_0, Y_1'), \dots, \bar{B}(u_0, Y_n')$ $(\bar{B}'(z_0, X_1'), \dots, \bar{B}'(z_0, X_n'))$ *пространства* $o_{n+1}(i_{n+1})$.

Доказательство. Для любого $i = 1, 2, \dots, n$ $\bar{B}(u_0, Y_i') = (z_0, X_i')$, где $z_0 = r^{-1}(u_0)$ и $X_i = K(r^{-1}(u_0)) Y_i$. Матрица $(X_1, \dots, X_n) = (K(r^{-1}(u_0)) Y_1, \dots, K(r^{-1}(u_0)) Y_n) = K(r^{-1}(u_0)) (Y_1, \dots, Y_n)$ регулярна, так как регулярны матрицы $K(r^{-1}(u_0))$ и $(Y_1, \dots, Y_n)$. Таким же образом проверяется правильность второй части утверждения теоремы.

Теорема 2.7. *Пусть* $(u_0, Y_1'), \dots, (u_0, Y_n')$ $(z_0, X_1'), \dots, (z_0, X_n')$ *любые регулярные точки из соответствующих областей* j_{n+1} и o_{n+1}.

Существует взаимооднозначное преобразование $\bar{B}$ *множества* mj_{n+1} *на множество* mo_{n+1} *такое, что эти точки будут сопряженными, т. е.* $\bar{B}(u_0, Y_i') = (z_0, X_i')$.

Доказательство. Определим функцию $u = r(z)$ так, чтобы $u_0 = r(z_0)$. Регулярная матрица $K(z)$ пусть удовлетворяет начальному условию $(X_1', \dots, X_n') = K(r^{-1}(u_0)) (Y_1', \dots, Y_n')$. Этим определено преобразование множества mj_{n+1} на mo_{n+1}, причем $\bar{B}(u_0, Y_i') = (r^{-1}(u_0), /K(r^{-1}(u_0)) Y_i/') = (z_0, X_i')$.

Из последней теоремы вытекает, что взаимооднозначное преобразование

$\bar{B}$ множества mj_{n+1} на множество mo_{n+1} определено двумя системами регулярных точек однозначно с точностью до функции $u = r(z)$, которая должна удовлетворять только условию $u_0 = r(z_0)$.

3. Преобразование характеристик

Для дальнейших рассуждений выгодно рассматривать характеристическое уравнение (A) на множество $m\bar{o}_{n+1}$. Так как $|A(z)| \neq 0$ для $z \in o_1$, то любой точкой $(z, 0, \ldots, 0) \in m\bar{o}_{n+1}$ проходит одна и таже характеристика $\Phi_0(z) = 0(1/n)$. Обозначим множество характеристик уравнения (A) $((B))$ mA (mB) и $m\bar{A} = mA \bigcup \Phi_0$. Далее пусть $mY(u)$ множество всех непрерывных кривых $Y' = (y_1(u), \ldots, y_n(u))$, $u \in j_1$, лежащих в области $\bar{j}_{n+1} = j_{n+1} \bigcup (u, 0, \ldots, 0)$, $u \in j_1$.

Определение 3.1. На множестве $mY(u)$ определяем преобразование $\bar{H}$ так, что каждой кривой ставим в соответствие кривую $X(z)$, лежащую в области $\bar{o}_{n+1}$ согласно равенству:

$$X(z) = K(z)\,Y(r(z)). \qquad (\bar{H})$$

Как видно из $(\bar{H})$ преобразование $\bar{H}$ однозначно и определено при помощи функции $u = r(z)$ и матрицы $K(z)$.

Теорема 3.1. *Пусть преобразование $\bar{H}$ определено функцией $u = r(z)$ и сингулярной матрицей $K(z)$.*

Тогда $\bar{H}$ преобразует множество mB в множество $m\bar{A}$.

Доказательство. Пусть $\Psi(u) \in mB$. Очевидно, что преобразованная кривая $\bar{H}\Psi(u) = K(z)\,\Psi(r(z)) = \Phi(z)$ на интервале o_1 определена, непрерывна и имеет свои концевые точки на границе области o_{n+1}. Покажем, что эта кривая является характеристикой уравнения (A):

$$\frac{d\Phi(z)}{dz} = \frac{dK(z)}{dz}\Psi(r(z)) + K(z)\frac{d\Psi}{du}\frac{dr(z)}{dz} =$$
$$= \left(A(z)\,K(z) - K(z)\,B(r(z))\frac{dr(z)}{dz}\right)\Psi(r(z)) + K(z)\,B(u)\,\Psi(u)\frac{dr(z)}{dz} =$$
$$= A(z)\,K(z)\,\Psi(r(z)) = A(z)\,\Phi(z);$$

здесь мы использовали то, что $u = r(z)$, $K(z)$ — решение уравнения (K) и $\Psi(u)$-решение уравнения (B). В силу сингулярности матрицы $K(z)$ возможно, что в некоторой точке $z_0 \in o_1 K(z_0)\,\Psi(r(z_0)) = 0(n/1)$. В таком случае, необходимо $K(z)\,\Psi(z) = \Phi_0(z)$.

