Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica

Libuše Marková

К аффинной теории кривых

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol. 10 (1969), No. 1, 25--36

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/119922

1969 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS — TOM 30
FACULTAS RERUM NATURALIUM

Katedra algebry a geometrie přírodovědecké fakulty
Vedoucí katedry: doc. dr. Josef Šimek

PŘÍSPĚVEK K AFINNÍ TEORII KŘIVEK

LIBUŠE MARKOVÁ

(Předloženo dne 14. července 1968)

К АФФИННОЙ ТЕОРИИ КРИВЫХ

В статье вкратце излагается метод Картана построения канонических реперов плоской и пространственной кривых и показаны их геометрические значения.

I. Кривая в аффинной плоскости.

1. *Построение канонического репера.*

Пусть в аффинной плоскости дана кривая при помощи векторной функции

$$m = m(t)$$

о которой предполагается, что для $t \in I$ она непрерывна и что она имеет непрерывные производные заранее данного порядка. Для инфинитезимального смещения подвижного репера в A^2 имеют место соотношения

$$dm = \omega^i e_i, \qquad de_i = \omega_i^j e_j, \qquad i, j = 1, 2 \tag{1}$$

при этом справедливы уравнения структуры аффинной плоскости

$$D\omega^i = \omega^k \Lambda \, \omega_k^i, \qquad D\omega_k^i = \omega_k^j \Lambda \, \omega_j^i, \qquad i, j, k = 1, 2$$

Присоединим репер к кривой в точке M и пусть e_1 лежит на касательной к данной линии в этой точке. Тогда

$$\omega^2 = 0 . \tag{2}$$

Условие (2) задает $\pi_1^2 = 0$, где π — значение ω при постоянном лгавном параметре. Тогда имеет место соотношение

$$\omega_1^2 = b\omega^1 \tag{3}$$

После внешнего дифференцироцания уравнения (3) при использовании леммы Картана для варияции относительно вторичных параметров получаем соотношение

$$\delta b = b(2\pi_1^1 - \pi_2^2) \tag{4}$$

и можно положить $b = 1$. Из (4) следует $2\pi_1^1 - \pi_2^2 = 0$, откуда $\omega_2^2 - 2\,\omega_1^1 = c\omega^1$ и аналогично

$$\delta c = c\pi_1^1 + 3\pi_2^1 \tag{5}$$

и можно положить $c = 0$, откуда

$$\pi_2^1 = 0 \tag{6}$$

Из (6) вытекает

$$\omega_2^1 = e\omega^1 \quad \text{и} \quad \delta\, e = e\,\pi_2^2 \tag{7}$$

В этой стадии построения репер зависит от одного вторичного параметра. Здесь положим $e = \varepsilon$, где $\varepsilon = \pm 1$. Так как $\mathrm{D}\omega^1 = 0$, можно положить $\omega^1 = \mathrm{d}s$ и записать формулы Френе-Картана в виде

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}s} &= e_1 \\ \frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}s} &= k\,e_1 + e_2 \\ \frac{\mathrm{d}e_2}{\mathrm{d}s} &= \varepsilon e_1 + 2\,k\,e_2 \end{aligned} \tag{8}$$

Из (8) видно, что этот репер можно построить только в точке, для которой имеет место

$$(m'\,m'') = (e_1\,e_2) \neq 0 \tag{9}$$

Этим условием мы исключили из нашего рассуждения прямую.

2. *Геометрическое значение канонического репера.*

Пусть имеем кривую $m = m(s)$, для которой справедливо (9). Найти семейство конических сечений, которые в данной точке нашей кривой имеют точку прикосновения третьего порядка. При помощи (8) можно уравнения линии $m = m(s)$ относительно ее канонического репера написать в виде

$$x = s + \frac{k}{2}s^2 + (k' + k^2 + \varepsilon)\frac{s^3}{6} + (k'' + 3k\,k' + k^3 + 4k\varepsilon)\frac{s^4}{4!} + \ldots \tag{10}$$

$$y = \frac{s^2}{2} + \frac{ks^3}{2} + (4k' + 7k^2 + \varepsilon)\frac{s^4}{4!} + \ldots$$

