Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica

Jindřich Palát

О решении одного квазилинейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка. I.

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol. 8 (1967), No. 1, 19--44

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/119867`

1967 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM. TOM 24.

Katedra matematické analýzy přírodovědecké fakulty
Vedoucí katedry: prof. RNDr. Miroslav Laitoch, kandidát věd

О решении одного квазилинейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка I

Индржих Палат

(Поступило в редакцию 10. 2. 1966 г.)

В настоящей работе исследуется вопрос взаимных преобразований первых интегралов уравнений (1) и (I). Для этого применяется метод работ [1] и [2]. При помощи преобразований первых интегралов находится общее решение уравнения (I).

1. Рассмотрим два квазилинейные дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z)\frac{\partial z}{\partial x} + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z)\frac{\partial z}{\partial y} = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z, \quad (1)$$

$$(A_{11}X + A_{12}Y + A_{13}Z)\frac{\partial Z}{\partial X} + (A_{21}X + A_{22}Y + A_{23}Z)\frac{\partial Z}{\partial Y} = \\ = A_{31}X + A_{32}Y + A_{33}Z, \quad (\mathrm{I})$$

где a_{ik}, A_{ik}, i, $k = 1, 2, 3$ произвольные вещественные числа, причем $a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + a_{i3}^2 > 0$, $A_{i1}^2 + A_{i2}^2 + A_{i3}^2 > 0$ для $i = 1, 2, 3$. Введем обозначения

$$a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z = g_i, \quad A_{i1}X + A_{i2}Y + A_{i3}Z = G_i,$$

где $i = 1, 2, 3$. Уравнениям (1), (I) соответствуют характеристические системы, которые запишем в матричный вид

$$(a) \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = au, \qquad \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T} = AU, \quad (A)$$

где

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

Замечание. Условимся, что одинаковой буквой будем обозначать уравнение типа (a), и ему соответствующую систему уравнений. Далее условимся, что все нами рассмотрения будут относится к достаточно малым областям.

Определение 1. *Пусть*

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

и $h(v, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ дифференцируемая функция.

Тогда символ $h\{v, \omega\}$ определен равенством

$$h\{v, \omega\} = h(v, \omega_1, \omega_2, \omega_3).$$

Определение 2. *Пусть $u(t)$ $(U(T))$ произвольное решение уравнения (a) $((A))$.*

Тогда первыми интегралами системы (a) $((A))$ [3] будут непрерывно дифференцируемые соотношения $f_i\{t, u\} = c_i(F_i\{T, U\} = C_i)$ тождественно не равные постоянной, для которых

$$f_i\{t, u(t)\} = c_i \quad (F_i\{T, U(T)\} = C_i). \tag{2}$$

Обозначим первые интегралы уравнения (a) $((A))$, независящие от $t(T)$, через

$$f_i\{u\} = c_i \quad (F_i\{U\} = C_i) \tag{3}$$

Определение 3. *Два независимые первые интегралы* (3) *уравнения (a) $((A))$ назовем фундаментальными интегралами уравнения (a) $((A))$ (системы (a) $((A))$ или уравнения* (1) *((1))).*

Напомним, что два первые интегралы (2) или (3), $i = 1, 2$ независимые, если ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial t} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} & \dfrac{\partial f_1}{\partial z} \\[2mm] \dfrac{\partial f_2}{\partial t} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{4}$$

равен двум.

Общее решение уравнения (1) ((1)) запишем тогда в виде

$$\varphi(f_1\{u\}, f_2\{u\}) = 0 \quad (\Psi(F_1\{U\}, F_2\{U\}) = 0), \tag{5}$$

где f_1, f_2 (F_1, F_2) фундаментальные интегралы уравнения (a) $((A))$ и φ (Ψ)-дифференцируемая функция, зависящая от двух независимых переменных.

2. Взаимное преобразование решений систем (а) и (А)

1. *Лемма. Пусть $u(t)$ $(U(T))$ решение уравнения (a) $((A))$.*

Тогда функция $\bar{u}(t)$ $(\bar{U}(T))$, определенная уравнением

$$u(t) = c(t)\,\bar{u}(t) \quad [U(T) = C(T)\,\bar{U}(T)], \tag{1}$$

где

$$c(t) = \begin{pmatrix} e^{a_{11}t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{a_{22}t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{a_{33}t} \end{pmatrix}, \quad \bar{u}(t) = \begin{pmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{y}(t) \\ \bar{z}(t) \end{pmatrix}, \quad C(T) = \begin{pmatrix} e^{A_{11}T} & 0 & 0 \\ 0 & e^{A_{22}T} & 0 \\ 0 & 0 & e^{A_{33}T} \end{pmatrix},$$

$$\bar{U}(T) = \begin{pmatrix} \bar{X}(T) \\ \bar{Y}(T) \\ \bar{Z}(T) \end{pmatrix}$$

является решением уравнения

$$(\bar{a}) \quad \frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}t} = \bar{a}\bar{u} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}\bar{U}}{\mathrm{d}T} = \bar{A}\bar{U}\right) \quad (\bar{A}),$$

где

$$\bar{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 & a_{12}\,\mathrm{e}^{(a_{22}-a_{11})\,t} & a_{13}\,\mathrm{e}^{(a_{33}-a_{11})\,t} \\ a_{21}\,\mathrm{e}^{(a_{11}-a_{22})\,t} & 0 & a_{23}\,\mathrm{e}^{(a_{33}-a_{22})\,t} \\ a_{31}\,\mathrm{e}^{(a_{11}-a_{33})\,t} & a_{32}\mathrm{e}^{(a_{22}-a_{33})\,t} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{A}(T) = \begin{pmatrix} 0 & A_{12}\,\mathrm{e}^{(A_{22}-A_{11})\,T} & A_{13}\,\mathrm{e}^{(A_{33}-A_{11})\,T} \\ A_{21}\,\mathrm{e}^{(A_{11}-A_{23})\,T} & 0 & A_{23}\,\mathrm{e}^{(A_{33}-A_{22})\,T} \\ A_{31}\,\mathrm{e}^{(A_{11}-A_{33})\,T} & A_{32}\,\mathrm{e}^{(A_{22}-A_{33})\,T} & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Утверждение леммы проверяется непосредственно подстановкой (1) в уравнение (a) $[(A)]$.

Нашей целью будет прежде всего преобразование решений систем $(\bar{a})$ и $(\bar{A})$, и потом с помощью (1) взаимное преобразование решений систем (a) и (A). При этом преобразовании связывающим звеном окажется решение дифференциального уравнения однородных функций первого порядка.

2. Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение однородных функций первого порядка

$$x_1 \frac{\partial z_1}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial z_1}{\partial y_1} = z_1. \tag{II}$$

Ему соответствует характеристическая система

$$\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}\tau} = E u_1, \tag{E}$$

где

$$u_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

и E есть единичная матрица. Согласно [1], если $u_1(\tau)$ есть решение уравнения (E), принимающее для $\tau = 0$ значение $u_{10} = u_1(0) \neq 0$, тогда

$$\bar{u}(t) = K(t)\, u_1(R_0 t) \tag{2}$$

есть решение уравнения $(\bar{a})$, принимающее для $t = 0$ значение $\bar{u}_0 = \bar{u}(0)$, где $K(t)$ есть решение уравнения

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} = \bar{a}(t)\, K(t) - EK(t)\, R_0, \tag{K}$$

принимающее для $t = 0$ значение $K_0 = K(0)$, $R_0 \neq 0$ произвольное вещественное число, $\tau = R_0 t$ и начальное условие

$$\bar{u}(0) = K(0)\, u_1(0).$$

Заметим, что $K(t)$ и, следовательно, равенство (2) определено во всем интервале $(-\infty, \infty)$ поскольку $\bar{a}(t)$ непрерывная и определенная во всем интервале $(-\infty, \infty)$. Система (K), определяющая элементы $\alpha_{ik}(t)$, $i, k = 1, 2, 3$ матрицы $K(t)$, распадается на три системы трех уравнений следующего типа

$$
\begin{aligned}
\alpha'_{1i}(t) &= -R_0\alpha_{1i} + a_{12}\,e^{(a_{22}-a_{11})t}\alpha_{2i} + a_{13}\,e^{(a_{33}-a_{11})t}\alpha_{3i},\\
\alpha'_{2i}(t) &= a_{21}\,e^{(a_{11}-a_{22})t}\alpha_{1i} - R_0\alpha_{2i} + a_{23}\,e^{(a_{33}-a_{22})t}\alpha_{3i},\\
\alpha'_{3i}(t) &= a_{31}\,e^{(a_{11}-a_{33})t}\alpha_{i1} + a_{32}\,e^{(a_{22}-a_{33})t}\alpha_{2i} - R_0\alpha_{3i},
\end{aligned}
\qquad (\alpha_i)
$$

где $i = 1, 2, 3$. Решение системы (α_i) ищем в виде

$$
\begin{aligned}
\alpha_{1i} &= C_{1i}\,e^{(\lambda-a_{11})t},\\
\alpha_{2i} &= C_{2i}\,e^{(\lambda-a_{22})t},\\
\alpha_{3i} &= C_{3i}\,e^{(\lambda-a_{33})t}.
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

После подстановки (3) в систему (α_i) получаем систему

$$
\begin{aligned}
(a_{11}-\lambda-R_0)\,C_{1i} + a_{12}C_{2i} + a_{13}C_{3i} &= 0,\\
a_{21}C_{1i} + (a_{22}-\lambda-R_0)\,C_{2i} + a_{23}C_{3i} &= 0,\\
a_{31}C_{1i} + a_{32}C_{2i} + (a_{33}-\lambda-R_0)\,C_{3i} &= 0.
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

Определитель этой системы

$$
\begin{aligned}
\delta(\lambda, R_0) &= -(\lambda+R_0)^3 + (\lambda+R_0)^2\,tr - (\lambda+R_0)\,s + |a| =\\
&= -\lambda^3 + (tr-3R_0)\,\lambda_2 - (3R_0^2 - 2trR_0 + s)\,\lambda -\\
&\quad - (R_0^3 - R_0^2tr + R_0s - |a|),
\end{aligned}
$$

где $tr = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ и s равно сумме главных миноров второго порядка определителя $|a|$ системы (a). При подходящем выборе λ и R_0 определитель $\delta(\lambda, R_0)$ равен нулю. Выбрав значение $R_0 \neq 0$, находя корни λ_i, $i = 1, 2, 3$ уравнения $\delta(\lambda, R_0) = 0$, определим из (4) коэффициенты C_{ik}, $i, k = 1, 2, 3$. В случае кратных или комплексных корней поступаем известным способом, как это продемонстрируем в части 4.

Теорема 1. *Пусть $u_1(\tau)$ есть решение уравнения (E) и $K(t)$ решение уравнения (K).*

Тогда

$$u(t) = c(t)\,K(t)\,u_1(\tau), \qquad (5)$$

есть решение уравнения (a), удовлетворяющее начальному значению

$$u(0) = K(0)\,u_1(0).$$

Доказательство. Теорема вытекает из равенств (1) и (2). Если уравнения (5) переписать в систему, то

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \alpha_{11}(t)\,x_1(R_0t)\,e^{a_{11}t} + \alpha_{12}(t)\,y_1(R_0t)\,e^{a_{22}t} + \alpha_{13}(t)\,z_1(R_0t)\,e^{a_{33}t},\\
y(t) &= \alpha_{21}(t)\,x_1(R_0t)\,e^{a_{11}t} + \alpha_{22}(t)\,y_1(R_0t)\,e^{a_{22}t} + \alpha_{23}(t)\,z_1(R_0t)\,e^{a_{33}t},\\
z(t) &= \alpha_{31}(t)\,x_1(R_0t)\,e^{a_{11}t} + \alpha_{32}(t)\,y_1(R_0t)\,e^{a_{22}t} + \alpha_{33}(t)\,z_1(R_0t)\,e^{a_{33}t}.
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

Заметим, что $| c(t) | = e^{trt} \neq 0$ и, согласно [1], $| K(t) | = e^{-3R_0 t} \neq 0$. Следовательно, матрицы $c(t)$, $K(t)$ регулярные и согласно [1], имеет место следующая теорема:

Теорема 2. *Пусть $u(t)$ есть решение уравнения (a) и $K(t)$ решение уравнения (K).*

Тогда

$$u_1(\tau) = K^{-1}\left(\frac{\tau}{R_0}\right) c^{-1}\left(\frac{\tau}{R_0}\right) u\left(\frac{\tau}{R_0}\right) \tag{7}$$

есть решение уравнения (E), удовлетворяющее начальному значению

$$u_1(0) = K^{-1}(0)\, u(0).$$

Доказательство. Уравнение (7) получается непосредственно, ввиду [1], из уравнения (5), разрешив его относительно $u_1(R_0 t)$ и переходя к переменной $\tau = R_0 t$.