Теорема 3.2. *Пусть преобразование $\bar{H}$ определено функцией $u = r(z)$ и регулярной матрицей $K(z)$.*

Тогда $\bar{H}$ преобразует множество mB на множество mA.

Доказательство. Из регулярности матрицы $K(z)$ вытекает, что для характеристики $\Psi(u) \in mB$ есть $K(z)\,\Psi(r(z)) \neq \Phi_0(z)$.

Далее, таким же образом как в теореме 3.1 можно проверить, что функция $K(z)\,\Psi(r(z))$ есть характеристикой уранения (A). Функция $u = r(z)$ и матрица $K(z)$, определют преобразование $\bar{H}$ и одновременно, согласно теореме 2.3, взаимнооднозначное преобразование $\bar{B}$ множества mj_{n+1} на множество mo_{n+1}. Рассмотрим произвольную характеристику $\Phi(z) \in mA$ и на ней произвольную точку (z_1, X_1'). Пусть точка (u_1, Y_1') будет сопряженной точкой с точкой (z_1, X_1'), т. е. $\bar{B}(u_1, Y_1') = (z_1, X_1')$. Точкой (u_1, Y_1') проходит единственная характеристика $\Psi_1(u)$ уравнения (B), которая преобразуется в характеристику $K(z)\,\Psi_1(r(z))$ уравнения (A). Однако $(z_1, \;/K(z_1)\,\Psi_1(r(z_1))/') = (r^{-1}(u_1), \;/K(r^{-1}(u_1)\,Y_1/') = \bar{B}(u_1, Y_1') = (z_1, X_1')$ и, следовательно, характеристики $\Phi(z)$ и $K(z)\,\Psi_1(r(z))$ проходят через ту же точку (z_1, X_1'). Но тогда обязательно $K(z)\,\Psi_1(r(z)) = \Phi(z)$ для всех $z \in o_1$. Итак в преобразовании $\bar{H}$ существует для каждого образа $\Phi(z) \in mA$ его прообраз из множества mB.

В следующей теореме покажем очевидную зависимость между преобразованиями $\bar{B}$ и $\bar{H}$.

Теорема 3.3. *Пусть преобразования $\bar{B}$, $\bar{H}$ определены функцией $u = r(z)$ и матрицей $K(z)$.*

Если $\Phi(z) = H\Psi(u)$, где $\Psi(u) \in mB$, тогда кривая $\Phi(z)$ представляется множеством всех точек из области o_{n+1}, сопряженных по отношению к преобразованию $\bar{B}$ с точками, лежащими на кривой $\Psi(u)$.

Доказательство: Утверждение следует из равенств $(z_1, \Phi'(z_1)) = (z_1, \bar{H}\Psi'(u_1)) = (r^{-1}(u_1), /K(r^{-1}(u_1))\,\Psi(u_1)/') = (\bar{B}u_1, \bar{B}\Psi'(u_1)) = \bar{B}(u_1, \Psi'(u_1))$, для каждого $z_1 \in o_1$, $u_1 = r(z_1)$.

Теорема 3.4. *Пусть преобразование $\bar{H}$ определено функцией $u = r(z)$ и регулярной матрицей $K(z)$.*

Тогда $\bar{H}$ преобразует множество mB на множество mA взаимнооднозначно, причем обратное преобразование $\bar{H}^{-1}$ ставит характеристике $\Phi(z) \in mA$ в соответствие характеристику $\Psi(u) \in mB$ согласно равенству:

$$\Psi(u) = K^{-1}(r^{-1}(u))\,\Phi(r^{-1}(u)).$$

Доказательство. Напомним, что две различные характеристики уравнения (B) не имеют общих точек. Пусть $\Psi_1(u) \in mB$, $\Psi_2(u) \in mB$ и $\Psi_1(u) \neq \Psi_2(u)$. Отсюда в силу регулярности матрицы $K(z)$ следует, что

$$K(z)\,\Psi_1(r(z)) \neq K(z)\,\Psi_2(r(z)),$$

где $z \in o_1$. Значит из $\Psi_1(u) \neq \Psi_2(u)$ следует, что $\bar{H}\Psi_1(u) \neq \bar{H}\Psi_2(u)$. Обратность преобразования $\bar{H}'$ проверяется непосредственно: $\bar{H}'\bar{H}\Psi(u) = \bar{H}'(K(z)\,\Psi(r(z))) = K^{-1}(r^{-1}(u))\,K(r^{-1}(u))\,\Psi(u) = \Psi(u)$.