Если искать уравнение пучка в виде

$$a_{11}\,x^2 + 2a_{12}\,xy + a_{22}\,y^2 + 2a_{01}\,x + 2a_{02}\,y + a_{00} = 0,$$

то из (10) получим, что пучок задан уравнением

$$x^2 + Ay^2 - 2\,y = 0 \tag{11}$$

Из этого семейства можно выделить линию второго порядка, которая имеет с кривой соприкасание четвертого порядка. Она дана уравнением

$$x^2 - \varepsilon y^2 - 2\,y = 0 \tag{12}$$

Видим, что для $\varepsilon = +1$ это гипербола. Тогда точка, в которой эта кривая второго порядка является гиперболой, называется гиперболической точной кривой.

Если $\varepsilon = -1$ — то кривая является эллипсом и такая точка называется эллиптической точкой кривой.

Вернемся к реперажу кривой. Для определенного вида точек может иметь место равенство $e = 0$, т. е. $\omega_2^1 = 0$. Если $\omega^1 = 0$, то точка M и координатные оси остаются неизменными, но координатные векторы e_1, e_2 образуют однопараметрическую систему. Тогда можно положить $\omega_1^1 = k\,\omega^1$, но в этой формуле, при условии $e = 0$, k — величина, которая отлична от величины k в предыдущих соотношениях и уравнения инфинитезимального смещения канонического репера в этом случае можно написать в виде

$$\mathrm{d}m = \omega^1 e_1\,,\ \mathrm{d}e_1 = \omega_1^1 e_1 + \omega^1 e_2,\ \mathrm{d}e_2 = 2\,\omega_1^1 e_2\,.$$

Равно как и в (8), если формально подставить вместе ε нуль. Для $\varepsilon = 0$ кривая второго порядка с соприкасанием четвертого порядка является параболой и рассматриваемая точка называется параболической точкой кривой.

У всех типов точек вектор e_1 направлен по касательной к данной кривой, вектор e_2 определяет прямую, на которой лежат центры всех соприкасающихся линий второго порядка (11). Эту прямую будем называть аффинной нормалью плоской кривой в данной точке M.

Норма вектора e_2 в гиперболической и эллиптической точке выбирается так, чтобы центр гиперсоприкасающей линии второго порядка был $S = \left(0, -\dfrac{1}{\varepsilon}\right)$.

Определим геометрическое значение нормировки вектора e_1.

В эллиптической точке касательные к гиперсоприкасающему эллипсу имеют уравнения

$$x = \pm 1$$

Эти касательные пересекают касательную кривой в точках

$$t = m \pm e_1$$

Если точка M является точкой гиперболического типа, то асимптоты соприкасающейся гиперболы, заданые уравнениями

$$x - y - 1 = 0$$

$$x + y + 1 = 0$$

пересекают касательную кривой в точках

$$t = m \pm e_1$$

Нормировка e_1, e_2 в параболической точке не имеет геометрического значения, потому что все реперы, для которых e_1 направлено по касательной и e_2 направлено по аффинной нормали, канонические. Можно только показать взаимное отношение нормировки следующим образом: пусть $E_1 = (1, 0)$, $E_2 = (0, 1)$; прямая, проходящая через E_1 параллельно

e_2, пересекает соприкасающуюся параболу в точке $X = (1, \frac{1}{2})$. Точка $У = (1, 1)$ симметрична с точкой E_1 относительно центра X. Прямая, проходящая через точку $У$ параллелно e_1, пересекает аффинную нормаль именно в точке E_2.

Геометрическое значение ds, k.

Пусть M' точка, бесконечно близкая точке M. Тогда имеет место

$$(M_1' E_1 M) = \mathrm{d}s + \mathrm{d}s^2 \frac{k}{2} + \ldots$$

где M_1' проекция M по направлении e_2 на касательную кривой.

Эволютой линии $m = m(s)$ называется кривая, касательная которой параллельна аффинной нормали данной линии в соответствующей точке.

Она задается уравнением

$$p = m - \frac{1}{\varepsilon} e_2$$

В параболических точках эволюта неопределена.