Если уравнение (7) переписать в систему, то

$$\begin{aligned}
x_1(\tau) &= \frac{\bar{\alpha}_{11}\left(\frac{\tau}{R_0}\right)}{| K |} e^{-\frac{a_{11}\tau}{R_0}} x\left(\frac{\tau}{R_0}\right) + \frac{\bar{\alpha}_{21}\left(\frac{\tau}{R_0}\right)}{| K |} e^{-\frac{a_{22}\tau}{R_0}} y\left(\frac{\tau}{R_0}\right) + \\
&\quad + \frac{\bar{\alpha}_{31}\left(\frac{\tau}{R_0}\right)}{| K |} e^{-\frac{a_{33}\tau}{R}} z\left(\frac{\tau}{R_0}\right), \\
y_1(\tau) &= \frac{\bar{\alpha}_{12}\left(\frac{\tau}{R_0}\right)}{| K |} e^{-\frac{a_{11}\tau}{R_0}} x\left(\frac{\tau}{R_0}\right) + \frac{\bar{\alpha}_{22}\left(\frac{\tau}{R_0}\right)}{| K |} e^{-\frac{a_{22}\tau}{R_0}} y\left(\frac{\tau}{R_0}\right) + \\
&\quad + \frac{\bar{\alpha}_{32}\left(\frac{\tau}{R_0}\right)}{| K |} e^{-\frac{a_{33}\tau}{R_0}} z\left(\frac{\tau}{R_0}\right), \\
z_1(\tau) &= \frac{\bar{\alpha}_{13}\left(\frac{\tau}{R_0}\right)}{| K |} e^{-\frac{a_{11}\tau}{R_0}} x\left(\frac{\tau}{R_0}\right) + \frac{\bar{\alpha}_{23}\left(\frac{\tau}{R_0}\right)}{| K |} e^{-\frac{a_{22}\tau}{R_0}} y\left(\frac{\tau}{R_0}\right) + \\
&\quad + \frac{\bar{\alpha}_{33}\left(\frac{\tau}{R_0}\right)}{| K |} e^{-\frac{a_{33}\tau}{R_0}} z\left(\frac{\tau}{R_0}\right),
\end{aligned} \tag{8}$$

где через $\bar{\alpha}_{ik}$ обозначено алгебраическое дополнение элемента α_{ik} матрицы $K(t)$.

3. Сейчас преобразуем решение системы (A) в решение системы (E) и наоборот. Согласно [1], если $\bar{U}(T)$ есть решение уравнения $(\bar{A})$, принимающее для $T = 0$ значение $\bar{U}_0 = \bar{U}(0) \neq 0$, тогда

$$u_1(\tau) = k(\tau)\, \bar{U}(r_0 \tau) \tag{9}$$

есть решение уравнения (E), принимающее для $\tau = 0$ значение $u_{10} = u_1(0)$ где $k(\tau)$ есть решение уравнения

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\tau} = Ek(\tau) - k(\tau)\bar{A}(r_0\tau)\, r_0, \tag{k}$$

принимающее для $\tau = 0$ значение $k_0 = k(0)$, $r_0 \neq 0$ произвольное вещественное число, $T = r_0\tau$ и начальное значение

$$u_1(0) = k(0)\, \bar{U}(0).$$

Решение $k(\tau)$ уравнения (k) и, следовательно, равенство (9) определено в интервале $(-\infty, \infty)$, поскольку $\bar{A}(T)$ непрерывная и определенная во всем интервале $(-\infty, \infty)$. Система (k), определяющая элементы β_{ik}, $i, k = 1, 2, 3$ матрицы $k(\tau)$, распадается на три системы трех уравнений следующего типа

$$\begin{aligned}
\beta'_{i1}(\tau) &= \beta_{i1} - A_{21}\,\mathrm{e}^{(A_{11}-A_{22})\,r_0\tau}\beta_{i2} - A_{31}\,\mathrm{e}^{(A_{11}-A_{33})\,r_0\tau}\beta_{i3},\\
\beta'_{i2}(\tau) &= -A_{12}\,\mathrm{e}^{(A_{22}-A_{11})\,r_0\tau}\beta_{i1} + \beta_{i2} - A_{32}\,\mathrm{e}^{(A_{22}-A_{33})\,r_0\tau}\beta_{i3},\\
\beta'_{i3}(\tau) &= -A_{13}\,\mathrm{e}^{(A_{33}-A_{11})\,r_0\tau}\beta_{i1} - A_{23}\,\mathrm{e}^{(A_{33}-A_{22})\,r_0\tau}\beta_{i2} + \beta_{i3},
\end{aligned} \tag{β_i}$$

где $i = 1, 2, 3$. Решение системы (β_i) ищем в виде

$$\begin{aligned}
\beta_{i1} &= C_{i1}\,\mathrm{e}^{(\lambda+A_{11})\,r_0\tau},\\
\beta_{i2} &= C_{i2}\,\mathrm{e}^{(\lambda+A_{22})\,r_0\tau},\\
\beta_{i3} &= C_{i3}\,\mathrm{e}^{(\lambda+A_{33})\,r_0\tau}.
\end{aligned} \tag{10}$$

После подстановки (10) в систему (β_i) получаем систему

$$\begin{aligned}
(1-(\lambda+A_{11})\,r_0)\,C_{i1} - A_{21}r_0C_{i2} - A_{31}r_0C_{i3} &= 0,\\
-A_{12}r_0C_{i1} + (1-(\lambda+A_{22})\,r_0)\,C_{i2} - A_{32}r_0C_{i3} &= 0,\\
-A_{13}r_0C_{i1} - A_{23}r_0C_{i2} + (1-(\lambda+A_{33})\,r_0)\,C_{i3} &= 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Определитель этой системы

$$\begin{aligned}
\Delta(\lambda,r_0) &= -r_0^3\lambda^3 + r_0^2(3 - r_0TR)\,\lambda^2 - r_0(r_0^2S - 2r_0TR + 3)\,\lambda -\\
&- (r_0^3\,|\,A\,| - r_0^2S + r_0TR - 1) = -(r_0\lambda - 1)^3 - (r_0\lambda - 1)^2 r_0TR -\\
&- (r_0\lambda - 1)\, r_0S - r_0^3\,|\,A\,|,
\end{aligned}$$

где $TR = A_{11} + A_{22} + A_{33}$ и S равно сумме главных миноров второго порядка определителя $|\,A\,|$ системы (A). При подходящем выборе λ и r_0 определитель $\Delta(\lambda, r_0)$ равен нулю. Выбрав значение $r_0 \neq 0$, находя корни λ_i, $i = 1, 2, 3$ уравнения $\Delta(\lambda, r_0) = 0$, определим из (11) коэффициенты β_{ik}, $i, k = 1, 2, 3$. В случае кратных или комплексных корней поступаем известным способом, как это продемонстрируем в части 4.

Теогема 3. *Пусть $U(T)$ есть решение уравнения (A) и $k(\tau)$ решение уравнения (k).*

Тогда

$$u_1(\tau) = k(\tau)\, C^{-1}(r_0\tau)\, U(r_0\tau) \tag{12}$$

есть решение уравнения (E), *удовлетворяющее начальному значению*

$$u_1(0) = k(0)\, U(0).$$

Доказательство. Теорема вытекает из равенств (1) и (9).

