Dagmar Šedová

Beweis eines Perronschen Satzes

Sborník prací Přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci. Matematika, Vol. 13 (1973), No. 1, 97--105

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/120020`

1973 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM — TOM 41

Katedra matematické analýzy přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci
Vedoucí katedry: prof. RNDr Miroslav Laitoch, CSc.

BEWEIS EINES PERRONSCHEN SATZES

DAGMAR ŠEDOVÁ

(Eingegangen am 20. September 1972)

In dieser Arbeit wird ein neuer Beweis des Satzes von Perron (Theorie linearer homogener Differenzen-Gleichungen mit veränderlichen Koeffizienten) gegeben, der mit Hilfe eines Satzes von Poincaré und zweier Lemmas aufgebaut ist.

Der Satz von Poincaré. *Wenn bei einer linearen homogenen Differenzen-Gleichung*

$$f(x+k) + P_{k-1}(x)f(x+k-1) + \dots + P_1(x)f(x+1) + \\ + P_0(x)f(x) = 0 \tag{1}$$

die Koeffizientenfunktionen $P_i(x)$ $(i = 0, 1, \dots, k-1)$ *für* $x \to \infty$ *die Grenzwerte* $\lim_{x\to\infty} P_i(x) = a_i$ $(i = 0, 1, \dots, k-1)$ *bezitzen und wenn die Wurzeln der charakteristischen Gleichung*

$$\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{2}$$

dem absoluten Betrage nach, verschieden sind, so ist der Grenzwert des Verhältnisses $f(x+1) / f(x)$ *für* $x \to \infty$ *bei einer beliebigen Lösung* $f(x)$ *der Gleichung (1) gleich einer der Wurzeln*

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$$

der Gleichung (2), d. h., es gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = \lambda_j,$$

Beweis in Perron (1909).

Lemma 1. *Die linke Seite der Gleichung*

$$f(x+k) + P_{k-1}(x)f(x+k-1) + \dots + P_1(x)f(x+1) + \\ + P_0(x)f(x) = 0 \tag{1}$$

läßt sich in der Form

$$g(x + k - 1) + Q_{k-2}(x)\, g(x + k - 2) + \dots + Q_0(x)\, g(x) = 0 \tag{3}$$

schreiben, wo

$$g(x) = f(x + 1) - \big(\lambda_1 + \delta(x)\big) f(x), \ \lim_{x \to \infty} \delta(x) = 0,$$

ist und λ_1 eine Wurzel der charakteristischen Gleichung

$$\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{2}$$

bedeutet. Wenn die Koeffizienten $P_i(x)$ folgende Bedingungen erfüllen:

1. $\lim\limits_{x \to \infty} P_i(x) = a_i$, $i = 0, 1, \dots, k - 1$, a_i *endlich;*
2. *für die Wurzeln der charakteristischen Gleichungen (3) gelten die Ungleichungen*

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_k|$$

3. $P_0(x) \neq 0$ *für alle ganzzahligen* x;

dann erfüllen auch $Q_i(x)$, $\lim\limits_{x \to \infty} Q_i(x) = b_i$ die Bedingungen 1. 2. 3. und die charakteristischen Gleichungen der Differenzen-Gleichungen (1) und (3) sind durch die Relation

$$\begin{aligned}&(\lambda - \lambda_1)\big(\lambda^{k-1} + b_{k-2}\lambda^{k-1} + \dots + b_1\lambda + b_0\big) = \\ &= \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + a_1\lambda + a_0\end{aligned}$$

verbunden.

Beweis: Die Gleichung

$$\begin{aligned}&f(x + k) + P_{k-1}(x) f(x + k - 1) + \dots + P_1(x) f(x + 1) + \\ &+ P_0(x) f(x) = 0\end{aligned} \tag{1}$$

schreiben wir in der Form

$$\begin{aligned}&[f(x + k) - \big(\lambda_1 + \delta(x + k - 1)\big) f(x + k - 1)] + \\ &+ Q_{k-2}(x)\,[f(x + k - 1) - \big(\lambda_1 + \delta(x + k - 2)\big) \\ &f(x + k - 2)] + \dots + Q_1(x)\,[f(x + 2) - \big(\lambda_1 + \delta(x + 1)\big) f(x + 1)] + \\ &+ Q_0(x)\,[f(x + 1) - \big(\lambda_1 + \delta(x)\big) f(x)] = 0\end{aligned} \tag{1'}$$