Пусть имеем кривую, каждая точка которой симметрична с точкой эволюты относительно соответствующей точки M данной кривой. Радиус-вектор ее произвольной точки можно написать в виде

$$p = m + \frac{1}{\varepsilon} e_2 \tag{13}$$

Точка пересечения касательных в соответствующих точках данной линии и линии (13) имеет координаты $X = \left(-\frac{1}{2k}, 0\right)$. Получим геометрическое истолкование величины k, которую мы будем называть аффинной кривизной.

Для определения геометрического значения k в параболической точке достаточно взять кривую

$$p = m + e_2$$

Тогда касательная в соответствующей точке (точке M), пересекает касательную кривой в точке $X = \left(-\frac{1}{2k}, 0\right)$.

Замечание.

Аналогично, как в метрической геометрии, мы можем сформулировать теорему о существовании и однозначности.

Если известно значение инварианта k в каждой точке кривой для данного ε как функция натурального параметра s, то кривая определена вплоть до аффинных преобразований.

$k = k(s)$ называется натуральным уравнением плоской кривой. Для вычисления k из (8) получим

$$k = \frac{(m' \, m''')}{3 \, (m' \, m'')}$$

где штрихи обозначают производные относительно s и скобки — это символ для определителей, которые составлены из координат соответствующих векторов в скобках.

II. Кривая в аффинном пространстве,

1. *Канонический репер кривой в пространстве.*

Пусть в A^3 задана пространственная кривая векторной функцией

$$m = m\,(t)$$

которая удовлетворяет тем же условиям как с первой части настоящей статьи. Для ее подвижного репера умеют место соотношения

$$\mathrm{d}m = \omega^i e_i, \qquad \mathrm{d}e_i = \omega_i^j e_j, \qquad i, j = 1, 2, 3$$

причем справедливы уравнения структуры аффинного пространства. Пусть вектор e_1 направлен по касательной кривой в точке M. Тогда

$$\omega^2 = \omega^3 = 0$$

и внешним дифференцированием при использовании леммы Картана получаем

$$\omega_1^2 = \alpha\omega^1, \quad \omega_1^3 = \beta\omega^1 \tag{1}$$

и для вариаций α, β относительно вторичных параметров мы получаем

$$\begin{aligned} \delta\alpha &= \alpha(2\,\pi_1^1 - \pi_2^2) - \beta\,\pi_3^2 \\ \delta\beta &= \beta(2\,\pi_1^1 - \pi_3^3) - \alpha\,\pi_2^3 \end{aligned} \tag{2}$$

Из (2) следует, что $\alpha = \beta = 0$ — инвариантный выбор. Поэтому положим

$$\alpha = 1, \qquad \beta = 0, \tag{3}$$

что дает возможность писать

$$\omega_2^2 - 2\omega_1^1 = \gamma\omega^1, \qquad \omega_2^3 = \lambda\omega^1$$

и аналогично получаем (4)

$$\begin{aligned} \delta\gamma &= \gamma\,\pi_1^1 - \lambda\,\pi_3^2 + 3\,\pi_2^1 \\ \delta\lambda &= \lambda\,(\pi_1^1 + \pi_2^2 - \pi_3^3) \end{aligned} \tag{5}$$

и можно выбрать

$$\lambda = 1, \qquad \gamma = 0. \tag{6}$$

Тогда в соответствии с (4), (5), (6) формы $\omega_3^2 - 3\omega_2^1$, $\omega_3^3 - 3\omega_1^1$ являются главными формами и их можно написать в виде

$$-3\omega_2^1 + \omega_3^2 = \nu\omega^1, \qquad \omega_3^3 - 3\omega_1^1 = \mu\omega^1 \tag{7}$$

и для вариации ν, μ относительно вторичных параметров имеем

$$\begin{aligned}\delta\nu &= 2\,\nu\pi_1^1 - \mu\pi_3^2 + 4\,\pi_3^1 \\ \delta\mu &= \mu\pi_1^1 + 3\pi_2^1 + \pi_3^2\end{aligned} \tag{8}$$

Из (8) следует, что можно положить

$$\nu = \mu = 0 \tag{9}$$

и ω_2^1 становится главной формой

$$\omega_2^1 = l\omega^1 \quad \text{и} \quad \mathrm{d}l = l\pi_2^2 \tag{10}$$

Аналогично, как у плоской кривой, мы можем выбрать $l = \varepsilon$, где $\varepsilon = \pm 1$ и формально и $\varepsilon = 0$. В этом случае реперы образуют однопараметрическую систему.