Теорема 3.5. *Пусть $\Psi(u) \in mB$ и $\Phi(z) \in mA$.*

Существует взаимнооднозначное преобразование $\bar{H}$ множества mB на множество mA такое, что $\bar{H}\Psi(u) = \Phi(z)$.

Доказательство. Пусть $(u_0, Y_0') \in m\Psi(u)$ и $(z_0, X_0') \in m\Phi(z)$. Согласно теореме 2.5, определим функцию $u = r(z)$ и матрицу $K(z)$ так, чтобы $\bar{B}(u_0, Y_0') = (z_0, X_0')$. Выбором функции $u = r(z)$ и матрицы $K(z)$ определено взаимнооднозначное преобразование $\bar{H}$ множества mB на множество mA. Такие же рассуждения, как в доказательстве теорему 3.2, показываюь, что необходимо $\bar{H}\Psi(u) = \Phi(z)$.

Замечание 3.1. На основании предыдущего видим, что взаимнооднозначное преобразование $\bar{H}$ однозначно определено взаимнооднозначным преобразованием $\bar{B}$. Преобразование $\bar{H}$ определяется так, что характеристике $\Psi(u) \in mB$ ставим в соответствие как раз ту характеристику $\Phi(z) \in mA$, которая проходит через точку, сопряженную с любой точкой, лежащей на характеристике $\Psi(u)$.

Теорема 3.6. *Пусть $\bar{H}$ взаимнооднозначное преобразование множества mB на множество mA.*

Если $\Psi_1(u), \ldots, \Psi_n(u)$ $(\Phi_1(z), \ldots, \Phi_n(z))$ линейно независимые характеристики уравнения (B) $((A))$, тогда $\bar{B}\Psi_1(u), \ldots, \bar{B}\Psi_n(u)$ $(\bar{B}'\Phi_1(z), \ldots, \bar{B}'\Phi_n(z))$ будут линейно независимые характеристики уравнения (A) $((B))$.

Доказательство. Матрица $(\bar{B}\Psi_1(u), \ldots, \bar{B}\Psi_n(u)) = K(z)(\Psi_1(r(z)), \ldots, \Psi_n(r(z))$ регулярная, так как регулярны $K(z)$ и $(\Psi_1(u), \ldots, \Psi_n(u))$. Также доказывается вторая часть утверждения теоремы.

Теорема 3.7. *Пусть $\Psi_1(u), \ldots, \Psi_n(u)$ и $\Phi_1(z), \ldots, \Phi_n(z)$ линейно независимые характеристики соответствующих уравнений (B) и (A).*

Существует взаимнооднозначное преобразование $\bar{H}$ множества mB на множество mA такое, что $\bar{H}\Psi_i(u) = \Phi_i(z)$, для $i = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Выберем на характеристиках $\Psi_i(u)$ и $\Phi_i(z)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ регулярные точки $(u_0, Y_1'), \ldots, (u_0, Y_n')$ и $(z_0, X_1'), \ldots, (z_0, X_n')$. Согласно теореме 2.7 существует взаимнооднозначное преобразование $\bar{B}$ такое, что $\bar{B}(u_0, Y_i') = (z_0, X_i')$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Но преобразование $\bar{B}$ согласное замечанию 3.1 определяет искомое преобразование $\bar{H}$.

Как было показано, взаимнооднозначное преобразование $\bar{H}$ однозначно определено взаимнооднозначным преобразованием $\bar{B}$ и поэтому определено двумя системами регулярных (точек см. теорему 2.7) с точностью до функции $u = r(z)$, которая должна удовлетворять только условию $u_0 = r(z_0)$.

4. Преобразование первых интегралов

Пусть $mv = mv(z, X')$, $mw = mw(u, Y')$ означает множество первых интегралов уравнения (A), (B), $m\bar{v}$ множество первых интегралов уравнения (A), рассматриваемое на расширенной области $\bar{o}_{n+1}$ и $mf = mf(z, X')$ множество функций, определенных на области $\bar{o}_{n+1}$.

Определение 4.1. На множестве mf определяем преобразование $\bar{P}$ так, что каждой функции $f(z, X')$ ставим в соответствие функцию $g(u, Y')$, определенную в $(n + 1)$-размерном пространстве $(u, y_1, \ldots, y_n)$ согласно равенству:

$$g(u, Y') = f(r^{-1}(u), /K(r^{-1}(u))\, Y/'). \qquad (\bar{P})$$

Как видно из $(\bar{P})$, преобразование $\bar{P}$ однозначно и определено при помощи функции $u = r(z)$ и матрицы $K(z)$.

Теорема 4.1. *Пусть преобразование $\bar{P}$ определено функцией $u = r(z)$ и сингулярной матрицей $K(z)$.*

Тогда $\bar{P}$ преобразует множество $m\bar{v}$ в множество $mw \cup mc$, где mc-множество действительных чисел.