Если уравнения (12) переписать в систему, то

$$\begin{aligned} x_1(\tau) &= \beta_{11}(\tau)\, e^{-A_{11}r_0\tau}X(r_0\tau) + \beta_{12}(\tau)\, e^{-A_{22}r_0\tau}Y(r_0\tau) + \beta_{13}(\tau)\, e^{-A_{33}r_0\tau}Z(r_0\tau), \\ y_1(\tau) &= \beta_{21}(\tau)\, e^{-A_{11}r_0\tau}X(r_0\tau) + \beta_{22}(\tau)\, e^{-A_{22}r_0\tau}Y(r_0\tau) + \beta_{23}(\tau)\, e^{-A_{33}r_0\tau}Z(r_0\tau), \\ z_1(\tau) &= \beta_{31}(\tau)\, e^{-A_{11}r_0\tau}X(r_0\tau) + \beta_{23}(\tau)\, e^{-A_{22}r_0\tau}Y(r_0\tau) + \beta_{33}(\tau)\, e^{-A_{33}r_0\tau}Z(r_0\tau). \end{aligned} \tag{13}$$

Так как матрицы $C(T)$ и $k(\tau)$ регулярные, то, согласно [1], имеет место следующая теорема:

Теорема 4. *Пусть* $u_1(\tau)$ *есть решение уравнения* (E) *и* $k(\tau)$ *решение уравнения* (k).

Тогда

$$U(T) = C(T)\, k^{-1}\left(\frac{T}{r_0}\right) u_1\left(\frac{T}{r_0}\right) \tag{14}$$

есть решение уравнения (A), *удовлетворяющее начальному значению*

$$U(0) = k^{-1}(0)\, u_1(0).$$

Доказательство. Ввиду [1], достаточно в уравнении (12) перейти к переменной $T = r_0\tau$ и разрешить его относительно $U(T)$.

Если уравнение (14) переписать в систему, то

$$\begin{aligned} X(T) &= \frac{\bar\beta_{11}\left(\frac{T}{r_0}\right)}{|k|}\, e^{A_{11}T}x_1\left(\frac{T}{r_0}\right) + \frac{\bar\beta_{12}\left(\frac{T}{r_0}\right)}{|k|}\, e^{A_{11}T}y_1\left(\frac{T}{r_0}\right) + \frac{\bar\beta_{13}\left(\frac{T}{r_0}\right)}{|k|}\, e^{A_{11}T}z_1\left(\frac{T}{r_0}\right), \\ Y(T) &= \frac{\bar\beta_{21}\left(\frac{T}{r_0}\right)}{|k|}\, e^{A_{22}T}x_1\left(\frac{T}{r_0}\right) + \frac{\bar\beta_{22}\left(\frac{T}{r_0}\right)}{|k|}\, e^{A_{22}T}y_1\left(\frac{T}{r_0}\right) + \frac{\bar\beta_{23}\left(\frac{T}{r_0}\right)}{|k|}\, e^{A_{22}T}z_1\left(\frac{T}{r_0}\right), \\ Z(T) &= \frac{\bar\beta_{31}\left(\frac{T}{r_0}\right)}{|k|}\, e^{A_{33}T}x_1\left(\frac{T}{r_0}\right) + \frac{\bar\beta_{32}\left(\frac{T}{r_0}\right)}{|k|}\, e^{A_{33}T}y_1\left(\frac{T}{r_0}\right) + \frac{\bar\beta_{33}\left(\frac{T}{r_0}\right)}{|k|}\, e^{A_{33}T}z_1\left(\frac{T}{r_0}\right). \end{aligned} \tag{15}$$

где через $\bar\beta_{ik}$, $i, k = 1, 2, 3$ обозначено алгебраическое дополнение элемента β_{ik} матрицы $k(\tau)$.

4. Наконец совершим взаимное преобразование решений систем (a) и (A).

Теорема 5. *Пусть* $U(T)$ *есть решение уравнения* (A), $K(t)$ *решение уравнения* (K), $k(\tau)$ *решение уравнения* (k) *и* $T = r_0\tau$, $\tau = R_0t$.

Тогда

$$u(t) = c(t)\, K(t)\, k(R_0t)\, C(r_0R_0t)\, U(r_0R_0t) \tag{16}$$

есть решение уравнения (a), *удовлетворяющее начальному значению*

$$u(0) = K(0)\, k(0)\, U(0).$$

Доказательство. Возьмем произвольное решение $U(T)$ уравнения (A) и положим $T = r_0\tau$. Тогда, согласно теореме 3,

$$u_1(\tau) = k(\tau)\, C^{-1}(r_0\tau)\, U(r_0\tau) \tag{17}$$

есть решение уравнения (E), удовлетворяющее начальному значению

$$u_1(0) = k(0)\, U(0).$$

Положим $\tau = R_0 t$ и с помощью решения (17) уравнения (E) построим функцию

$$u(t) = c(t)\, K(t)\, u_1(R_0 t) = c(t)\, K(t)\, k(R_0 t)\, C^{-1}(r_0 R_0 t)\, U(r_0 R_0 t), \tag{18}$$

которая, согласно теореме 1, есть решение уравнения (a), удовлетворяющее начальному значению

$$u(0) = K(0)\, k(0)\, U(0).$$

Теорема 6. *Пусть $u(t)$ есть решение уравнения (a), $K(t)$ решение уравнения (K) и $k(\tau)$ решение уравнения (k) и $\tau = R_0 t$, $T = r_0\tau$.*

Тогда

$$U(T) = C(T)\, k^{-1}\left(\frac{T}{r_0}\right) K^{-1}\left(\frac{T}{r_0 R_0}\right) c^{-1}\left(\frac{T}{r_0 R_0}\right) u\left(\frac{T}{r_0 R_0}\right) \tag{19}$$

есть решение уравнения (A), удовлетворяющее начальному значению

$$U(0) = k^{-1}(0)\, K^{-1}(0)\, u(0).$$

Доказательство. Такое же, как в теореме 5, причем используются теоремы 2 и 4.

3. Взаимное преобразование первых интегралов систем (а) и (А).

Теорема 1. *Пусть $f_i^1\{\tau, u_1\} = c_i$ есть первый интеграл системы (E).*

Тогда

$$f_i\{t, u\} = f_i^1\{R_0 t, K^{-1}(t)\, c^{-1}(t)\, u\} = c_i \tag{1}$$

есть первый интеграл системы (a), где $K(t)$ есть решение уравнения (K).

