Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica

Jindřich Palát

Определение множества первых интегралов одного дифференциального уравнения в частных производных 1-го порядка

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol. 12 (1972), No. 1, 35--40

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/120013`

1972 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKINAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM — TOM 37

Katedra matematické analýzy přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci
Vedoucí katedry: Prof. RNDr. Miroslav Laitoch, CSc.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МНОЖЕСТВА ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ I-ГО ПОРЯДКА

ИНДРЖИХ ПАЛАТ

(Поступило в редакцию 30. июня 1971 г.)

(В честь пятидесятичетия профессора Мирослава Лайтоха)

В настоящей работе используются обозначения, понятия, определения и частный результат (см. [2]) теории взаимного преобразования множеств интегралов двух дифференциальных уравнений в частых производных первого порядка типа

$$Y'B'(u)\,u_Y = 1\,, \tag{1}$$

где $\quad Y' = (y_1, \ldots, y_n),\ \ u'_Y = \left(\dfrac{\partial u}{\partial y_1}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial y_n}\right),\ \ B(u) = (b_{ij}(u))\,,$

$i, j = 1, 2, \ldots, n$, элементы $b_{ij}(u)$ являются на интервале $j_B = (\gamma, \delta)$, $\gamma\delta > 0$ непрерыбными функциями и такими, что для каждого $u \in j_B$ определитель $|B(u)| \neq 0$.

Уравнения типа (1) рассматриваются всегда на области $j_{n+1} = \{u \in j_B,\ Y \in e_n\}$, где e_n n-размерная область, не содержащая начало координат.

Из работы [2] вытекает следующая основная теорема.

Теорема. Пусть регулярная, квадратная матрица $K(z)$, *порядка* n, *является решением матричного уравнения*

$$\frac{dK}{dz} = K\left((1/z)\,E - B(r(z))\,\frac{dr(z)}{dz}\right),\ z \in (\alpha, \beta) = o,\ \alpha\beta > 0, \tag{K}$$

где $u = r(z)$ *непрерывная и непрерывно дифференцируемая функция* $\left(\dfrac{dr(z)}{dz} \neq 0,\ \text{для } z \in o\right)$, *отображающая интервалы* j_B *и* o *взаимнооднозначно на себя и Е-единичная матрица, порядка* n.

Тогда множество mv_B *первых интегралов уравнения* (1) *определено выражением*

$$mv_B = \{v(r^{-1}(u),\ [K(r^{-1}(u))\ Y]')\},\quad (u,\ Y') \in j_{n+1}\,,$$

где $v = v(z, x_1, \ldots, x_n) = v(z, X')$ *означает любую однородную функцию по отношению к переменным* (z, X') $(z = r^{-1}(u),\ X = K(r^{-1}(u))Y)$.

Рассмотрим особый случай уравнения (1)

$$Y'B'\,u_Y = 1\,,\quad u \in j_B\,, \tag{2}$$

где B-регулярная и постоянная матрица.

Положим $o = (e^{\alpha}, e^{\beta})$ и $r(z) = \ln z$. Если в уравнение (K) ввести новую переменную $t = \ln z$, тогда

$$\frac{dK}{dt} = K(E - B), \quad t \in (\alpha, \beta). \tag{3}$$

Как известно, решение уравнения (3) можно выразить в форме $K = K_0 e^{tJ} P$, где J-жорданова нормальная форма матрицы $E - B$ и P регулярная матрица, удовлетворяющая уравнению $E - B = PJP^{-1}$. Матрицы e^{tJ} и P, зависящие от элементарных делителей, можно, как известно, выразить вещественными элементами. Регулярная начальная матрица K_0 не имеет для нас никакого значения и поэтому удовлетворимся решением уравнения (3) вида $K = e^{tJ} P$. Согласно предыдущей теореме, получаем, что множество первых интегралов уравнения (3) можно выразить в форме

$$mw_B = \{v(e^u, e^{uJ} PY')\}, \quad (u, Y') \in j_{n+1}, \tag{4}$$

где $v = v(z, X')$ любая однородная функция по отношению к переменным (z, X') $(z = e^u, X = e^{uJ} PY)$.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$(y_1 - y_2)\frac{\partial u}{\partial y_1} + (y_2 - y_3)\frac{\partial u}{\partial y_2} + (y_3 - y_4)\frac{\partial u}{\partial y_3} + y_4\frac{\partial u}{\partial y_4} = 1$$

и соответствующее матричное уравнение

$$Y'B'u_Y = 1, \quad u \in j_B, \tag{5}$$

где

$$B = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\text{Тогда } E - B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = J$$

и если положим $P = E$, то

$$e^{uJ} = \begin{vmatrix} 1 & u & (1/2)u^2 & (1/6)u^3 \\ 0 & 1 & u & (1/2)u^2 \\ 0 & 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

и согласно (4) $mw_B =$
$= \{v(e^u, (1/6)u^3y_1 + (1/2)u^2y_2 + uy_3 + y_4, (1/2)u^2y_1 + uy_2 + y_3, uy_1 + y_2, y_1)\}$.