Доказательство. Пусть $v(z, X') \in m\bar{v}$ и рассмотрим его образ $\bar{P}v(z, X') = v(r^{-1}(u), /K(r^{-1}(u))\, Y/') = w(u, Y')$.

1. Функция $w(u, Y')$ определена в области j_{n+1}. Действительно, если $(u, Y') \in j_{n+1}$, тогда, согласно теореме 2.1, $(r^{-1}(u), /K(r^{-1}(u))\, Y/') = \bar{B}(u, Y') \in \bar{o}_{n+1}$.

2. Согласно теореме 2.1, и замечанию 2.4, область j_{n+1} преобразуется преобразованием $\bar{B}$ (определенное выбранной функцией $u = r(z)$ и матрицей $K(z)$) в какую-то область $\tilde{o}_{n+1} \subset \bar{o}_{n+1}$. Если первый интеграл $v(z, X')$ не является главным интегралом, то возможно, что в области $\tilde{o}_{n+1} v\ (z, X') \equiv \text{const}$, т. е. $w(u, Y') \equiv \text{const}$ в области j_{n+1}.

3. Функция $w(u, Y')$ вдоль каждой характеристики уравнения (B) постоянна. Действительно. Это верно, если $w(u, Y') \equiv \text{const}$ в области j_{n+1}. В обратном случае это вытекает из того, что согласно теореме 3.1 для $\Psi(u) \in mB$ есть $K(z)\, \Psi(r(z)) = \Phi(z) \in m\bar{A}$ и тогда $w(u, \Psi') = v(r^{-1}(u), /K(r^{-1}(u))\, \Psi(u)/') = v(z, \Phi'(z)) = \text{const}$.

Теорема 4.2. *Пусть преобразование $\bar{P}$ определено функцией $u = r(z)$ и регулярной матрицей $K(z)$.*

Тогда $\bar{P}$ преобразует множество mv на множество mw.

Доказательство. Выбранной функцией $u = r(z)$ и матрицей $K(z)$ определено взаимнооднозначное преобразование множества mj_{n+1} на множество mo_{n+1}. Пусть $v(z, X') \in mv$ и рассмотрим преобразованную функцию $w(u, Y') = \bar{P}v(z, X') = v(r^{-1}(u), /K(r^{-1}(u)\, Y/')$. Покажем, что $w(u, Y') \in mw$.

1. Функция $w(u, Y')$ определена в области j_{n+1}. Это вытекает из того, что согласно теореме 2.2 $\bar{B}mj_{n+1} = mo_{n+1}$.

2. $w(u, Y') \not\equiv \text{const}$ в области j_{n+1}. В противном случае бы была функция $v(z, X') \equiv c$ в области o_{n+1}. Но это невозмоно, так как $v(z, X')$ в этой области является первым интегралом.

3. $w(u, Y')$ вдоль каждой характеристики уравнения (B) постоянна. Пусть $\Psi(u) \in mB$, тогда, согласно теореме 3.2, есть $\Phi(z) = K(z)\,\Psi(r(z)) \in mA$ и, следовательно, $w(u, \Psi'(u)) = v(z, /K(z)\,\Psi(r(z))/') = v(z, \Phi'(z)) = \text{const}$.

Остается доказать, что $\bar{P}$ является преобразованием множества mv на множество mw. Пусть $w(u, Y') \in mw$. Покажем, что функция $v(z, X') = w(r(z)), /K^{-1}(z)\,X/')$ является прообразом этой функции.

1. Функция $v(z, X')$ определена в области o_{n+1}. Это вытекает из того, что согласно теореме 2.3, $\bar{B}^{-1}mo_{n+1} = mj_{n+1}$.

2. $v(z, X') \not\equiv c$ в области o_{n+1}. В противном случае бы была функция $w(u, Y') \equiv$ $\equiv c$ в области j_{n+1}. Но это невозможно, так как $w(u, Y')$ первый интеграл уравнения (B).

3. $v(z, X')$ вдоль каждой характеристики уравнения (A) постоянна. Действительно. Пусть $\Phi(z) \in mA$, тогда согласно теореме 3.4, есть

$$\Psi(u) = K^{-1}(r^{-1}(u))\,\Phi(r^{-1}(u)) \in mB$$

и, следовательно, $v(z, \Phi'(z)) = w(u, \Psi'(u)) \equiv c$.

Из 1, 2. и 3. вытекает, что $v(z, X') \in mv$. Остается доказать, что $v(z, X')$ является в преобразовании $\bar{P}$ прообразом первого интеграла $w(u, Y')$. Это проверим прямым подсчетом: $\bar{P}v(z, X') = \bar{P}w(r(z), /K^{-1}(z)\,X/') = w(r(r^{-1}(u)),$ $/K(r^{-1}(u))\,K^{-1}(r^{-1}(u))\,Y/') = w(u, Y')$.