Доказательство. Возьмем любое решение $u(t)$ уравнения (a). Согласно теореме 2.2, функция

$$u_1(\tau) = K^{-1}\left(\frac{\tau}{R_0}\right) c^{-1}\left(\frac{\tau}{R_0}\right) u\left(\frac{\tau}{R_0}\right),$$

где $\tau = R_0 t$, является тогда решением уравнения (E) и, следовательно,

$$f_i\{t, u(t)\} = f_i^1\{R_0 t, K^{-1}(t)\, c^{-1}(t)\, u(t)\} =$$

$$= f_i^1\left\{\tau, K^{-1}\left(\frac{\tau}{R_0}\right) c^{-1}\left(\frac{\tau}{R_0}\right) u\left(\frac{\tau}{R_0}\right)\right\} = f_i^1\{\tau, u_1(\tau)\} = c_i$$

для любого решения $u(t)$ уравнения (a), что доказывает утверждение теоремы.

Теорема 2. *Пусть $F_i\{T, U\} = C_i$ есть первый интеграл системы (A).*

Тогда

$$f_i^1\{\tau, u_1\} = F_i\{r_0\tau, C(r_0\tau)\, k^{-1}(\tau)\, u_1\} = C_i \tag{2}$$

есть первый интеграл системы (E), где $k(\tau)$ есть решение уравнения (k).

Доказательство. Такое же, как в теореме 1, причем используется теорема 2.4 и то, что $T = r_0\tau$.

Теорема 3. *Пусть* $F_i\{T, U\} = C_i$ *есть первый интеграл системы* (A). *Тогда*

$$f_i\{t, u\} = T_i\{r_0R_0t, C^{-1}(r_0R_0t)\, k^{-1}(R_0t)\, K^{-1}(t)\, c^{-1}(t)\, u\} = C_i \tag{3}$$

есть первый интеграл системы (a), *где* $k(\tau)$ *есть решение уравнения* (k), $K(t)$ *есть решение уравнения* (K).

Доказательство. Такое же как в теореме 1, причем используется теорема 2.6 и то, что $T = r_0R_0t$.

Для полноты выскажем следующие теоремы, доказательство которых такое же как в предыдущих трех теоремах, причем используются соответственно теоремы 2.1, 2.3, 2.5.

Теорема 4. Пусть $f_i\{t, u\} = c_i$ есть первый интеграл системы (a). *Тогда*

$$f_i^1\{\tau, u_i\} = f_i\left\{R_0t,\ c\left(\frac{\tau}{R_0}\right) K\left(\frac{\tau}{R_0}\right) u_1\right\} = c_i, \quad (\tau = R_0t) \tag{4}$$

есть первый интеграл системы (E), *где* $K(t)$ *есть решение уравнения* (K).

Теорема 5. *Пусть* $f_i^1\{\tau, u_1\} = c_i$ *есть первый интеграл системы* (E). *Тогда*

$$F_i\{T, U\} = f_i^1\left\{\{r_0\tau,\ k\left(\frac{T}{r_0}\right) C^{-1}(T)U\right\} = c_i, \quad (T = r_0\tau) \tag{5}$$

есть первый интеграл системы (A), *где* $k(\tau)$ *есть решение уравнения* (k).

Теорема 6. *Пусть* $f_i\{t, u\} = c_i$ *есть первый интеграл системы* (a). *Тогда*

$$F_i\{T, U\} = f_i\left\{r_0R_0t,\ c\left(\frac{T}{r_0R_0}\right) K\left(\frac{T}{r_0R_0}\right) k\left(\frac{T}{r_0}\right) C(T)\, U\right\} = c_i, \quad (T = r_0R_0t) \tag{6}$$

есть первый интеграл системы (A), *где* $K(t)$ *есть решение уравнения* (K), $k(\tau)$ *есть решение уравнения* (k).

Замечание. Если согласно теоремам 1, 2, 3, 4, 5, 6 преобразовать два соответствующие независимые первые интегралы, то полученные два первые интегралы (1), (2), (3), (4), (5), (6) будут тоже независимые.

Для иллюстрации докажем высказанное утверждение только для теоремы 5. Очевидно, что для остальных теорем доказательство было бы одинаковым.

Теорема 7. *Пусть даны два независимые первые интегралы системы* (E) $f_i^1\{\tau, u_1\} = c_i$, $i = 1, 2$.

Тогда преобразованные первые интегралы

$$F_i\{T, U\} = f_i^1\left\{T,\ k\left(\frac{T}{r_0}\right) C^{-1}(T)\, U\right\} = c_i, \quad i = 1, 2$$

будут тоже независимые.

Доказательство. Имеем, что $k\left(\frac{T}{r_0}\right)C^{-1}(T)\,U =$

$$= \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-A_{11}T} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-A_{22}T} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-A_{33}T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \beta_{11}e^{-A_{11}T}\,X + \beta_{12}e^{-A_{22}T}\,Y + \beta_{13}e^{-A_{33}T}\,Z \\ \beta_{21}e^{-A_{11}T}\,X + \beta_{22}e^{-A_{22}T}\,Y + \beta_{23}e^{-A_{33}T}\,Z \\ \beta_{31}e^{-A_{11}T}\,X + \beta_{32}e^{-A_{22}T}\,Y + \beta_{33}e^{-A_{33}T}\,Z \end{pmatrix},$$

где $\beta_{ik} = \beta_{ik}\left(\frac{T}{r_0}\right)$, $T = r_0\tau$. Следовательно, $F_i(T, X, Y, Z) =$

$$= f_i^1(T, \beta_{11}e^{-A_{11}T}X + \beta_{12}e^{-A_{22}T}Y + \beta_{13}e^{-A_{33}T}Z,$$
$$\beta_{21}e^{-A_{11}T}X + \beta_{22}e^{-A_{22}T}Y + \beta_{23}e^{-A_{33}T}Z,$$
$$\beta_{31}e^{-A_{11}T}X + \beta_{32}e^{-A_{22}T}Y + \beta_{33}e^{-A_{33}T}Z).$$

Замечание. В дальнейшем часто используем функциональные определители для которых, ради удобства, введем сокращенные обозначения:

$$J_{xy} = \frac{D(f_1, f_2)}{D(x, y)}, \qquad J_{XY} = \frac{D(F_1, F_2)}{D(X, Y)}, \qquad J_{x_1y_1} = \frac{D(f_1^1, f_2^1)}{D(x_1, y_1)} \text{ и т. д.}$$

Имеют место равенства

$$\begin{aligned} J_{XY}\, e^{(A_{11}+A_{22})T} &= \bar\beta_{33}J_{x_1y_1} - \bar\beta_{23}J_{x_1z_1} + \bar\beta_{13}J_{y_1z_1}, \\ J_{XZ}\, e^{(A_{11}+A_{33})T} &= -\bar\beta_{32}J_{x_1y_1} + \bar\beta_{22}J_{x_1z_1} - \bar\beta_{12}J_{y_1z_1}, \\ J_{YZ}\, e^{(A_{22}+A_{33})T} &= \bar\beta_{31}J_{x_1y_1} - \bar\beta_{21}J_{x_1z_1} + \bar\beta_{11}J_{y_1z_1}. \end{aligned} \tag{7}$$