Из (1), (3), (4), (6), (7), (9,) (10) можно получить уравнения инфинитезимального смещения канонического репера

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}s} &= e_1 \\ \frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}s} &= k_1e_1 + e_2 \\ \frac{\mathrm{d}e_2}{\mathrm{d}s} &= \varepsilon e_1 + 2k_1e_2 + e_3 \\ \frac{\mathrm{d}e_3}{\mathrm{d}s} &= k_2e_1 + 3\varepsilon\, e_2 + 3k_1e_3\end{aligned} \tag{11}$$

Этот репер можно построить только при условии, что

$$(m'\,m''\,m''') = (e_1\,e_2\,e_3) \neq 0$$

и таким образом исключаем из нашего рассуждения плоские кривые, как частный случай пространственных кривых.

2. *Геометрическое значение канонического репера.*

Вектор e_1 направлен по касательной кривой. Для определения геометрического значения векторов e_2, e_3 проектируется кривая на ее соприкасающуюся плоскость (т. е. на плоскость Me_1e_2) параллельно вектору e_3.

Так как уравнения кривой относительно канонического, репера в точке M имеют вид

$$\begin{aligned}x &= s + \frac{k_1 s^2}{2} + (k_1' + k_1^2 + \varepsilon)\frac{s^3}{3!} + (3k_1\,k_1' + k_1^3 + 4\varepsilon k_1 + k_1'' + k_2)\frac{s^4}{4!} + \ldots \\ y &= \frac{s^2}{2} + \frac{k_1 s^3}{2} + (4k_1' + 7k_1^2 + 4\varepsilon)\frac{s^4}{4!} + \ldots \\ z &= \frac{s^3}{6} + \frac{k_1 s^4}{4} + \ldots\end{aligned} \tag{12}$$

проекция кривой на соприкасающуюся плоскость задана уравнениями

$$x = s + \frac{k_1 s^2}{2} + (k_1' + k_1^2 + \varepsilon)\frac{s^3}{6} + (3k_1 k_1' + k_1^3 + 4\varepsilon k_1 + k_1'' + k_2)\frac{s^4}{4!} + \ldots$$

$$y = \frac{s^2}{2} + \frac{k_1 s^3}{2} + (4k_1' + 7k_1^2 + 4\varepsilon)\frac{s^4}{4!} + \ldots$$

Аналогично, как в первой части настоящей статьи устанавливается, что уравнение семейства соприкасающихся второго порядка, имеющих с кривой касание третего порядка, имеет вид

$$x^2 + A\, y^2 - 2\, y = 0$$

от суда можно установить, что вектор e_2 задается направлением аффинной нормали проекции кривой на соприкасающуюся плоскость в рассматриваемой точке.

Если выделить из этого семейства линию второго порядка, которая имеет касание четвертого порядка с кривой, то устанавливаем, что данная кривая — парабола

$$x^2 - 2\, y = 0$$

и можно сформулировать теорему.

Проекция кривой на ее соприкасающуюся плоскость параллельно вектору e_3 имеет в этой точке M всегда параболическую точку.

Тоже обратная теорема имеет место.

Вектор e_3 определяет единственное направление проектирования кривой на ее соприкасающуюся плоскость в точке M, для которого точка M является параболической точкой проекции.

Доказательство. Обозначим через

$$t = \xi e_1 + \eta e_2 + e_3$$

направление проекции кривой $m = m(s)$ на ее соприкасающуюся плоскость в точке M. Проекция запишется в виде

$$r = \varrho + \lambda t$$

где ϱ определяем из уравнений (11) и λ из условия, что r лежит в соприкасающейся плоскости (Me_1e_2). Имеет место условие

$$(r\, e_1 e_2) = 0$$

Это дает $\lambda = -z$

Тогда

$$r = (x - z\xi)e_1 + (y - z\eta)e_2 = X\, e_1 + Y\, e_2\,,$$

где

$$X = s + \frac{k_1 s^2}{2} + (k_1' + k_1^2 + \varepsilon - \xi)\frac{s^3}{6} + (3k_1 k_1' + k_1^3 + 4k_1\varepsilon + k_1'' + k_2 - $$

$$- 6k_1\, \xi)\frac{s^4}{24} + \ldots$$

$$У = \frac{s^2}{2} + (3k_1 - \eta)\frac{s^3}{6} + (4k_1' + 7k_1^2 + 4\varepsilon - 6k_1\eta)\frac{s^4}{24} + \ldots$$