Замечание 4.1. Из определения 4.1, теорем 4.1 и 4.2 вытекает, что преобразование $\bar{P}$ определено следующим образом: первому интегралу $v(z, X') \in mv$ ставится в соответствие первый интеграл $w(u, Y') \in mw$, который принимает в точке $(u, Y') \in mj_{n+1}$ значение, равное значение функции $v(z, X')$ в точке (z, X'), сопряженной по отношению к преобразованию $\bar{B}$. Если $K(z)$ сингулярная матрица, то $(z, X') \in \bar{o}_{n+1}$, если $K(z)$ регулярная матрица, то $(z, X') \in o_{n+1}$.

Теорема 4.3. *Пусть преобразование $\bar{P}$ определено функцией $u = r(z)$ и регулярной матрицей $K(z)$.*

Тогда $\bar{P}$ преобразует взаимооднозначно множество mv на множество mw, причем обратное преобразование $\bar{P}^{-1}$ ставит каждому первому интегралу $w(u, Y') \in mw$ в соответствие первый интеграл $v(z, X') \in mv$ согласно равенству:

$$v(z, X') = w(r(z), /K^{-1}(z)\,X/'). \qquad (\bar{P}^{-1})$$

Доказательство. Если $v^1(z, X') \neq v^2(z, X')$, тогда из замечания 4.1 вытекает, что $\bar{P}v^1(z, X') \neq \bar{P}v^2(z, X')$. Остается проверить, что $\bar{P}^{-1}$ есть обратное преобразование: $\bar{P}^{-1}(Pv(z, X')) = \bar{P}^{-1}v(r^{-1}(u), /K(r^{-1}(u))\,Y/') = v(r^{-1}(r(z)), /K(r^{-1}(u))\,K^{-1}(z)\,X/') = v(z, X')$.

Теорема 4.4. *Пусть* $v^1(z, X')$, $v^2(z, X')$ $(w^1(u, Y'), w^2(u, Y'))$ *зависимые или независимые первые интегралы уравнения* (*A*) ((*B*)) *и* $\bar{P}(\bar{P}^{-1})$ *преобразованием множества* $mv(mw)$ *на множество* $mw(mv)$.

Тогда $w^1(u, Y') = \bar{P}v^1(z, X')$, $w^2(u, Y') = \bar{P}v^2(z, X')$ $(v^1(z, X') = \bar{P}^{-1}w^1(u, Y')$, $v^2(z, X') = \bar{P}^{-1}w^2(u, Y'))$ *будут также зависимые или независимые первые интегралы уравнения* (*B*) ((*A*)).

Доказательство. Рассмотрим матрицу

$$\frac{M(w^1, w^2)}{M(u, Y')} = \begin{pmatrix} w^1_u & w^1_{y_1} & \dots & w^1_{y_n} \\ w^2_u & w^2_{y_1} & \dots & w^2_{y_n} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $w^i(u, Y') = v^i(r^{-1}(u), /K(r^{-1}(u))\,Y/') = \bar{P}v^i(z, X')$, $i = 1, 2$. Тогда

$$\text{(2)} \qquad w^i_u = v^i_z \frac{dr^{-1}(u)}{du} + \sum_{j=1}^{v} v^i_{x_j} x_{ju}, \qquad w^i_{y_m} = \sum_{j=1}^{v} v^i_{x_j} x_{jy_m} \tag{3}$$

и

$$X' = Y'K(z) = \Big(\sum_{i=1}^{n} k_{1i}(z)\,y_i, \sum_{i=1}^{n} k_{2i}(z)\,y_i, \dots, \sum_{i=1}^{n} k_{ni}(z)\,y_i\Big). \tag{4}$$

Из (4) вытеиает, что

$$x_{jy_m} = k_{jm}(z). \tag{5}$$

После подстановки (5) в (3) получаем, что

$$w^i_{y_m} = \sum_{j=1}^{n} v^i_{x_j} k_{jm}(z). \tag{6}$$

Подставляя (2) и (6) в матрицу (1), получаем, что в сопряженных точках $(z, X') \in o_{n+1}$, $(u, Y') \in j_{n+1}$

$$\frac{M(w^1, w^2)}{M(u, Y')} = \frac{M(v^1, v^2)}{M(z, X')} \begin{pmatrix} \dfrac{dr^{-1}(u)}{du} & 0(1/n) \\ X_u & K(r^{-1}(u)) \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Так как матрица типа $(n + 1/n + 1)$ в равенстве (7) регулярная, то оставшиеся матрицы типа $(n/n + 1)$ имеют в сопряженных точках одинаковый ранг. Вторая часть утверждения теоремы вытекает из равенства

$$\frac{M(v^1, v^2)}{M(z, X')} = \frac{M(w^1, w^2)}{M(u, Y')} \begin{pmatrix} \dfrac{dr(z)}{dz} & 0(1/n) \\ Y_z & K^{-1}(z) \end{pmatrix},$$

имеющее также место в сопряженных точках $(z, X') \in o_{n+1}$, $(u, Y') \in j_{n+1}$.