Так как

$$J_{x_1\tau} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1^1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1^1}{\partial \tau} \\ \frac{\partial f_2^1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2^1}{\partial \tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1^1}{\partial x_1} & -\frac{\partial f_1^1}{\partial x_1}g_1 - \frac{\partial f_1^1}{\partial y_1}g_2 - \frac{\partial f_1^1}{\partial z_1}g_3 \\ \frac{\partial f_2^1}{\partial x_1} & -\frac{\partial f_2^1}{\partial x_1}g_1 - \frac{\partial f_2^1}{\partial y_1}g_2 - \frac{\partial f_2^1}{\partial z_1}g_3 \end{pmatrix} =$$

$= -J_{x_1y_1}g_2 - J_{x_1z_1}g_3$, то легко проверить, что верны равенства

$$\begin{aligned} J_{x_1\tau} &= -J_{x_1y_1}g_2 - J_{x_1z_1}g_3 \\ J_{y_1\tau} &= J_{x_1y_1}g_1 - J_{y_1z_1}g_3, \\ J_{z_1\tau} &= J_{x_1z_1}g_1 + J_{y_1z_1}g_2. \end{aligned} \tag{8}$$

Рассмотрим матрицу

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1^1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1^1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1^1}{\partial z_1} & \frac{\partial f_1^1}{\partial \tau} \\ \frac{\partial f_2^1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2^1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2^1}{\partial z_1} & \frac{\partial f_2^1}{\partial \tau} \end{pmatrix} \tag{9}$$

По предложению ранг этой матрицы равен двум. Покажем, что в таком случае вектор $(J_{x_1y_1}, J_{x_1z_1}, J_{y_1z_1})$ не тождественно равен нулевому. Действительно, ибо в противном случае следовало бы из системы (8), что и вектор $(J_{x_1\tau}, J_{y_1\tau}, J_{z_1\tau})$ тождественно нулевой. Но тогда ранг матрицы (9) был бы меньше двух, что противоречило бы предположению.

Рассмотрим сейчас вектор $(J_{x_1y_1}, J_{x_1z_1}, J_{y_1z_1})$ как нетривиальное решение системы (7). Определитель системы

$$\begin{vmatrix} \bar{\beta}_{33} & -\bar{\beta}_{23} & \bar{\beta}_{13} \\ -\bar{\beta}_{32} & \bar{\beta}_{22} & -\bar{\beta}_{12} \\ \bar{\beta}_{31} & -\bar{\beta}_{21} & \bar{\beta}_{11} \end{vmatrix} = |k|^2 \neq 0.$$

Поскольку определитель системы (7), которая имеет нетривиальное решение $(J_{x_1y_1}, J_{x_1z_1}, J_{y_1z_1})$, отличный от нуля, то приходим к заключению, что эта система не может быть однородный. Следовательно, вектор (J_{XY}, J_{XZ}, J_{YZ}) не тождественно нулевой. Но это означает, что ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X} & \frac{\partial F_1}{\partial Y} & \frac{\partial F_1}{\partial Z} & \frac{\partial F_1}{\partial T} \\ \frac{\partial F_2}{\partial X} & \frac{\partial F_2}{\partial Y} & \frac{\partial F_2}{\partial Z} & \frac{\partial F_2}{\partial T} \end{pmatrix}$$

равен двум. Этим теорема доказана.

4. Определение первых интегралов системы (A).

1. Используем выше изложенное для того, чтобы определить первые интегралы системы (A) с помощью первых интегралов

$$f_1^1\{\tau, u_1\} = x_1 e^{-\tau} = c_1, \qquad f_2^1\{\tau, u_2\} = y_1 e^{-\tau} = c_2, \qquad f_3^1\{\tau, u_1\} = z_1 e^{-\tau} = c_3 \quad (1)$$

системы (E). Легко проверить, что интегралы (1) независимые.

Замечание. Утверждение, что данная функция зависит (не зависит) от рассматриваемой переменной, будет означать, что производная данной функции по рассматриваемой переменной тождественно не равна (равна) нулю.

Следующие леммы нам понадобятся для определения фундаментальных интегралов уравнения (I).

Лемма 1. *Пусть*

$$F_1(T, X, Y, Z) = C_1, \qquad F_2(T, X, Y, Z) = C_2, \qquad F_3(T, X, Y, Z) = C_3 \quad (2)$$

первые интегралы системы (A), зависящие от T, $\Phi(\alpha, \beta, \gamma)$ произвольная непрерывно дифференцируемая функция, зависящая хоть от двух из переменных α, β, γ. Пусть далее сложная функция

$$\Phi[F_1(T, X, Y, Z), F_2(T, X, Y, Z), F_3(T, X, Y, Z)] = K, \quad (3)$$

зависит хоть от двух из переменных X, Y, Z и не зависит от T.

Тогда (3) *есть первый интеграл системы* (A), *который не зависит ни от одной из функций* (2).

Доказательство. То, что (3) есть первый интеграл, известно из общей теории. Независимость функции (3) от функций (2) вытекает из того, что не могут одновременно удовлетворяться, в силу сделанных предположений, тождества

$$\frac{\mathrm{D}(F_i, \Phi)}{\mathrm{D}(X, T)} = -\frac{\partial \Phi}{\partial X}\frac{\partial F_i}{\partial T} \equiv 0, \qquad \frac{\mathrm{D}(F_i, \Phi)}{\mathrm{D}(Y, T)} = -\frac{\partial \Phi}{\partial Y}\frac{\partial F_i}{\partial T} \equiv 0,$$

$$\frac{\mathrm{D}(F_i, \Phi)}{\mathrm{D}(Z, T)} = -\frac{\partial \Phi}{\partial Z}\frac{\partial F_i}{\partial T} \equiv 0$$

для $i = 1, 2, 3$.

Лемма 2. *Пусть* (2) *независимые первые интегралы системы* (A), *зависящие от* T,

$$\begin{aligned} &\Phi_1(F_1(T, X, Y, Z),\ F_2(T, X, Y, Z)] = K_1, \\ &\Phi_2[F_1(T, X, Y, Z),\ T_3(F, X, Y, Z)] = K_2 \end{aligned} \tag{4}$$

первые интегралы, полученные согласно леммы 1.

Тогда (4) *фундаментальные интегралы системы* (A).