Если выбрать однородные фукции

$$v_1 = x_1/z, \ v_2 = x_2/z, \ v_3 = x_3/z, \ v_4 = x_4/z,$$

тогда, согласно теореме, получаем первые интегралы уравнения (5)

$$w_1 = ((1/6)u^3y_1 + (1/2)u^2y_2 + uy_3 + y_4)e^{-u},$$

$$w_2 = ((1/2)u^2y_2 + uy_3 + y_4)e^{-u}, \ w_3 = (uy_1 + y_2)e^{-u}, \ w_4 = y_1 e^{-u}.$$

Непосредственным подсчетом можно убедиться, что это фундаментальные интегралы уравнения (2).

Замечание 1. Приведенный метод нахождения первых интегралов можно применить и к уравнению

$$Y'B'u_Y = f(u), \quad u \in j_B, \tag{6}$$

где $f(u) \neq 0$, $u \in j_B$ непрерывная функция.

Это уравнение перепишем в виде

$$Y'(1/f(u))\,B'\,u_Y = 1\,, \quad u \in j_B\,.$$

Тогда уравнение (K) принимает вид

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}z} = K\left((1/z)\,E - (1/f(u))\,B\,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\right), \quad z \in o\,. \tag{7}$$

Функцию $r(z)$ определим из условия

$$1/f(r(z))\,\frac{\mathrm{d}r(z)}{\mathrm{d}z} = 1/z\,,$$

которое перепишем следующим образом

$$1/f(r(z))\,\mathrm{d}r = 1/z\,\mathrm{d}z\,,$$

Пусть $g(u)$ обозначает примитивную функцию к функции $1/f(u)$. Тогда $g(r(z)) = 1\mathrm{n}z$ и, следовательно, $r(z) = g^{-1}\,(\ln z)$, где g^{-1} обозначает обратную функцию к функции g.

Если на интервале j_B функция $f(u) > 0$ $(f(u) < 0)$, тогда функция $r(z) = g^{-1}\,(1\mathrm{n}z)$ определена на интервале $o = (\alpha, \beta)$, где $\alpha = \mathrm{e}^{g(\gamma)}$, $\beta = \mathrm{e}^{g(\delta)}$ $(\alpha = \mathrm{e}^{g(\delta)}$, $\beta = \mathrm{e}^{g(\gamma)})$. Так определенная функция $r(z)$ имеет, очевидно, свойства, о которых говорится в основной теореме.

Если в уравнении (7) положить $r(z) = g^{-1}\,(\ln z)$, $t = \ln z$, тогда уравнение (7) принимает на соответствующем интервале o вид (3). Согласно теореме, имеет множество первых интегралов уравнения (6) вид

$$mw_B = \{v(\mathrm{e}^{g(u)},\ \mathrm{e}^{g(u)}\,PY/')\},$$

где $v = v(z, X')$ любая однородная функция по отношению к переменным (z, X') $(z = \mathrm{e}^{g(u)}$, $X = \mathrm{e}^{g(u)}\,PY)$.

Замечание 2. Наконец, приведем уравнение, для которого можно, основываясь на теореме, составить определенное подмножество, множества первых интегралов.

Рассмотрим уравнение

$$Y'B'u_Y = 0\,, \tag{8}$$

где B-постоянная матрица.

Уравнению (8) соответствует характеристическая система

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = BY, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0\,.$$

Легко проверить, что каждый первый интеграл системы уравнения

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = BY, \tag{9}$$

является одновременно первым интегралом характеристической системы уравнения (8). Согласно теореме, множество первых интегралов системы (9)

$$mw_B = \{v(e^t, [e^{tJ} P Y]')\}.$$

Как видно, зависит каждый первый интеграл системы (9) на параметре t и поэтому не является, вобщем, первым интегралом урывнения (8). Однако, если удастся нам дозволенным способом исключить параметр t, тогда получим первый интеграл системы (9), который будет одновременно первым интегралом уравнения (8). Сказанное объясним на примере.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$\sum_{k=1}^{n} (s - y_k) \frac{\partial u}{\partial y_k} = 0\,, \tag{10}$$

где $s = y_1 + y_2 + \ldots + y_n$, (смотри примеры 4 . 3 и 4 . 7 из [1]).

