

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum
Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica

Pavel Chmela

Totalreflexion an der Grenze zwischen einem einachsigen Kristall und dem isotropen
Medium

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol.
10 (1969), No. 1, 203--217

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/119909>

Terms of use:

© Palacký University Olomouc, Faculty of Science, 1969

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to
digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain
these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped
with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics
Library* <http://project.dml.cz>

*Katedra teoretické fyziky a astronomie přírodovědecké fakulty
Vedoucí katedry: prof. RNDr. et DSc. Bedřich Havelka*

TOTALREFLEXION AN DER GRENZE ZWISCHEN EINEM EINACHSIGEN KRISTALL UND DEM ISOTROPEN MEDIUM

PAVEL CHMELA

(Eingegangen am 14. 6. 1968)

I. Einleitung

Zum Studium der Totalreflexion an der Grenze zwischen den anisotropen Medien wenden meisten Autoren die Brechungsgesetze für die Normalenrichtung der Lichtausbreitung an [4], [5].

Diese Auffassung ist im allgemeinen Falle nicht korrekt, wie wir an einem einfachen Beispiel zeigen möchten.

Wir gehen von der Huygensschen Konstruktion (Abb. 1.) des gebrochenen Strahls aus, der sich aus dem Medium des einachsigen Kristalls ins isotrope Medium bricht. Für eine bestimmte Strahlenrichtung des einfallenden ausserordentlichen Strahls $\vec{f}(m)$ bekommen wir den Brechungswinkel $\varepsilon'_r(m) = 90^\circ$. Der entsprechende Einfallswinkel $\varepsilon_r(m)$ stellt dann den Grenzwinkel des ausserordentlichen Strahls in der Hauptschnittebene dar.

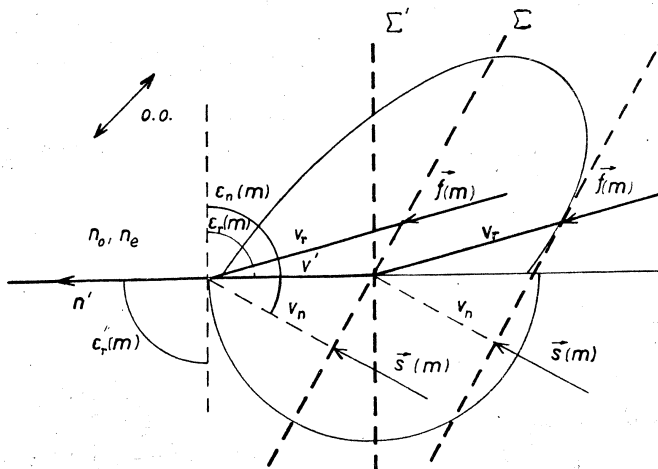


Abb. 1

Wenn wir zur Strahlenrichtung $\vec{f}(m)$ die entsprechende Normalenrichtung $\vec{s}(m)$ konstruieren, ist es klar, dass beide Richtungen verschieden sind. In einigen Fällen, wie z. B. in dem Falle, der auf der Abb. 1. gezeigt ist, kann es dazu kommen, dass der Strahlenrichtung $\vec{f}(m)$ eine solche Normalenrichtung $\vec{s}(m)$ entspricht, die mit der Normale an der Grenzfläche den Winkel $\varepsilon_n(m) > 90^\circ$ einschliesst. Dieses bedeutet, dass in einem solchen Falle nach der Normalenauffassung die Totalreflexion nicht vorkommen würde, was der Tatsache widerspricht.

Falls das erste Medium isotrop ist und das zweite Medium ein einachsiger Kristall ist, hat die Normalenauffassung überhaupt keine Bedeutung.

Im Falle, dass das erste Medium isotrop und das zweite Medium ein einachsiger Kristall ist, werden wir weiter die Normalenauffassung überhaupt nicht benutzen.

Im Falle, dass das erste Medium ein einachsiger Kristall und das zweite Medium isotrop ist, führen wir bloss die Formeln für die Normalenauffassung an, deren Gültigkeit wir auf Grund der Strahlenauffassung begrenzen.

II. Die Totalreflexion an der Grenze, die als das erste Medium ein isotropes Medium und als das zweite Medium ein einachsiger Kristall bilden

Wir bezeichnen mit n den Brechungsindex des isotropen Mediums und mit n'_o, n'_e die Hauptbrechungsindizes des einachsigen Kristalls.