Замечание 4.2. Рассмотрим n-первых интегралов уравнения (A) $v^1(z, X')$, ..., $v^n(z, X')$. Так как каждый из них удовлетворяет тождеству 1(4), то очевидно в каждой точке $(z, X') \in o_{n+1}$

$$\text{ранг}\,\frac{M(v^1, \dots, v^n)}{M(z, x_1, \dots, x_n)} = \text{ранг}\,\frac{M(v^1, \dots, v^n)}{M(x_1, \dots, x_n)} = \text{ранг}\,\frac{D(v^1, \dots, v^n)}{D(x_1, \dots, x_n)}.$$

Таким же образом в каждой точке $(u, Y') \in j_{n+1}$.

$$\text{ранг}\,\frac{M(w^1, \dots, w^n)}{M(u, y_1, \dots, y_n)} = \text{ранг}\,\frac{M(w^1, \dots, w^n)}{M(y_1, \dots, y_n)} = \text{ранг}\,\frac{D(w^1, \dots, w^n)}{D(y_1, \dots, y_n)},$$

где $w^1, \dots, w^n$ первые интегралы уравнения (B).

Теорема 4.5. *Пусть преобразование $\bar{P}$ определено функцией $u = r(z)$ и матрицей $K(z)$ ранга h, $1 \leqq h \leqq n$ и $v_i(z, X')$, $i = 1, 2, \dots, n$ независимые первые интегралы уравнения (A).*

Тогда среди преобразованных первых интегралов $w_i(u, Y') = \bar{P}v_i(z, X')$, $i = 1, 2, \dots, n$ есть как раз h независимые.

Доказательство. Используя (6), получаем равенство

$$\frac{D(w^1, \dots, w^n)}{D(y_1, \dots, y_n)} = \frac{D(v^1, \dots, v^n)}{D(x_1, \dots, x_n)}\,|\,K(r^{-1}(u))\,|, \tag{8}$$

имеющее место в сопряженных точках $(z, X') \in o_{n+1}$, $(u, Y') \in j_{n+1}$. Ранг определителя в левой части равенства (8) равен h, так как ранги определителей сомножителей в правой части (8) равны n и h.

Теорема 4.6. Пусть $\bar{P}$ взаимнооднозначное преобразование множества mv на множество mw и среди n первых интегралов уравнения (A) $((B))$ $v^i(z, X')$ $(w^i(u, Y'))$ k, $1 \leqq k \leqq n$ независимых.

Тогда среди n-преобразованных первых интегралов $\bar{P}v^i(z, X')$ $(\bar{P}'w^i(u, Y'))$ уравнения (B) $((A))$ будут также как раз k независимых.

Доказательство. Вытекает непосредственно из равенства (8).

Заметим еще, что согласно теореме 4.4 среди преобразованных первых интегралов уравнения (A) $((B))$ будут независимые те интегралы, чьи прообразы-первые интегралы уравнения (B) $((A))$, независимые.

Теорема 4.7. *Пусть $\bar{P}$ взаимнооднозначное преобразование множества mv на множество mw и $v(z, X')$ $(w(u, Y'))$ главный интеграл уравнения (A) $((B))$.*

Тогда преобразованный первый интеграл $\bar{P}v(z, X')$ $(\bar{P}^{-1}w(u, Y'))$ будет также главным интегралом уравнения (B) $((A))$.

Доказательство. 1. Пусть $v(z, X')$ главный интеграл уравнения (A). Согласно теореме 4.2, $\bar{P}v(z, X') = w(u, Y')$ есть первый интеграл уравнения (B), определенный в области j_{n+1}.

2. Допустим, что в области $\tilde{j}_{n+1} \subset j_{n+1}$ $w(u, Y') \equiv c$. Согласно замечанию 2.4 область $\tilde{j}_{n+1}$ есть в преобразовании $\bar{B}$ образом какой-то области $\tilde{o}_{n+1} \subset o_{n+1}$. Из теоремы 4.1 следует, что в таком случае в области o_{n+1}, $v(z, X') \equiv c$. Но это невозможно, так как $v(z, X')$ есть главный интеграл. Итак, $w(u, Y') \not\equiv c$ в любой подобласти области j_{n+1}.