Уравнение (10) перепишем так:

$$Y'B'\, u_Y = 0\,,$$

где

$$B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \end{vmatrix}.$$

Жорданова нормальная форма матрицы E-B.

$$J = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 2\text{-n} \end{vmatrix}.$$

Элементы матрицы P, которая должна удовлетворять уравнению $(E - B)\,P = PJ$, определены равенствами

$$\begin{aligned} &p_{1k} + p_{2k} + \ldots + p_{nk} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, (n-1), \\ &p_{1n}(1 - n) + p_{2n} + p_{3n} + \ldots + p_{nn} = 0, \\ &p_{1n} + p_{2n}(1 - n) + p_{3n} + \ldots + p_{nn} = 0, \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ &p_{1n} + p_{2n} + p_{3n} + \ldots + p_{nn}(1 - n) = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Этим условиям удовлетворяют, например, элементы матрицы

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \ldots & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$m\overline{w}_B = \{v(e^t, /e^{tJ} P\ Y/') =$$
$$= \{v(e^t, (y_1 - y_n)\, e^{2t}, (y_2 - y_n)\, e^{2t}, \ldots, (y_{n-1} - y_n)\, e^{2t}, se^{(2-n)t})\}.$$

Если в это общее выражение постепенно подставить однородные функции

$$v_1 = x_2/x_1, \ldots, v_{n-2} = x_{n-2}/x_1, v_{n-1} = (x_n/z)\,(x_1/z)^{n-1},$$

тогда получим интегральный базис уравнения (10) (смотри пример 4 . 3 из [1])

$$w_1 = (y_n - y_2)\,(y_n - y_1), \ldots, w_{n-2} = (y_n - y_{n-1})\,(y_n - y_1),$$
$$w_{n-1} = s\,(y_n - y_1)^{n-1}.$$

Условиям (11) удовлетворяют также элементы матрицы

$$P_2 = \begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1-n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Тогда $m\overline{w}_B = \{v(e^t, /e^{tJ} P_2\ Y/')\} =$

$$= \{v(e^t, (s - ny_1)\, e^{2t}, \ldots, (s - ny_{n-1})e^{2t}, se^{(2-n)t})\}.$$

Если в это общее выражение постепенно подставить однородные функции

$$v_1 = x_2/x_1, \ldots, v_{n-2} = x_{n-2}/x_{n-1}, v_{n-1} = (x_n/z)\,(x_1/z)^{n-1},$$

тогда получим другой интегральный базис уравнения (10) (смотри пример 4 . 7 из [1])

$$w_1 = (s - ny_1)/(s - ny_2), \ldots, w_{n-2} =$$
$$= (s - ny_{n-2})/(s - ny_{n-1}), \quad w_{n-1} = s(s - ny_1)^{n-1}.$$

Наконец, обратим внимание на то, что для $n = 5$, отличается нами найденный интегральный базис от интегрального базиса примера 4 . 7 из [1]. Это вызвано тем, что там приведенные функции являются первыми интегралами, но не представляют интегральный базис, так как они зависимы:

$$w_1 w_2 w_3 w_4 + w_2 w_3 w_4 + w_3 w_4 + w_4 + 1 = 0\,.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Камке Э.*: Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. Москва 1966.

[2] *Палат И.*: О преобразованиях первых интегралов двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. „Acta Universitatis Olomucensis" F. R. N.. Принято к печати.

SHRNUTÍ

KONSTRUKCE MNOŽINY PRVÝCH INTEGRÁLŮ JISTÉ PARCIÁLNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE PRVNÍHO ŘÁDU

JINDŘICH PALÁT

V této práci se používají, označení, pojmy, definice a určitý výsledek z práce [2], pojednávající o vzájemné transformaci množin prvých integrálů dvou parciálních diferenciálních rovnic typu (1).
Odvozují se obecné vzorce množin prvých integrálů rovnic (2) a (6).
Nakonec se ukazuje možnost odvození podmnožiny množiny prvých integrálů rovnice (8).

ZUSAMMENFASSUNG

KONSTRUKTION DER MENGE ERSTER INTEGRALE EINER GEWISSEN PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNG ERSTER ORDNUNG

JINDŘICH PALÁT

In der vorliegenden Arbeit benützt man Bezeichnungen, Begriffe, Definitionen und ein gewisses Resultat der Arbeit [2], worin man das Problem der wechselseitigen Transformation von Mengen erster Integrale zweier partieller Differentialgleichungen vom Typus (1) untersucht.
Es werden allgemeine Formeln für die ersten Integrale der Gleichungen (2) und (6) durch Ableitung erhalten, um schliesslich die Möglichkeit zu zeigen, wie man eine Untermenge der Menge erster Integrale der Gleichung (8) ableiten kann.