Es ist offensichtlich, dass wir bei beliebigem Winkel des Ausschliffes und bei beliebigem Azimut der Einfallsebene für den Grenzwinkel des ordentlichen Strahls $\varepsilon_o(m)$ die Beziehung

$$\sin \varepsilon_o(m) = \frac{n}{n'_o} \quad (1)$$

bekommen, die mit dem Ausdruck für den Grenzwinkel an der Grenze zwischen zwei isotropen Medien identisch ist. Die reale Lösung gibt es nur in dem Falle, dass $n'_o \geq n$ ist.

Für die Brechung des ausserordentlichen Strahls aus dem isotropen Medium ins Medium des einachsigen Kristalls wurden für die Strahlenrichtung folgende Brechungsgesetze abgeleitet [2], [3]:

$$\sin \varepsilon'_r = \sqrt{\frac{r'^2_\xi + r'^2_\eta}{r'^2_\xi + r'^2_\eta + r'^2_\zeta}}, \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} \varphi'_r = \frac{r'_\eta}{r'_\xi}, \quad (3)$$

wo

$$r'_\xi = A \varrho' - B n \sin \varepsilon \cos \varphi$$

$$r'_\eta = -\frac{n}{n'^2_e} \sin \varepsilon \sin \varphi$$

Strahl als die Funktion des Winkels des Ausschliffes ψ und des Azimutes der Einfallsebene φ_r an.

Wenn $n > n'_e, n > n'_o$ ist, so hat die Gleichung (9) immer reale Lösung für $\varepsilon_r(m)$, d. h. der Ausdruck auf der rechten Seite ist kleiner als 1 und grösser als 0.

Wenn n zwischen den Werten der Hauptindizes des einachsigen Kristalls n'_o, n'_e liegt, d. h.

für die positiven Kristalle

$$n'_e \geq n \geq n'_o$$

und für die negativen Kristalle

$$n'_e \leq n \leq n'_o,$$

ist es nötig, die genauere Diskussion durchzuführen.

Wir bezeichnen mit

$$f = k_1 \frac{1}{\left(\frac{1}{n_o'^2} \cos^2 \varphi_r + D \sin^2 \varphi_r \right)}. \quad (10)$$

Das Extrem dieser Funktion stellen wir durch die Derivation nach φ_r fest:

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi_r} = -k_2 \left(D - \frac{1}{n_o'^2} \right) \sin \varphi_r \cos \varphi_r = 0. \quad (11)$$

Daraus folgt, dass die Funktion f die extremen Werte in den Einfallsebenen

$$\varphi_r = 0, \varphi_r = 90^\circ, \varphi_r = 180^\circ, \varphi_r = 270^\circ$$

annimmt, die der Hauptschnittebene und der zur Hauptschnittebene senkrechten Ebene entsprechen.

In diesen Ebenen ist die zweite Derivation der Funktion f durch den Ausdruck

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi_r^2} = k_3^2 (n_e'^2 - n_o'^2) (\cos^2 \varphi_r - \sin^2 \varphi_r) \quad (12)$$

gegeben.

Das heisst also, dass für die positiven Kristalle, für die

$$n'_e \geq n \geq n'_o$$

ist, hat die Funktion $\sin^2 \varepsilon_r(m)$

Minimum in der Hauptschnittebene ($\varphi_r = 0, \varphi_r = 180^\circ$)

und

Maximum in der zur Hauptschnittebene senkrechten Ebene

$$(\varphi_r = 90^\circ, \varphi_r = 270^\circ).$$

Für die negativen Kristalle, für die

$$n'_e \leq n \leq n'_o$$

ist, hat die Funktion $\sin^2 \varepsilon_r(m)$

Maximum in der Hauptschnittebene ($\varphi_r = 0, \varphi_r = 180^\circ$)
und

Minimum in der zur Hauptschnittebene senkrechten Ebene
($\varphi_r = 90^\circ, \varphi_r = 270^\circ$).

Aus der Beziehung (9) ist es klar, dass der Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung für alle Werte φ_r positiv ist. Die Grösse $\sin^2 \varepsilon_r(m)$ hat also immer die reale Lösung $\sin \varepsilon_r(m)$. Es ist aber nicht garantiert, dass $\sin^2 \varepsilon_r(m)$ kleiner als 1 ist.