Доказательство. То, что каждая из функций (4) есть первый интеграл, сказано в лемме 1. Независимость интегралов (4) вытекает из равенств

$$\frac{\mathrm{D}(\Phi_1, \Phi_2)}{\mathrm{D}(\alpha, \gamma)} = \frac{\mathrm{D}(\Phi_1, \Phi_2)}{\mathrm{D}(F_1, F_3)} = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial F_1}\frac{\partial \Phi_2}{\partial F_3} \neq 0.$$

Лемма 3. *Пусть* (2) *независимые первые интегралы системы* (A), *зависящие от* T.

$$\Phi_1[F_1(T, X, Y, Z),\ F_2(T, X, Y, Z)] = K_1, \qquad \Phi_2 = F_3(X, Y, Z) = K_2, \tag{5}$$

где Φ_1 *первый интеграл, полученный согласно леммы 1,* Φ_2 *первый интеграл, не зависящий от* T.

Тогда (5) *есть фундаментальные интегралы системы* (A).

Доказательство. Вытекает из того, что

$$\frac{\mathrm{D}(\Phi_1, \Phi_2)}{\mathrm{D}(F_1, F_2)} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial F_1} \neq 0.$$

Лемма 4. *Пусть* (2) *независимые первые интегралы системы* (A), *зависящие от* T. *Предположим, что существует непрерывно дифференцируемая функция* $F(\mu : \nu)$, *такая, что*

$$F\left(\frac{F_1(T, X, Y, Z)}{F_2(T, X, Y, Z)}\right) = \psi(X, Y, Z) + T = K. \tag{6}$$

Пусть

$$\begin{aligned} &F_1(K - \psi(X, Y, Z), X, Y, Z) = \varphi_1(K)\ \Phi_1(X, Y, Z) = C_1, \\ &F_3(K - \psi(X, Y, Z), X, Y, Z) = \varphi_2(K)\ \Phi_2(X, Y, Z) = C_2 \end{aligned} \tag{7'}$$

функции зависящие хотя бы от двух из переменных X, Y, Z.

Тогда

$$\begin{aligned} &\Phi_1(X, Y, Z) = K_1, \\ &\Phi_2(X, Y, Z) = K_2, \end{aligned} \tag{7}$$

являются фундаментальными мнтегралами системы (A).

Доказательство. a) Докажем, что (7) являются первыми интегралами системы (A). Первые интегралы (2) удовлетворяют тождеству

$$\frac{\partial F_i}{\partial T} + \frac{\partial F_i}{\partial X} G_1 + \frac{\partial F_i}{\partial Y} G_2 + \frac{\partial F_i}{\partial Z} G_3 \equiv 0,$$

где $i = 1, 2, 3$. (6) есть тоже первый интеграл системы (A), и следовательно

$$\frac{\partial \psi}{\partial X} G_1 + \frac{\partial \psi}{\partial Y} G_2 + \frac{\partial \psi}{\partial Z} G_3 = \frac{\partial F}{\partial X} G_1 + \frac{\partial F}{\partial Y} G_2 + \frac{\partial F}{\partial Z} G_3 \equiv -\frac{\partial F}{\partial T} \equiv -1.$$

Заметим, что для $i = 1, 3$

$$\frac{\partial F_i}{\partial \psi} = \frac{\partial F_i}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \psi} \equiv -\frac{\partial F_i}{\partial T}$$

и поэтому для $k = 1$, $i = 1$ или $k = 2$, $i = 3$

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial X} G_1 + \frac{\partial \Phi_k}{\partial Y} G_2 + \frac{\partial \Phi_k}{\partial Z} G_3 = [\varphi_k(K)]^{-1} \left(- \frac{\partial F_i}{\partial T} \frac{\partial \psi}{\partial X} + \frac{\partial F_i}{\partial X} \right) G_1 +$$

$$+ [\varphi(K)]^{-1} \left(- \frac{\partial F_i}{\partial T} \frac{\partial \psi}{\partial Y} + \frac{\partial F_i}{\partial Y} \right) G_2 + [\varphi_k(K)]^{-1} \left(- \frac{\partial F_i}{\partial T} \frac{\partial \psi}{\partial Z} + \frac{\partial F_i}{\partial Z} \right) G_3 =$$

$$= [\varphi_k(K)]^{-1} \left[\frac{\partial F_i}{\partial X} G_1 + \frac{\partial F_i}{\partial Y} G_2 + \frac{\partial F_i}{\partial Z} G_3 - \frac{\partial F_i}{\partial T} \left(\frac{\partial \psi}{\partial X} G_1 + \frac{\partial \psi}{\partial Y} G_2 + \frac{\partial \psi}{\partial Z} G_3 \right) \right] =$$

$$= [\varphi_k(K)]^{-1} \left(\frac{\partial F_i}{\partial X} G_1 + \frac{\partial F_i}{\partial Y} G_2 + \frac{\partial F_i}{\partial Z} G_3 + \frac{\partial F_i}{\partial T} \right) \equiv 0.$$

Этим доказано утверждение a).

b) Докажем, что (7) независимые. Предположим противное. Пусть (7) зависимые. Тогда бы одновременно удовлетворялись тождества

$$\frac{D(\Phi_1, \Phi_2)}{D(X, Y)} \equiv 0, \qquad \frac{D(\Phi_1, \Phi_2)}{D(Y, Z)} \equiv 0, \qquad \frac{D(\Phi_1, \Phi_2)}{D(Z, X)} \equiv 0. \tag{8}$$

Рассмотрим систему, состоящую из тождеств (8) и следующих двух тождеств

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial T} \equiv 0, \qquad \frac{\partial \Phi_2}{\partial T} \equiv 0,$$

которые очевидны. Из этой системы тождеств, следовало бы, что

$$\frac{\partial F_1}{\partial T} = R \frac{\partial F_3}{\partial T}, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial X} = R \frac{\partial F_3}{\partial X},$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial Y} = R \frac{\partial F_3}{\partial Y}, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial Z} = R \frac{\partial F_3}{\partial Z},$$

где $R \not\equiv 0$ есть функция, зависящая от переменных X, Y, Z. Но из последних равенств следовало бы, что имеют место тождества

$$\frac{D(F_1, F_3)}{D(X, Y)} \equiv 0, \qquad \frac{D(F_1, F_3)}{D(Y, Z)} \equiv 0, \qquad \frac{D(F_1, F_3)}{D(Z, X)} \equiv 0,$$

$$\frac{D(F_1, F_3)}{D(X, T)} \equiv 0, \qquad \frac{D(F_1, F_3)}{D(Y, T)} \equiv 0, \qquad \frac{D(F_1, F_3)}{D(Z, T)} \equiv 0.$$

Однако это невозможно, так как по предположению первые интегралы F_1, F_3 независимы. Этим доказано, что (7) независимые.