Durch Multiplikation, Umordnung der Glieder und Vergleichung der Koeffizienten bei $f(x), f(x + 1), \dots, f(x + k)$ in (1) und (1') erhalten wir die Gleichungen

$$P_i(x) = Q_{i-1}(x) - \big(\lambda_1 + \delta(x + i)\big)\, Q_i(x), \tag{4}$$

$i = 0, 1, \dots, k - 1$, $Q_{-1}(x) = 0$, $Q_{k-1}(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to \infty} \delta(x) = 0$, aus denen wir $Q_i(x)$ in der Form

$$Q_i(x) = -\sum_{j=0}^{i} P_j(x) \prod_{k=j}^{i} \frac{1}{\lambda_1 + \delta(x + k)}, \qquad i = 0, 1, \dots, k - 2$$

ausdrücken können. Wenn wir in (1') die Funktion

$$g(x) = f(x + 1) - (\lambda_1 + \delta(x))f(x)$$

einsetzen, bekommen wir die Gleichung (2).

Jetzt läßt sich zeigen, daß die Koeffizienten $Q_i(x)$ die Bedingungen 1. 2. 3. erfüllen.

1. $\lim_{x\to\infty} Q_i(x) = -\sum_{j=0}^{i} a_j \frac{1}{\lambda_1^{i-j+1}} = b_i$, $i = 0, 1, \ldots, k-2$, der Grenzwert existiert offensichtlich und ist endlich.

2. Durch den Grenzübergang von (4) bekommen wir

$$a_i = b_{i-1} - \lambda_1 b_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, k-1, \qquad b_{-1} = 0, \qquad b_{k-1} = 1$$

und durch Einsetzen in die charakteristische Gleichung (2) gelangen wir zur Beziehung zwischen beiden charakteristischen Gleichungen

$$\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = \lambda^k + (b_{k-2} - \lambda_1)\lambda^{k-1} + \ldots +$$
$$+ (b_0 - \lambda_1 b_1)\lambda - \lambda_1 b_0 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda^{k-1} + b_{k-2}\lambda^{k-2} + \ldots + b_1\lambda + b_0).$$

Die charakteristische Gleichung von (2) hat also die Wurzeln $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k$, dieselben wie die charakteristische Gleichung für (1). Diese Wurzeln sind verschieden und es gelten die Ungleichungen

$$|\lambda_2| > |\lambda_3| > \ldots > |\lambda_k|$$

3. $Q_0(x) = -P_0(x)\frac{1}{\lambda_1 + \delta(x)}$, wo $P_0(x) \neq 0$ für alle ganzzahligen x, also ist $Q_0(x) \neq 0$ für alle ganzzahligen x.

Damit ist die Behauptung des Lemmas bewiesen worden.

Lemma 2. Wenn.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x+1)}{g(x)} = \mu \qquad |\mu| \neq |\lambda|$$

ist, dann existiert eine Lösung der Gleichung

$$f(x + 1) - (\lambda + \delta(x))f(x) = g(x), \tag{5}$$

wo $\lim_{x\to\infty} \delta(x) = 0$ *ist, welche ebenfalls die Bedingung*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = \mu$$

erfüllt.

Beweis: Den Satz beweisen wir für $|\mu| < |\lambda|$ und für $|\mu| > |\lambda|$. Für $|\mu| < |\lambda|$ definieren wir die Funktion $f(x)$ in der Form einer Reihe

$$f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} g(x + n)\prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda + \delta(x + j)}.$$

Diese Reihe ist konvergent und leicht überzeugen wir uns, daß sie eine Lösung unserer Gleichung (5) darstellt. Betrachten wir nun den Quotienten

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{g(x+1)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{g(x+n)}{g(x+1)}\prod\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{\lambda+\delta(x+j)}}{g(x)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{g(x+n-1)}{g(x)}\prod\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{\lambda+\delta(x+j-1)}}$$

und suchen wir seinen Grenzwert. Es ist vorerst zu zeigen, daß beide Reihen im Zähler wie im Nenner gleichmäßig konvergieren, daß also der Grenzübergang möglich ist. Wir bestimmen majorante Reihen für den Zähler und für den Nenner und beweisen ihre Konvergenz. Wir wählen δ derart, daß die Ungleichung