Jetzt stellen wir in der Hauptschnittebene den Grenzfall fest, für den

$$\begin{aligned} \sin^2 \varepsilon_r(m) &= 1 \\ \varepsilon_r(m) &= 90^\circ \end{aligned}$$

ist, und zwar so, dass wir in der Hauptschnittebene den Winkel des Ausschliffes ψ_0 suchen, für den aus (9) für $\varphi_r = 0$ folgt

$$\frac{n_e'^2 n_o'^2 D}{n^2} = 1. \quad (13)$$

Daraus erhalten wir nach der Auswertung des Koeffizienten D

$$\sin^2 \psi_0 = \frac{n_e'^2 - n^2}{n_e'^2 - n_o'^2}. \quad (14)$$

Bezüglich zu den Bedingungen des Maximums und Minimums der Funktion $\sin^2 \varepsilon_r(m)$ gilt:

Im Falle der negativen Kristalle, für die

$$n_e' \leq n \leq n_o'$$

ist,

für $\psi < \psi_0$ tritt die Totalreflexion in allen Azimuten φ_r ein;

für $\psi > \psi_0$ tritt die Totalreflexion bloss in einigen Azimuten φ_r ein, wie Abb. 3a zeigt.

Im Falle der positiven Kristalle, für die

$$n_e' \geq n \geq n_o'$$

ist,

für $\psi < \psi_0$ tritt die Totalreflexion in keinem Azimut ein;

für $\psi \geq \psi_0$ tritt die Totalreflexion bloss in einigen Azimuten φ_r ein, wie Abb. 3b zeigt.

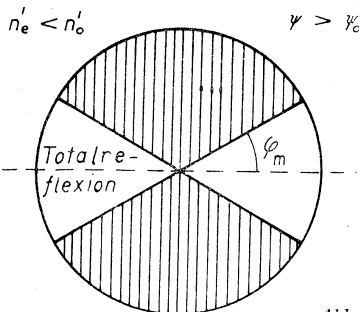


Abb. 3a

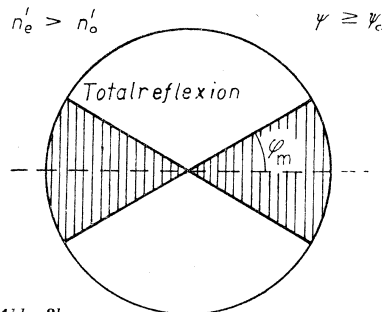


Abb. 3b

Die Werte des Azimutes φ_m , das das Gebiet festlegt, in dem die Totalreflexion vorkommt, kann man aus der Beziehung (9) bestimmen, dass man $\sin^2 \varepsilon_r(m) = 1$ legt. Daraus folgt für den Winkel des Ausschiffes

$$\cos^2 \varphi_m = \frac{D n_e'^2 n_o'^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_e'^2} \right)}{1 - D n_o'^2} \quad (15)$$

In einem Sonderfalle, wenn der Winkel des Ausschiffes $\psi = 90^\circ$ ist, haben wir

$$\cos^2 \varphi_m = \frac{n_o'^2 (n_e'^2 - n^2)}{n^2 (n_e'^2 - n_o'^2)} \quad (16)$$

Wenn der Winkel des Ausschiffes $\psi = 0$ ist, ist der Grenzwinkel $\varepsilon_r(m)$ vom Azimut unabhängig

$$\sin^2 \varepsilon_r(m) = \frac{n_e'^2}{n^2}, \quad (17)$$

und es gibt reale Lösung $\varepsilon_r(m)$ nur für den Fall, dass $n > n_e'$ ist.

Weil das erste Medium isotrop ist, richten sich alle Strahlen, deren Einfallswinkel $\varepsilon_o' > \varepsilon_o(m)$ und $\varepsilon_r > \varepsilon_r(m)$ ist, nach dem gewöhnlichen Reflexionsgesetz.

Wir werden uns nicht eingehend mit den energetischen Verhältnissen des einfallenden, durchgehenden und reflektierten Lichtes beschäftigen. Wir möchten nur bemerken, dass die Formeln für Durchlässigkeit und Reflexionsvermögen sich wesentlich von den Formeln für Durchlässigkeit und Reflexionsvermögen an der Grenze zwischen zwei isotropen Medien unterscheiden. Besonders kommen grosse Anomalien in dem Falle vor, wenn der Einfallswinkel zwischen den Winkeln $\varepsilon_o(m)$ und $\varepsilon_r(m)$ liegt.

III. Die Totalreflexion an der Grenze, die als das erste Medium ein einachsiger Kristall und als das zweite Medium ein isotropes Medium bilden

1. Strahlenauffassung

Ähnlich wie in dem vorgehenden Absatz gilt für den Grenzwinkel des ordentlichen Strahls $\varepsilon_o(m)$

$$\sin \varepsilon_o(m) = \frac{n_o}{n'}, \quad (18)$$

wo mit n' der Brechungsindex des zweiten isotropen Mediums und mit n_o, n_e die Hauptbrechungsindizes des ersten Mediums — eines einachsigen Kristalls bezeichnet sind.