3. Первый интеграл $w(u, Y') = \bar{P}v(z, X')$ уравнения (11) удовлетворяет в области j_{n+1} тождеству

$$w_u + Y'B'(u)\, w_Y \equiv 0, \tag{9}$$

аналогичному тождеству 1(4). Допустим, что в области $\tilde{j}_{n+1}$ $w_u \equiv 0$. Учитывая, что по доказанному в области $\tilde{j}_{n+1}$ $w \not\equiv c$ приходим к заключению, что $w_Y \not\equiv 0$. Пусть в точке $(u_0, Y_0') \in \tilde{j}_{n+1}$ $w_Y(u_0, Y_0') \neq 0$, причем

$$w_{y_1} \neq 0, \ldots, w_{y_k} \neq 0,\ 1 \leqq k \leqq n. \tag{10}$$

Для удобства полагаем, что первые k элементы матрицы w_Y в точке (u_0, Y_0') отличны от нуля. Это, конечно, не влияет на общность наших рассуждений. Так как элементы матрицы w_Y суть непрерывные функции, то существует окрестность s точки (u_0, Y_0'), в которой верны неравенства (10). Из тождества (9), рассматриваемого в окрестности $s \subset \tilde{j}_{n+1}$, в которой $w_u \equiv 0$, получаем, что в окрестности s $Y'B'(u)\, w_Y \equiv 0$. В частности

$$Y'B'(u_0)\, w_Y(u_0, Y') \equiv 0,$$

для всех точек $(u_0, Y') \in s$. Последнее тождество перепишем в виде

$$\begin{aligned} &y_1 w_{y_1}(u_0, Y')\, b_{11}(u_0) + \ldots + y_n w_{y_1}(u_0, Y')\, b_{1n}(u_0) + \ldots + \\ &+ y_1 w_{y_k}(u_0, Y')\, b_{k1}(u_0) + \ldots + y_n w_{y_k}(u_0, Y')\, b_{kn}(u_0) \equiv 0. \end{aligned}$$

Коэффициенты при постоянных $b_{mn}(u_0)$ суть непрерывные функции переменных $(y_1, \ldots, y_n)$ $((u_0, Y') \in s)$, следовательно необходимо $b_{11}(u_0) = \ldots = b_{1n}(u_0) = \ldots = b_{k1}(u_0) = \ldots = b_{kn}(u_0) = 0$. Но это невозможно, так как матрица $B(u)$ по предположению регулярная. Итак, $w_u \not\equiv 0$ в области $\tilde{j}_{n+1}$.

Теорема 4.8. *Пусть $\bar{P}$ взаимнооднозначное преобразование множества mv на множество mw и $v^i(z, X')$ $(w^i(u, Y'))$, $i = 1, 2, \ldots, n$ фундаментальные интегралы уравнения (A) $((B))$.*

Тогда преобразованные интегралы $\bar{P}v^i(z, X')$ $(\bar{P}^{-1}w^i(u, Y'))$ будут также фундаментальными интегралами уравнения (B) $((A))$.

Доказательство. Вытекает непосредственно из теорем 4.6 и 4.7.

5. Фундаментальные интегралы и общий вид первого интеграла уравнения (II)

Рассмотрим в области o_{n+1}, где $o_1 = (\alpha, \beta)$, $\alpha\beta > 0$ частное уравнение типа (I)

$$x_1 z_{x_1} + \ldots + x_n z_{x_n} = z,$$

уравнение однородных функций первой степени, его матричынй вид

$$X'(1/z)\, E z_X = 1 \tag{1}$$

и соответствующее характеристическое уравнение

$$\frac{dX}{dz} = (1/z)\, EX. \tag{E}$$

Легко проверить, что каждая из функций

$$v^i(z, X') = (1/z)\, x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

есть главный интеграл уравнения (1). И так как

$$\frac{D(v^1, \ldots, v^n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} = (1/z)^n \neq 0,$$

то (2) есть фундаментальные интегралы уравнения (1).

Обозначим mv_1 множество первых интегралов уравнения (E) и $m\bar{v}_1$ множество первых интегралов уравнения (E), рассматриваемого в области $\bar{o}_{n+1}$.

В дальнейшем обозначает $K(z)$ решение уравнения

$$\frac{dK}{dz} = (1/z)\, K(z) - K(z)\, B(r(z)) \frac{dr}{dz}, \tag{K_1}$$

где $u = r(z)$ выбранная функция.

Замечание 5.1. Из леммы 4 [3] вытекает, что матрица $K(z)$ имеет во всех точках $z \in o_1$ один и тот же ранг $h (1 \leqq h \leqq n)$ и что можно выбрать минор h-го порядка, который во всех точках $z \in o_1$ отличен от нуля. В дальнейшем будем предполагать, что это минор, определенный первыми h строками и первыми h столбцами. Как известно, это всегда можно сделать.

Теорема 5.1. *Пусть преобразование $\bar{P}$ множества $m\bar{v}_1$ в множество $mw \cup mc$ определено функцией $u = r(z)$ и сингулярной матрицей $K(z)$ ранга h, $1 \leqq h < n$.*

Существует h независимые первые интегралы уравнения (11) вида $w^i(u, Y') = (k_{i1}(r^{-1}(u))\, y_1 + \ldots + k_{in}(r^{-1}(u))\, y_n)\, (1/r^{-1}(u))$, $i = 1, 2, \ldots, h$.