Если искать соприкасающуюся линию второго порядка, то для ее коэффициентов имеют места равенства

$$a_{00} = 0,\ a_{01} = 0,\ a_{11} = -a_{02},\ a_{12} = \frac{\eta}{3}a_{02}$$

и для линии второго порядка, имеющей касание четвертого порядка с кривой еще

$$a_{22} = 4\,a_{02}\left(\frac{\eta^2}{9} - \frac{\xi}{3}\right)$$

Для того, чтобы вектор e_2 был направлен по нормали проекции необходимо и достаточно, чтобы $a_{12} = 0$, т. е. $\eta = 0$. Для того, чтобы гиперсоприкасающаяся кривая второго порядка была параболой необходимо и достаточно, чтобы $a_{22} = 0$, т. е. $\xi = 0$, чем и теорема доказана.

Геометрическое значение нормировки векторов репера.

Пусть задано семейство нормальных плоскостей. Найти его огибающую. Характеристика плоскости этого семейства — прямая

$$r = m - \frac{1}{k_2}e_3 + \mu\left(e_2 - \frac{\varepsilon}{k_2}e_3\right) \tag{13}$$

Показывается, что для $\varepsilon = 1$ эта характеристика проходит через точку $r = m - e_2$ и для $\varepsilon = -1$ через точку $r = m + e_2$. Таким образом мы определили норму вектора e_2 при $\varepsilon \neq 0$. Вектор e_1 относительно e_2 имеет в данном случае одинаковую нормировку как у плоской кривой в параболической точке, что следует из проекции кривой на ее соприкасающуюся плоскость.

Если искать огибающую семейства спрямляющих плоскостей, то ее характеристика имеет всегда направление $-3\varepsilon e_1 + e_3$, что определяет норму вектора e_3 относительно вектора e_1 для $\varepsilon \neq 0$.

Геометрическое истолькование ε. Норма при $\varepsilon = 0$.

Будем искать теперь соприкасающийся конус второго порядка, котоpий содержит прямую $r = m + \lambda e_1$ и пять бесконечно близких прямых. Уравнение етого конуса имеет вид

$$(r^{(1)} * r^{(2)}) = 0\,,$$

где (*) обозначает квазискалярное произведения векторов $r^{(1)}$, $r^{(2)}$, для которого имеет место

$$(r^{(1)} * r^{(2)}) = \sum_{i,k=1}^{3} x_i^{(1)}\, x_k^{(2)}\left(e_i * e_k\right),$$

где произведения базисных векторов даны в следующим виде

$$\left(e_i * e_k\right) = a_{ik} = a_{ik}$$

и $x_i^{(1)}$ и соответственно $x_i^{(2)}$, являются координатами вектора $r^{(1)}$, соответственно $r^{(2)}$.

Согласно определению конуса должно быть

$$(e_1 * e_1) = (e_1 + \mathrm{d}e_1 * e_1 + \mathrm{d}e_1) = \ldots\ldots = \Big(e_1 + \mathrm{d}e_1 + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}^2e_1 + \\ + \frac{1}{6}\,\mathrm{d}^3e_1 + \frac{1}{24}\,\mathrm{d}^4e_1 + \frac{1}{120}\,\mathrm{d}^5e_1 * e_1 + \mathrm{d}e_1 + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}^2e_1 + \frac{1}{6}\,\mathrm{d}^3e_1 + \\ + \frac{1}{24}\,\mathrm{d}^4e_1 + \frac{1}{120}\,\mathrm{d}^5e_1\Big) = 0$$

Эти соотношения совпадают с теми, которые мы получим если формально дифференцировать отношение $(e_1 * e_1) = 0$ и использовать уравнениями (11).