Es ist offensichtlich, dass die reale Lösung (18) durch die Bedingung $n' > n_o$ begrenzt ist.

Für die Brechung des ausserordentlichen Strahls aus dem einachsigen Kristalls

ins isotrope Medium wurden für die Strahlenrichtung folgende Brechungsgesetze abgeleitet [3]:

$$\sin \varepsilon_r' = \frac{n_o^2 n_e^2 (A r_\xi + D r_\eta)}{n' \cos \varphi_r'}, \quad (19)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_r' = \frac{r_\eta}{n_o^2 (D r_\xi + A r_\eta)}, \quad (20)$$

wo

$$n_r^2 = n_o^2 \cos^2 \Phi_r + n_e^2 \sin^2 \Phi_r, \quad (21)$$

und

$$\cos \Phi_r = \cos \varepsilon_r \cos \psi + \sin \varepsilon_r \sin \psi \cos \varphi_r.$$

Die Grössen r_ξ , r_η , r_ζ sind durch Beziehungen

$$r_\xi = \frac{1}{n_r} \sin \varepsilon_r \cos \varphi_r$$

$$r_\eta = \frac{1}{n_r} \sin \varepsilon_r \sin \varphi_r$$

$$r_\zeta = \frac{1}{n_r} \cos \varepsilon_r$$

gegeben, und die Bedeutung der Koeffizienten A , B , D ist die gleiche, wie im vorhergehenden Absatz.

Die genaue Orientierung des Azimuts φ_r' bestimmen wir wie folgt:

$$\text{für } \frac{\operatorname{tg} \varphi_r'}{\operatorname{tg} \varphi_r} < 0$$

liegt der gebrochene Strahl in einem Nachbarquadranten, der symmetrisch zum Quadranten des einfallenden Strahls um die ξ - Achse ist;

$$\text{für } \frac{\operatorname{tg} \varphi_r'}{\operatorname{tg} \varphi_r} > 0$$

liegt der gebrochene Strahl im gegenüberliegenden Quadranten, der symmetrisch zum Quadranten des einfallenden Strahl um den Anfangspunkt 0 ist [3].

Für die Bestimmung des Grenzwinkels des ausserordentlichen Strahls benutzen wir die Beziehungen (19) und (20), in denen wir $\varepsilon_r' = 90^\circ$, d. h. $\sin \varepsilon_r' = 1$ legen.

Daraus erhalten wir zwei Gleichungen

$$n'^2 \cos^2 \varphi_r' = n_e^4 n_o^4 (A r_\xi + D r_\eta)^2 \quad (22)$$

$$\cos^2 \varphi_r' = \frac{n_o^4 (D r_\xi + A r_\eta)^2}{n_o^4 (D r_\xi + A r_\eta)^2 + r_\eta^2} \quad (23)$$

Nach der Eliminierung $\cos \varphi_r'$ und der Umformung bekommen wir für den Grenzwinkel $\varepsilon_r(m)$ den Ausdruck

$$\sin^2 \varepsilon_r(m) = \frac{b^2 - 2ac + \operatorname{sgn} \left(\lg \frac{n_e}{n_o} \right) b \sqrt{b^2 - 4ac - 4c^2}}{2(a^2 + b^2)}, \quad (24)$$

wo wir

$$a = \left(n_o^4 D^2 - P \frac{n'^2}{n_e^4} \right) \cos^2 \varphi_r + \sin^2 \varphi_r + \frac{n'^2}{n_e^4} R - A^2 n_o^4$$

$$b = \left(2 n_o^4 A D - 2 \frac{n'^2 n_o^2 A}{n_e^2} \right) \cos \varphi_r$$

$$c = n_o^4 A^2 - \frac{n'^2}{n_e^4} (n_e^2 + R)$$

bezeichnet haben.

Die Koeffizienten R und P sind folgenderweise gegeben:

$$P = (n_o^2 - n_e^2) \sin^2 \psi$$

$$R = (n_o^2 - n_e^2) \cos^2 \psi.$$

Der Koeffizient b hängt von der ersten Potenz $\cos \varphi_r$ ab und so ist es klar, dass der Ausdruck $\sin^2 \varepsilon_r(m)$ nicht symmetrisch für zwei Azimute φ_r und $\varphi_r + 180^\circ$ ist.