$$0 < \frac{|\mu| + \delta}{|\mu| - \delta} < 1$$

gilt. Zu dem so gewählten δ suchen wir ein x_0 derart, daß für $x > x_0$ die Beziehung

$$\left|\frac{g(x+1)}{g(x)}\right| < |\mu| + \delta$$

erfüllt ist und weiter ein x_1 derart, daß für $x > x_1$ die Ungleichung

$$|\lambda + \delta(x)| > |\lambda| - \delta$$

gilt. Dann gelten für $x > \max(x_0, x_1)$ gleichzeitig beide Ungleichungen und außerdem die Ungleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{g(x+n)}{g(x+1)}\right|\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{|\lambda+\delta(x+j)|} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(|\mu|+\delta)^{n-1}}{(|\lambda|-\delta)^{n}}.$$

Wegen

$$0 < \frac{|\mu| + \delta}{|\lambda| - \delta} < 1,$$

konvergiert die Reihe auf der rechten Seite der Ungleichung. Die Funktionreihe im Nenner hat dieselbe majorante Reihe, wie jene im Zähler. Beide Reihen konvergieren also gleichmäßig und wir können den Grenzübergang für $x \to \infty$ berechnen:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{g(x+1)}{g(x)}\,\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{g(x+n)}{g(x+1)}\prod\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{\lim(\lambda+\delta(x+j))}}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{g(x+n-1)}{g(x)}\prod\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}(\lambda+\delta(x+j-1))}} =$$

$$= \mu\,\frac{\dfrac{1}{\lambda-\mu}}{\dfrac{1}{\lambda-\mu}} = \mu.$$

2. Der Beweis für $|\mu| > |\lambda|$ wird ähnlich geführt. Wir definieren die Funktion $f(x)$ mittels der Funktionenreihe

$$f(x) = g(x-1) + \sum_{n=1}^{x-1} g(x-n-1) \prod_{j=1}^{n} (\lambda + \delta(x-j)).$$

Die so definierte Funktion ist eine Lösung unserer Funktionalgleichung (5). Wir bestimmen den Quotienten

$$\frac{f(x)}{f(x+1)} = \frac{g(x-1)}{g(x)} \frac{1 + \sum\limits_{n=1}^{x-1} \frac{g(x-n-1)}{g(x-1)} \prod\limits_{j=1}^{n} (\lambda + \delta(x-j))}{1 + \sum\limits_{n=1}^{x} \frac{g(x-n)}{g(x)} \prod\limits_{j=1}^{n} (\lambda + \delta(x-j))}$$

und bringen eine Abschätzung der Reihe

$$\sum_{n=1}^{x-1} \frac{g(x-n-1)}{g(x-1)} \prod_{j=1}^{n} (\lambda + \delta(x-j)).$$

Wir wählen $\delta > 0$ derart, daß die Ungleichung

$$0 < \frac{|\lambda| + \delta}{|\mu| - \delta} < 1$$

gilt. Zum so gewählten δ suchen wir ein x_0 (resp. x_1) derart, daß für $x - n >$ $> x_0 (x - n > x_1)$ die Ungleichungen

$$|\mu| - \delta < \left| \frac{g(x-n+1)}{g(x-n)} \right| < |\mu| + \delta,$$

$$(|\delta(x-n)| < \delta)$$

gelten. Dann gilt für $x - n > x_2 = \max(x_0, x_1)$ die Relation

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{g(x-n-1)}{g(x-1)} \right| \prod_{j=1}^{n} |\lambda + \delta(x-j)| = \\
&= \sum_{n=1}^{x-x_2-1} \left| \frac{g(x-n-1)}{g(x-1)} \right| \prod_{j=1}^{n} |\lambda + \delta(x-j)| + \\
&+ \sum_{n=x-x_2}^{x-1} \left| \frac{g(x-n-1)}{g(x-1)} \right| \prod_{j=1}^{n} |\lambda + \delta(x-j)| < \\
&< \sum_{n=1}^{x-x_2-1} \frac{1}{(|\mu| - \delta)^n} \prod_{j=1}^{n} (|\lambda| + \delta) + \prod_{j=1}^{x-x_2-1} \left| \frac{g(x-j-1)}{g(x-j)} \right| \times \\
&\times |\lambda + \delta(x-j)| \sum_{n=x-x_2}^{x-1} \prod_{j=x-x_2}^{n} \left| \frac{g(x-j-1)}{g(x-j)} \right| |\lambda + \delta(x-j)| < \\
&< \sum_{n=1}^{x-x_2-1} \left(\frac{|\lambda| + \delta}{|\mu| - \delta} \right)^n + K \prod_{j=1}^{x-x_2-1} \frac{|\lambda| + \delta}{|\mu| - \delta} < \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|\lambda| + \delta}{|\mu| - \delta} \right)^n + K\varepsilon,
\end{aligned}$$