Получаем

$$(e_1 * e_1) = 0,\ (e_1 * e_2) = 0,\ (e_2 * e_2) + (e_1 * e_3) = 0,$$
$$(e_2 * e_3) = 0,\ \varepsilon(e_1 * e_3) + 3\varepsilon(e_2 * e_2) + (e_3 * e_3) = 0$$

Уравнение искомого конуса имеет вид

$$y^2 - 2\,xz - 2z^2 = 0\,. \tag{14}$$

Находим сечение конуса (14) плоскостью $x = 2$. Это линия второго порядка в виде

$$y^2 - 2z^2 - 4z = 0\,.$$

Если $\varepsilon = 1$, то линия является гиперболой, если $\varepsilon = -1$ — эллипсом и при $\varepsilon = 0$ — параболой.

Если $\varepsilon = 1$, то точка кривой называется гиперболической, если $\varepsilon = -1$, то точка называется эллиптической и для $\varepsilon = 0$ точка является параболической точкой кривой.

Центр найденного еллипса имеет координаты $S = (0, 0, 1)$, гиперболы — $S = (0, 0, -1)$. Таким образом мы вторым способом определили взаимную нормировку e_1, e_3 для $\varepsilon \neq 0$. Для $\varepsilon = 0$ парабола имеет уравнение

$$y^2 - 4z = 0 \tag{15}$$

и нормировка производится аналогично как у плоской кривой. Если взаимное отношение длин векторов e_1, e_2 известно (при помощи проекции кривой на ее соприкасающуюся плоскость — как уже было сказано выше), то можно взаимное отношение нормировки всех трех векторов e_1, e_2, e_3 установить аналогично. Через точку $E_2 = (2, 1, 0)$ проводим прямую параллельно e_3. Эта прямая пересекает параболу (15) в точке $Z = (2, 1, \frac{1}{4})$. Пусть E_2' — точка, симметричная E_2 относительно точки Z. Через E_2' проводим прямую параллельно e_2, которая пересекает главную нормаль в мочке $E_3' = (2, 1, \frac{1}{2})$ и таким образом отношение норм e_1, e_2, e_3 определено.

Геометрическое значение $\mathrm{d}s$, k_1, k_2.

Элемент ds равняется главной части отношения

$$(M_1'E_1M) = \mathrm{d}s + (2)\,,$$

где через (2) обозначаются члены второго порядка и выше, через M_1' — проекция точки M', близкой к точке M, параллельно плоскости (Me_2e_3) на касательную кривой.

Пусть дана кривая

$$r = m - \varepsilon e_2 \quad \text{для} \quad \varepsilon \neq 0.$$

Касательная этой кривой пересекает соответствующую бинормаль данной кривой в точке $X = \left(0, 0, -\frac{\varepsilon}{2k_1}\right)$.

Если $\varepsilon = 0$, то будем рассматривать кривую

$$r = m + e_2$$

Ее касательная пересекает соответствующую спрямляющую плоскость данной кривой в точке $X = \left(-\frac{1}{2k_1}, 0, -\frac{1}{2k_1}\right)$.

Таким образом геометрическое истолкование инварианта k_1 показано.

Из уравнений (13) явствует, что бинормаль пересекает характеристику нормальных плоскостей в точке $Z = \left(0, 0, -\frac{1}{k_2}\right)$.

Соприкасающийся линейный комплекс прямых.

Будем искать линейный комплекс прямых, который содержит касательную $[m * e_1]$ (т. е. $M\,e_1$) и четыре прямые, бесконечно близкие к заданой, типа $[m + \Delta m * e_1 + \Delta e_1]$. Формально дифференцируя уравнение $\{b\,[m * e_1]\} = 0$ и используя (11), получаем

$$\begin{aligned}
&\{b\,[m * e_1]\} = 0, \quad \{b\,[m * e_2]\} = 0,\\
&\{b\,[e_1 * e_2]\} + \{b\,[m * e_3]\} = 0, \quad \{b\,[e_1 * e_3]\} = 0,\\
&\{b\,[e_2 * e_3]\} + 3\varepsilon\,\{b\,[e_1 * e_2]\} = 0.
\end{aligned} \tag{16}$$

Уравнение искомого комплекса имеет вид

$$p_{03} - p_{12} + 3\varepsilon p_{23} = 0$$

Аффинная ось этого комплекса есть вектор, которой соответствует несобственной точке в нулевой комплексовой корреляции. Это вектор вида

$$3\varepsilon e_1 - e_3$$

и таким образом можно сформулировать теорему.