Wenn der Brechungsindex des zweiten Mediums n' kleiner als die Hauptbrechungsindizes des einachsigen Kristalls n_o, n_e ist, d. h. $n' < n_o, n' < n_e$, dann hat der Ausdruck (24) immer reale Lösung $\varepsilon_r(m)$ für alle Azimute φ_r .

Die Diskussion für den Fall, dass der Brechungsindex n' zwischen den Werten der Hauptindizes des einachsigen Kristalls n_o, n_e liegt, ist nicht so einfach, wie in dem vorgehenden Absatz, weil die Funktion im Hinblick auf das Azimut nicht symmetrisch ist.

Mit Vorteil nutzen wir folgende Eigenschaft der Funktion (24) aus:

Wenn wir den Grenzwert des Azimuts φ_m suchen, für den der Grenzwinkel $\varepsilon_r(m) = 90^\circ$ ist, bekommen wir aus (24)

$$1 = \frac{b^2 - 2ac \pm b \sqrt{b^2 - 4ac - 4c^2}}{2(a^2 + b^2)} \quad (25)$$

und daraus nach der Umformung

$$a + c = 0. \quad (26)$$

Diese Bedingung ist symmetrisch im Hinblick auf das Azimut φ_r , denn der Koeffizient a ist vom Quadrat $\cos \varphi_r, \sin \varphi_r$ abhängig und der Koeffizient c hängt vom Azimut φ_r überhaupt nicht ab.

Wir könnten ein solches Ergebnis erwarten, weil im Grenzfalle $\varepsilon_r(m) = 90^\circ$ sich die räumliche Aufgabe der Konstruktion des gebrochenen Strahls auf die ebene Aufgabe reduziert, und der Schnitt des Rotationsellipsoides symmetrisch ist.

Die Diskussion für die Extreme der Funktion (24) führen wir nicht durch, weil die Ausdrücke, die bei der Differenzierung vorkommen, sehr kompliziert

und unübersichtlich sind. Auch ohne eine präzise mathematische Diskussion zu machen, können wir uns eine Vorstellung über den Durchlauf der Maxima und Minima der Funktion (24) durch eine Konstruktion schaffen.

Es ist offensichtlich, dass zwei von vier Extremen in der Hauptschnittebene liegen. Die Konstruktion des gebrochenen Strahls für den Einfall unter dem Grenzwinkel $\varepsilon_r(m)$ ist auf der Abb. 1. durchgeführt. Der Schnitt des Rotationsellipsoids in der Grenzebene ist eine Ellipse, deren Verhältnis der Halbachsen davon abhängig ist, ob es sich um die positiven oder negativen Kristalle handelt.

Für die negativen Kristalle, für die

$$n_e \leq n' \leq n_o$$

ist, hat die Funktion (24) zwei Minima in der Hauptschnittebene, also für $\varphi_r = 0$, $\varphi_r = 180^\circ$, und zwei Maxima in den Azimuten φ_{r1} , φ_{r2} , die um die Hauptschnittebene symmetrisch sind.

Für die positiven Kristalle, für die

$$n_e \geq n' \geq n_o$$

ist, hat die Funktion (24) zwei Maxima in der Hauptschnittebene, also für $\varphi_r = 0$, $\varphi_r = 180^\circ$, und zwei Minima in den Azimuten φ_{r1} , φ_{r2} , die um die Hauptschnittebene symmetrisch sind.

Wir stellen jetzt den Winkel des Ausschliffes ψ_o fest, für den die Funktion (24) in der Hauptschnittebene den Wert $\varepsilon_r(m) = 90^\circ$ annimmt.

In den Ausdruck (26) setzen wir die Werte a und c ein, und für $\varphi_r = 0$, bzw. für $\varphi_r = 180^\circ$ bekommen wir

$$n_o^4 D^2 - \frac{n'^2}{n_e^2} P - \frac{n'^2}{n_e^2} = 0. \quad (27)$$

Daraus erhalten wir die Beziehung für den Winkel ψ_o

$$\sin^2 \psi_o = \frac{n'^2 - n_e^2}{n_o^2 - n_e^2}. \quad (28)$$

Für den Winkel des Ausschliffes ist der Grenzwinkel $\varepsilon_r(m) = 90^\circ$. Aus den Bedingungen für die Extreme folgt:

Im Falle der negativen Kristalle, für die

$$n_e \leq n' \leq n_o$$

ist,

für $\psi < \psi_o$ tritt die Totalreflexion in keinem Azimut ein;

für $\psi \geq \psi_o$ tritt die Totalreflexion bloss in einigen Azimuten φ_r ein, wie Abb. 4a zeigt.