wo

$$K = \sum_{n=x-x_2}^{x} \left| \frac{g(x-n-1)}{g(x-1)} \right| \prod_{j=1}^{n} |\lambda + \delta(x-j+1)|$$

und

$$\prod_{j=1}^{x-x_2-1} \frac{|\lambda| + \delta}{|\mu| - \delta} = \left(\frac{|\lambda| + \delta}{|\mu| - \delta}\right)^{x-x_2} < \varepsilon$$

sind.

Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|\lambda| + \delta}{|\mu| - \delta}\right)^n$$

ist eine geometrische mit dem Quotienten

$$0 < \frac{|\lambda| + \delta}{|\mu| - \delta} < 1,$$

sie konvergiert also. Ebenso ist die Reihe im Nenner durch dieselbe geometrische Reihe begrenzt. Wir können also den Grenzübergang für $x \to \infty$ vollführen:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{f(x+1)} = \frac{1}{\mu} \frac{1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{g(x-n-1)}{g(x-1)} \prod\limits_{j=1}^{n} \lim\limits_{x\to\infty} (\lambda + \delta(x-j))}{1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{g(x-n)}{g(x)} \prod\limits_{j=1}^{n} \lim\limits_{x\to\infty} (\lambda + \delta(x-j+1))} =$$

$$= \frac{1}{\mu} \frac{1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{u}\right)^n}{1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{\mu}\right)^n} = \frac{1}{\mu}$$

und es gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = \mu.$$

Der Satz von Perron. *Wenn für eine Differenzengleichung*

$$f(x+k) + P_{k-1}(x) f(x+k-1) + \ldots + P_1(x) f(x+1) + \\ + P_0(x) f(x) = 0 \tag{1}$$

folgende Voraussetzungen erfüllt sind:

1. *die Koeffizientenfunktionen* $P_i(x)$ $(i = 0, 1, \ldots, k-1)$ *bezitzen für* $x \to \infty$ *endliche Grenzwerte* $\lim\limits_{x\to\infty} P_i(x) = a_i$ $(i = 0, 1, \ldots, k-1)$
2. *die Wurzeln der charakteristischen Gleichung*

$$\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{2}$$

dem absoluten Betrage nach verschieden sind und genügen den Ungleichungen

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_k|$$

3. $P_0(x)$ *ist für kein ganzzahliges x gleich Null, dann gibt es k linear unabhängige partikuläre Lösungen* $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$ *dieser Gleichung, für die*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f_i(x+1)}{f_i(x)} = \lambda_i, \qquad i = 1, 2, \dots, k$$

ist.

Beweis: Den Beweis des Perronschen Satzes führen wir durch vollständige Induktion. Die Behauptung gilt für $k = 1$, d. h. für die Differenzengleichung

$$f(x+1) + P(x) f(x) = 0, \ \lim_{x \to \infty} P(x) = a.$$

Wir nehmen an, daß für die Differenzengleichung $(k-1)$-ter Ordnung die Behauptung gilt. Für die Richtigkeit der Behauptung für k benützen wir Lemma 1. und Lemma 2. Nach dem Satz von Poincaré existiert eine Lösung $f_1(x)$ mit dem Grenzwert

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = \lambda_1.$$

(Wir setzen $\lambda_j = \lambda_1$. Die Beweisführung bleibt dieselbe bei beliebiger Wahl von λ_j). Nach der Behauptung des Lemmas 1. können wir die linke Seite der Differenzengleichung (1) auf folgende Art schreiben:

$$g(x+k-1) + Q_{k-2}(x) g(x+k-2) + \dots + Q_1(x) g(x+1) + \\ + Q_0(x) g(x) = 0, \tag{3}$$

wo

$$g(x) = f(x+1) - \big(\lambda + \delta(x)\big) f(x), \ \lim_{x \to \infty} \delta(x) = 0$$

ist. Da die Koeffizienten $P_i(x)$ und ebenso die Koeffizienten $Q_i(x)$ den Bedingungen des Perronschen Satzes genügen, erfüllen die charakteristischen Gleichungen der Differenzengleichungen (1) und (3) folgende Beziehung:

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda^{k-1} + b_{k-2}\lambda^{k-2} + \dots + b_1\lambda + b_0) = \\ = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + a_1\lambda + a_0.$$

Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung zu (3) bezeichnen wir mit $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k$ und es gilt

$$|\lambda_2| > |\lambda_3| > \dots > |\lambda_k|.$$

Die Differenzengleichung (3) ist $(k-1)$-ter Ordnung und genügt den Bedingungen des Perronschen Satzes. Nach Vorausetzung der vollständigen Induktion existieren also $k-1$ lienar unabhängige Lösungen der Gleichung (3) $g_2(x), g_3(x), \ldots, g_k(x)$ mit den Grenzwerten

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g_i(x+1)}{g_i(x)} = \lambda_i, \qquad i = 2, 3, \ldots, k.$$

Nach Lemma 2. existieren Lösungen der Gleichungen

$$f(x+1) - \bigl(\lambda_1 + \delta(x)\bigr) f(x) = g_i(x), \qquad i = 2, 3, \ldots, k,$$

$$\lim_{x\to\infty} \delta(x) = 0,$$

wobei

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f_i(x+1)}{f_i(x)} = \lambda_i, \qquad i = 2, 3, \ldots, k$$

ist. Zu diesen Lösungen kommt noch die Lösung $f_1(x)$ der Gleichung (1) hinzu.

Es bleibt noch zu zeigen, daß die Lösungen $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ für die

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f_i(x+1)}{f_i(x)} = \lambda_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, k,$$

untereinnander linear unabhängig sind. Nehmen wir an, daß die partikulären Lösungen $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ linear abhängig sind. Dann gilt die Beziehung

$$C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \ldots + C_k f_k(x) = 0,$$

wo nicht alle Konstanten C_i gleich Null sind. C_j sei die erste von Null verschiedene Konstante. Durch Dividieren mit $f_j(x)$ und Durchführung des Grenzüberganges erhalten wir

$$0 = C_j + C_{j+1} \lim_{x\to\infty} \frac{f_{j+1}(x)}{f_j(x)} + \ldots + C_k \lim_{x\to\infty} \frac{f_k(x)}{f_j(x)}.$$

Aber für $r > s$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f_r(x)}{f_s(x)} = 0,$$

wie aus der Ungleichung

$$0 < \frac{f_r(x)}{f_s(x)} < \frac{C}{C'} \frac{(|\lambda_r| + \delta)^x}{(|\lambda_s| + \delta)^x}$$

zu ersehen ist. Wegen

$$0 < \frac{|\lambda_r| + \delta}{|\lambda_s| - \delta} < 1 \qquad \text{für } r > s$$

ist aber

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(|\lambda_r| + \delta)^x}{(|\lambda_s| + \delta)^x} \frac{C}{C'} = 0.$$

Es ist somit $C_j = 0$ und die Lösungen $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$ sind linear unabhängig.

LITERATUR

Frejman G. A.: O teoremach Poincaré i Perrona „Uspechi mat. Nauk" N. S 12 N° 3 (75) 1957. 241—146.

Jevgrafov N. A.: Novoje dokazatelstvo teoremy Perrona „Izvestija Akad. Nauk SSSR" Ser. Mat. 17, 1953 77—82.

Perron O.: Über einen Satz des Herrn Poincaré „J. reine angew. Math." 136 1909 17—37.

Poincaré H.: Sur les equations linearies aux differentielles ordinaries et aux differences finies. „Amer. J. Math." 7 1885 213—217, 237—258.

SHRNUTÍ

DŮKAZ PERRONOVY VĚTY

DAGMAR ŠEDOVÁ

V práci je podán nový důkaz Perronovy věty z teorie lineárních homogenních diferenčních rovnic s proměnnými koeficienty. Důkaz je prove den na základě tvrzení Poincaréovy věty a na základě tvrzení dvou lemmat.

РЕЗЮМЕ

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ПЕРРОНА

ДАГМАР ШЕДОВА

В работе дано новое доказательство теоремы Перрона из теории линейных разностных уравнений с переменными коэффициентами. Доказательство основывается на утверждениях теоремы Пуанкаре и двух лемм, которые доказываются в работе.