Доказательство. Очевидно, что фундаментальные интегралы (2), рассматриваемые в области $\bar{o}_{n+1}$, принадлежат множеству $m\bar{v}_1$. Согласно теореме

4.1 преобразует $\bar{P}$ фундаментальные интегралы (2) в n функций множества $mw \bigcup mc$. Для этих n функций

$$\frac{M(w^1, \ldots, w^n)}{M(u, y_1, \ldots, y_n)} = \begin{pmatrix} w_u^1 \\ \vdots & K(r^{-1}(u)) \\ w_u^n \end{pmatrix}$$

и следовательно, согласно предположению о ранге матрицы $K(z)$ и замечанию 5.1, существует h функций, которые в любой точке области $\tilde{j}_{n+1} = \bar{B}o_{n+1}$ ($\bar{B}$ преобразование, определенное выбранной сингулярной матрицей $K(z)$), независимые. Подставлая фундаментальные интегралы (2) в правую сторону (P), получаем первые интегралы (3), для которых, очевидно, $\tilde{j}_{n+1} = j_{n+1}$.

Теорема 5.2. *Пусть взаимнооднозначное преобразование $\bar{P}$ множества mv_1 на множество mw определено функцией $u = r(z)$ и регулярной матрицей $K(z)$.*

Существуют фундаментальные интегралы уравнения (11) *вида* (3).

Доказательство. Вытекает из теоремы 4.8 и равенства (P).

Теорема 5.3. *Пусть взаимнооднозначное преобразование $\bar{P}$ множества mv_1 на множество mw определено функцией $u = r(z)$ и регулярной матрицей $K(z)$.*

Тогда множество первых интегралов уравнения (II) *можно выразить в виде*

$$mw(u, Y') = mv(r^{-1}(u), /K(r^{-1}(u))\, Y/') \tag{3}$$

где $v(z, X')$ однородная функция нулевого рода.

Доказательство. Пусть $v(z, X')$ любой первый интеграл уравнения (1). Тогда в области o_{n+1} имеет место тождество, аналогичное 1 (4)

$$v_z + x_1(1/z)\, v_{x_1} + \ldots + x_n(1/z)\, v_{x_n} \equiv 0,$$

откуда, так как $z \neq 0$,

$$zv_z + x_1 v_{x_1} + \ldots + x_n v_{x_n} \equiv 0.$$

Из последнего тождества следует, что множество mv_1 первых интегралов уравнения (2) есть множеством однородных функций нулевого рода. Утверждение теоремы следует из того, что согласно теореме 4.2 множество первых интегралов уравнения (11) дано равенством (3).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Kamke, E.:* Differentialgleichungen reeller Funktionen. Leipzig 1952.

[2] *Палат, П.:* О преобразованиях решений двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. „Acta Universitatis Olomucensis“ T. R. N., TOM 21, 1966.

[3] *Травничек, С.:* О преобразованиях решений систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка. „Acta Universitatis Olomucensis“ F. R. N., TOM 18, 1965.

Shrnutí

TRANSFORMACE PRVÝCH INTEGRÁLŮ DVOU PARCIÁLNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC PRVNÍHO ŘÁDU

JINDŘICH PALÁT

V práci se studuje určitá transformace bodů n-rozměrného Eukleidovského prostoru do sebe. Dále se studují vzájemné transformace charakteristických křivek rovnic (A) a (B), jakož i vzájemné transformace prvých integrálů rovnic (I) a (II). Všechny tyto transformace se definují pomocí libovolné, ryze monotonní, spojité funkce $u = r(z)$ ($\mathrm{d}u/\mathrm{d}z \neq 0$) a matice $K(z)$, která je řešením rovnice (K). V poslední části této práce se uvádí zvláštní tvar fundamentálních integrálů a obecný tvar prvého integrálu rovnice (II).

Zusammenfassung

ÜBER TRANSFORMATIONEN ERSTER INTEGRALE ZWEIER PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ERSTER ORDNUNG

JINDŘICH PALÁT

Es wird eine gewisse Transformation von Punkten eines n-dimensionalen euklidischen Raumes in sich untersucht. Desweiteren werden wechselseitige Transformationen charakteristischer Kurven von Gleichungen (A) und (B) als auch wechselseitige Transformationen erster Integrale von Gleichungen (I) und (I)I behandelt. Sämtliche diese Transformationen werden durch eine beliebige, echt monotone, stetige Funktion $u = r(z)$ ($\mathrm{d}u/\mathrm{d}z \neq 0$) und durch die Matrix $K(z)$ definiert. $K(z)$ bedeutet hierbei die Lösung der Gleichung (K). Im abschließenden Teil Arbeit wird eine besondere Form von fundamentalen Integralen und eine allgemeine Form des ersten Integrals von Gleichung (II) eingeführt.