Im Falle der positiven Kristalle, für die

$$n_e \geq n' \geq n_o$$

ist,

für $\psi \leq \psi_o$ tritt die Totalreflexion in allen Azimuten φ_r ein;

für $\psi > \psi_o$ tritt die Totalreflexion bloss in einigen Azimuten φ_r ein, wie Abb. 4b zeigt.

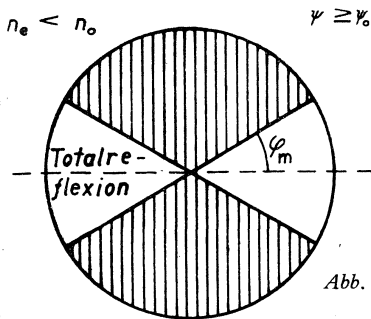


Abb. 4a

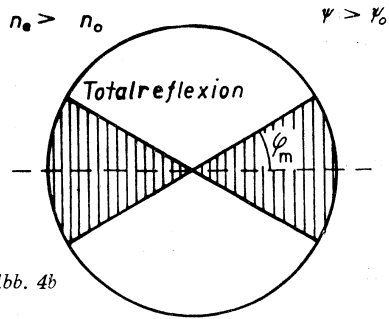


Abb. 4b

Damit wir den Winkel φ_m bestimmen, der das Gebiet, in dem die Totalreflexion eintritt, festlegt, gehen wir wieder von der Beziehung (26) aus.

Nach der Einsetzung der Werte a und c bekommen wir

$$\left(n_o^4 D^2 - P \frac{n'^2}{n_e^4} - 1 \right) \cos^2 \varphi_m + 1 - \frac{n'^2}{n_e^2} = 0 \quad (29)$$

und daraus

$$\cos^2 \varphi_m = \frac{n_e^2 (n'^2 - n_e^2)}{n_e^4 (n_o^4 D^2 - 1) - P n'^2} \quad (30)$$

In einem Sonderfalle des Ausschliffes $\psi = 90^\circ$ haben wir

$$\cos^2 \varphi_m = \frac{n_e^2 (n'^2 - n_e^2)}{(n_o^2 - n_e^2) (n_o^2 + n_e^2 - n'^2)} \quad (31)$$

Im Falle des Ausschliffes $\psi = 0$ ist der Grenzwinkel vom Azimut φ_r unabhängig. Für diesen Ausschiff haben wir aus (24)

$$\sin^2 \varepsilon_r(m) = \frac{n'^2 n_o^2 (n_e^4 - n'^2 n_o^2 + n'^2 n_e^2)}{2n'^2 n_e^2 (n_o^2 n_e^2 - n_e^4 - n'^2 n_o^2) + n_e^8 + n'^4 n_o^4 + n'^4 n_e^4} \quad (32)$$

Dieser Ausdruck hat reale Lösung nur damals, wenn

$$n_e^4 (n_e^4 + n'^4) \geq n'^2 [3n_o^2 n_e^2 (n_o^2 - n_e^2) + 2(n_e^6 - n'^2 n_o^4)]$$

ist.

Man muss hier bemerken, dass für $\varepsilon_o > \varepsilon_o(m)$ und $\varepsilon_r > \varepsilon_r(m)$ die reflektierten Strahlen sich nach den Reflexionsgesetzen richten, die in [3] bestimmt wurden.

2. Normalenauffassung

Damit wir den Grenzwinkel der Normalenrichtung des ausserordentlichen Strahls $\varepsilon_n(m)$ bestimmen, zeigt es sich vorteilhaft, direkt vom Snellschen Brechungsgesetz auszugehen [5], in dem wir $\varepsilon'_n(m) = 90^\circ$, d. h. $\sin \varepsilon'_n(m) = 1$ legen:

$$n_n \sin \varepsilon_n(m) = n' \quad (33)$$

Der normale Brechungsindex n_n des ausserordentlichen Strahls ist durch die Beziehung

$$\frac{1}{n_n^2} = \frac{1}{n_o^2} \cos^2 \Theta + \frac{1}{n_e^2} \sin^2 \Theta, \quad (34)$$

festgelegt [5], wo Θ der Winkel zwischen der Normalenrichtung und der optischen Achse des Kristalls ist.