Аффинная ось соприкасающегося линейного комплекса прямых коллинеарна характеристике спрямляющих плоскостей данной пространственной кривой.

Рассматриваемая кривая называется комплексовая, если все ее касательные принадлежат одному линейному комплексу. Для этого достаточно дифференцировать последнее отношение (16) и получаем

$$5k_1 \{b [e_2 * e_3]\} + 9\varepsilon k_1 \{b [e_1 * e_2]\} + k_2 \{b [e_2 * e_1]\} = 0$$

откуда

$$6\varepsilon k_1 + k_2 = 0 .$$

Замечание.

Аналогично с метрическим случаем можно сформулировать теорему о существовании и однозначности.

Если известны значения k_1 и k_2 в каждой точке кривой для данного ε, кривая определеная вплоть до аффинных преобразований пространства.

$k_1 = k_1(s)$, $k_2 = k_2(s)$ называются натуральными уравнениями пространственной кривой.

По формуле (11) получаем

$$k_1 = \frac{(m^{\mathrm{I}}\, m^{\mathrm{II}}\, m^{\mathrm{IV}})}{6(m^{\mathrm{I}}\, m^{\mathrm{II}}\, m^{\mathrm{III}})}$$

$$k_2 = \frac{(m^{\mathrm{I}}\, m^{\mathrm{II}}\, m^{\mathrm{IV}})}{(m^{\mathrm{I}}\, m^{\mathrm{II}}\, m^{\mathrm{III}})} - 6k_1^3 + 7k_1' k_1 + 6k_1\varepsilon - k_1''$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Л. К. Тутаев:* Линии и поверхности в аффинном трехмерном пространстве (Минск 1962).

[2] *Tiberiu Mihăilescu, Cluj:* Géométrie différentielle affine des courbes planes (Czechoslovak Mathematical Journal T. 9 (84), Praha 1959).

ZUSAMMENFASSUNG

BEITRAG ZU DER AFFINEN THEORIE DER KURVEN

LIBUŠE MARKOVÁ

In der Betrachtung wird die Cartan-Methode des kanonischen begleitenden n-Beins in der affinen Ebene und Raum beschrieben. Die regulären Punkte der ebenen Kurve werden je nachdem Typ des hyperosculierenden Kegelschnitts in diesem Punkt klassifiziert.

Zu jedem Typ wird ein kanonisches begleitendes n-Bein konstruiert. Auf analogem Wege lassen sich die regulären Raumkurvenpunkte je nachdem Typ des durchschneidenden Kegelschnitts des Schmiegkegels zweiter Ordnung mit der Ebene, welche zu der Normalebene kollinear ist, verteilen; ebenso wird die Konstruktion der kanonischen begleitenden n-Beine in den einzelnen Typen von Punkten der betrachteten Kurve möglich sein.

Im weiteren werden noch geometrische Charakteristiken der kanonischen begleitenden n-Beine und den zugehörigen Invarianten von Kurven durch Einführung verschiedener, an die Kurve festgebundener Objekte dargestellt.

SUMMARY

A CONTRIBUTION TO THE AFFINE THEORIE OF CURVES

LIBUŠE MARKOVÁ

This article is a brief treatment of the Cartan's method for the moving frame of curves in an affine plane and space. The regular points of the plane curve are classified according to the type of the competent hyperosculating conic section at this point.

Each type is accompanied with a construction of a canonical moving frame. Similarly the regular points of the space curve may be categorized according to the type of the intersecting conic section of the second order osculating cone with the plane being collinear to the normal plane; the construction of the canonical moving frames in the particular types of points to the curve considered, may be done as well.

Some geometrical features of the canonical moving frames and the belonging invariants of curves are shown by presentation of various geometrical objects firmly connected to the curve.