Führen wir den Efallswinkel der Normalenrichtung des ausserordentlichen Strahls ε_n und das Azimut der Normalenrichtung ϑ_n ein, bekommen wir mit Hilfe der sphärischen Trigonometrie

$$\cos \Theta = \cos \psi \cos \varepsilon_n + \sin \psi \sin \varepsilon_n \cos \vartheta_n. \quad (35)$$

Nach der Einsetzung (34), (35) in (33) geht nach der Umformung aus

$$\sin^2 \varepsilon_n(m) = \frac{p}{2} + \operatorname{sgn} \left(\cos \vartheta_n \lg \frac{n_e}{n_o} \right) \sqrt{\left(\frac{p}{2} \right)^2 - q}, \quad (36)$$

wo

$$p = \frac{2Q \left(\frac{1}{n'^2} + M_1 - M_2 \cos^2 \vartheta_n \right) + N^2 \cos^2 \vartheta_n}{\left(\frac{1}{n'^2} + M_1 - M_2 \cos^2 \vartheta_n \right)^2 + N^2 \cos^2 \vartheta_n}$$

$$q = \frac{Q^2}{\left(\frac{1}{n'^2} + M_1 - M_2 \cos^2 \vartheta_n \right)^2 + N^2 \cos^2 \vartheta_n}$$

ist.

Die Koeffizienten Q , M_1 , M_2 und N sind im Folgenden degeben:

$$M_1 = \left(\frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n_e^2} \right) \cos^2 \psi$$

$$M_2 = \left(\frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n_e^2} \right) \sin^2 \psi$$

$$N = 2 \left(\frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n_e^2} \right) \cos \psi \sin \psi$$

$$Q = \left(\frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n_e^2} \right) \cos^2 \psi + \frac{1}{n_e^2}.$$

Es hat keinen Sinn, die Diskussion der realen Lösung (36) durchzuführen, u. zw. aus Gründen, die wir am Anfang dieses Kapitels angeführt haben.

Die Begrenzung des Winkels des Ausschiffes ψ_0 , für den im Falle der positiven Kristalle in allen Azimuten und im Falle der negativen Kristalle in keinem Azimut die Totalreflexion eintritt, ist von der Strahlenauffassung anzunehmen.

Das Azimut ϑ_m , welches das Gebiet, in dem die Totalreflexion eintritt, festlegt, ist aber offensichtlich unterschiedlich vom Grenzzimut φ_m für die Strahlenauffassung.

Die Bestimmung dieses Winkels ist verhältnismässig eine komplizierte mathematische Angelegenheit, und deshalb führen wir hier nur Vorgang der Berechnung an.

Es handelt sich darum, das Azimut ϑ_m der Normalenrichtung \vec{s}_m , die der Strahlenrichtung \vec{f}_m des Grenzfalles $\varepsilon_r(m) = 90^\circ$ entspricht, festzustellen. Diese Strahlenrichtung \vec{f}_m liegt in der Grenzebene und schliesst mit der Hauptschnittebene den Winkel φ_m , der durch die Formel (30) gegeben ist.

Die Richtungskosinusse der Strahlenrichtung \vec{f}_m ($\cos \beta_1, \cos \beta_2, \cos \beta_3$) im Hauptkoordinatensystem des Kristalls x, y, z , sind durch die Beziehungen (s. Abb. 5.)

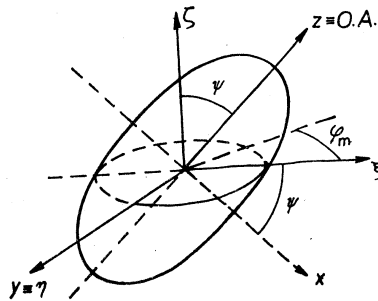


Abb. 5

$$\begin{aligned} \cos \beta_1 &= \cos \psi \cos \varphi_m \\ \cos \beta_2 &= \sin \varphi_m \\ \cos \beta_3 &= \sin \psi \cos \varphi_m \end{aligned} \quad (37)$$

und der Winkel Φ_m , den die Strahlenrichtung mit der optischen Achse des Kristalls einschliesst, durch die Beziehung

$$\cos \Phi_m = \sin \psi \cos \varphi_m \quad (38)$$

gegeben.

Den Strahlenindex n_r in der Richtung \vec{f}_m gibt dann die Formel

$$n_r^2 = n_o^2 \cos^2 \Phi_m + n_e^2 \sin^2 \Phi_m. \quad (39)$$

Für den Normalenindex haben wir [5]

$$n_n^2 = n_r^2 \left[1 + \frac{1}{n_r^2} (n_o^2 - n_e^2) \sin^2 \Phi_m \cos^2 \Phi_m \right]. \quad (40)$$

Den Zusammenhang zwischen der Normalenrichtung \vec{s}_m ($\cos \alpha_1, \cos \alpha_2,$

$\cos \alpha_3$) mit der Strahlenrichtung $\vec{f}_m (\cos \beta_1, \cos \beta_2, \cos \beta_3)$ gibt im Hauptkoordinatensystem die Formel

$$\cos \alpha_i = \frac{n_n}{n_r} \left[1 - \frac{n_o^2}{n_n^2} \frac{(n_n^2 - n_r^2)}{(n_n^2 - n_o^2)} \right] \cos \beta_i \quad i = 1, 2 \quad (41)$$

$$\cos \alpha_3 = \frac{n_n}{n_r} \left[1 - \frac{n_e^2}{n_n^2} \frac{(n_n^2 - n_r^2)}{(n_n^2 - n_o^2)} \right] \cos \beta_3 .$$

Davon haben wir für das Azimut ϑ_m (42)

$$\sin \vartheta_m = \frac{K \sin \varphi_m}{\sqrt{(K \cos^2 \psi + L \sin^2 \psi)^2 \cos^2 \varphi_m + K^2 \sin^2 \varphi_m}} ,$$

wo wir

$$K = 1 - \frac{n_o^2}{n_n^2} \frac{(n_n^2 - n_r^2)}{(n_n^2 - n_o^2)}$$

$$L = 1 - \frac{n_e^2}{n_n^2} \frac{(n_n^2 - n_r^2)}{(n_n^2 - n_o^2)}$$

bezeichnet haben.

Wenn der Winkel dem Ausschliffes $\psi = 0$ ist, dann haben wir für den Grenzwinkel $\varepsilon_n(m)$

$$\sin^2 \varepsilon_n(m) = \frac{n'^2 n_e^2}{n_o^2 n_e^2 + n'^2 (n_e^2 - n_o^2)} . \quad (43)$$

Wenn es im Gebiet, das für die Totalreflexion aufgrund der Strahlenauffassung abgegrenzt ist, dazu kommt, dass aufgrund (36)

$$\sin^2 \varepsilon_n(m) > 1$$

ist, das bedeutet, dass die Normalenrichtung des ausserordentlichen Strahls mit der Normale an die Grenzebene den Winkel $90^\circ + \nu$ einschliesst, wo

$$\cosh \nu = |\sin \varepsilon_n(m)| \quad (44)$$

ist.

LITERATUR

- [1] *Born, M.*: Optik, Springer, Berlin. — Heidelberg — New York (1965).
- [2] *Chmela, P.*: Acta Univ. Palac. Olomucensis, 21, 129 (1966).
- [3] *Chmela, P.*: Optik 26, 134 (1967).
- [4] *Ramachandran, G. N., Ramaseshan, S.*: Crystal Optics, Handbuch der Physik, B. 25/1, Springer, Berlin — Göttingen — Heidelberg (1961).
- [5] *Sziwessy, G.*: Kristallogoptik, Handbuch der Physik, B. 22, s. 235, Springer, Berlin (1928).

SHRnutí

ÚPLNÝ ODRAZ NA ROZHRAŇÍ JEDNOOSÉHO KRYSTALU A IZOTROPNÍHO DIELEKTRIKA

PAVEL CHMELA

V práci je studován úplný odraz na rozhraní mezi jednoosým krystalem a izotropním dielektrikem, a to jak v případě, kdy prvním prostředím je prostředí izotropní a druhým prostředím je prostředí jednoosého krystalu, tak v případě, že první prostředí tvoří jednoosý krystal a druhé prostředí prostředí izotropní. Ke stanovení úplného odrazu je používáno zákonů lomu pro paprskový směr šíření, které byly odvozeny v [2] a [3].

РЕЗЮМЕ

ПОЛНОЕ ОТРАЖЕНИЕ (СВЕТА) НА ГРАНИЦЕ МЕЖДУ ОДНООСНЫМ КРИСТАЛЛОМ И ИЗОТРОПНЫМ ДИЭЛЕКТРИКОМ

ПАВЕЛ ХМЕЛА

В настоящей работе изучается полное отражение (света) на границе между одноосным кристаллом и изотропной средой в следующих двух случаях: 1. первая среда является изотропной, а вторая — одноосный кристалл, 2. первой средой является одноосный кристалл, а вторая среда — изотропная. При изучении полного отражения использованы выведенные в [2] и [3] законы преломления для лучевого направления.