2. В следующих теоремах определим фундаментальные интегралы уравнения (1). Покажем, что вид фундаментальных интегралов зависит от корней λ_i, $i = 1, 2, 3$ уравнения $\Delta(\lambda, r_0) = 0$. Первые интегралы системы (A) получим с помощью теоремы 3.5 преобразованием независимых первых интегралов (1) системы (E). Нам придется часто рассматривать системы 2(11) и (β_i). Заметим, что мы всегда будем предполагать, что если ранг матрицы этих систем равен единице (двум) то отличным от нуля будет главный верхний минор первого (второго) порядка определителя этой системы. Как известно это не ограничивает общность наших рассуждений. Заметим еще, что часто, ради лучшей обозримости, переходя от одной части равенства к другой части, используем сокращенные обозначения коэффициентов, так как нас будет интересовать лишь структура фундаментальных интегралов без точного знания числовых значений коэффициентов.

Определение. *Будем говорить, что корень λ_i, $i = 1, 2, 3$ уравнения $\Delta(\lambda, r_0) = 0$ имеет ранг равный $p = 3 - r$, $(1 \leqq p \leqq 2)$ [4], если матрица системы 2(11) после подстановки корня λ_i имеет ранг равный r.*

Заметим, что если корень λ_i, $i = 1, 2, 3$ имеет ранг равный p, тогда система 2(11) имеет после подстановки в нее $\lambda = \lambda_i\, p$ линейно независимых нетривиальных решений.

Теорема 1. *Пусть уравнение $\Delta(\lambda, r_0) = 0$ имеет вещественные и различные корни λ_i, $i = 1, 2, 3$ или один двукратный корень $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_0$, ранг которого равен двум.*

Тогда фундаментальные интегралы уравнения (1) *можно определить в виде*

$$\Phi_k(X, Y, Z) = \frac{(D_{k1}X + D_{k2}Y + D_{k3}Z)^{\alpha_k}}{(D_{k4}X + D_{k5}Y + D_{k6}Z)^{\beta_k}} = C_k, \tag{11}$$

где D_{kl}, α_k, β_k, $k = 1, 2$, $l = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ определенные постоянные.

Доказательство. а) Пусть корни уравнения $\Delta(\lambda_i\, r_0) = 0$ вещественные и различные. Как известно, в таком случае корни λ_i, $i = 1, 2, 3$ имеют ранг, равный единице. Подставляя λ_i в систтму 2(11), матрица которой имеет ранг, равный двум, и решая ее, находим нетривиальное решение (C_{i1}, C_{i2}, C_{i3}), $i = 1, 2, 3$. Тогда элементы матрицы $k(\tau)$ β_{ik}, $i, k = 1, 2, 3$ имеют вид

$$\beta_{i1} = C_{i1}\, e^{(\lambda_i + A_{11}) r_0 \tau}, \qquad \beta_{i2} = C_{i2}\, e^{(\lambda_i + A_{22}) r_0 \tau}, \qquad \beta_{i3} = C_{i3}\, e^{(\lambda_i + A_{33}) r_0 \tau}$$

где $i = 1, 2, 3$. Следовательно, учитывая, что $T = r_0\tau$, то $k(\tau)\, C^{-1}(T) U =$

$$= \begin{pmatrix} C_{11}\, e^{(\lambda_1 + A_{11}) T} & C_{12}\, e^{(\lambda_1 + A_{22}) T} & C_{13}\, e^{(\lambda_1 + A_{33}) T} \\ C_{21}\, e^{(\lambda_2 + A_{11}) T} & C_{22}\, e^{(\lambda_2 + A_{22}) T} & C_{23}\, e^{(\lambda_2 + A_{33}) T} \\ C_{31}\, e^{(\lambda_3 + A_{11}) T} & C_{32}\, e^{(\lambda_3 + A_{22}) T} & C_{33}\, e^{(\lambda_3 + A_{33}) T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-A_{11}T} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-A_{22}T} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-A_{33}T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

Тогда согласно теореме 3.5

$$F_i\{T, U\} = f_i^1\{r_0\tau, k(\tau)\, C^{-1}(T)\, U\} =$$
$$= f_i^1(T, (C_{11}X + C_{12}Y + C_{13}Z)\, e^{\lambda_1 T}, \quad (C_{21}X + C_{22}Y + C_{23}Z)\, e^{\lambda_2 T},$$
$$(C_{31}X + C_{32}Y + C_{33}Z)\, e^{\lambda_3 T}) = C_i$$

есть первый интеграл системы (A). Если в качестве f_i^1 взять независимые первые интегралы (1), то получаем три независимые первые интегралы системы (A)

$$\begin{aligned} F_1(T, X, Y, Z) &= (C_{11}X + C_{12}Y + C_{13}Z)\, e^{\left(\lambda_1 - \frac{1}{r_0}\right)T} = C_1, \\ F_2(T, X, Y, Z) &= (C_{21}X + C_{22}Y + C_{23}Z)\, e^{\left(\lambda_2 - \frac{1}{r_0}\right)T} = C_2, \\ F_3(T, X, Y, Z) &= (C_{31}X + C_{32}Y + C_{33}Z)\, e^{\left(\lambda_3 - \frac{1}{r_0}\right)T} = C_3. \end{aligned} \tag{12}$$

Предположим, что $\lambda_i \neq 1 : r_0$, $i = 1, 2, 3$. Тогда

$$\begin{aligned} \Phi_1(X, Y, Z) &= \frac{F_2^{\left(\lambda_1 - \frac{1}{r_0}\right)}}{F_1^{\left(\lambda_2 - \frac{1}{r_0}\right)}} = \frac{(C_{21}X + C_{22}Y + C_{23}Z)^{\left(\lambda_1 - \frac{1}{r_0}\right)}}{(C_{11}X + C_{12}Y + C_{13}Z)^{\left(\lambda_2 - \frac{1}{r_0}\right)}} = K_1, \\ \Phi_2(X, Y, Z) &= \frac{F_3^{\left(\lambda_1 - \frac{1}{r_0}\right)}}{F_1^{\left(\lambda_3 - \frac{1}{r_0}\right)}} = \frac{(C_{31}X + C_{32}Y + C_{33}Z)^{\left(\lambda_1 - \frac{1}{r_0}\right)}}{(C_{11}X + C_{12}Y + C_{13}Z)^{\left(\lambda_3 - \frac{1}{r_0}\right)}} = K_2, \end{aligned} \tag{13}$$

являются, согласно лемме 2, фундаментальными интегралами уравнения (I). Если один корень, например $\lambda_3 = 1 : r_0$, тогда

$$\begin{aligned} \Phi_1(X, Y, Z) &= \frac{(C_{21}X + C_{22}Y + C_{23}Z)^{\left(\lambda_1 - \frac{1}{r_0}\right)}}{(C_{11}X + C_{12}Y + C_{13}Z)^{\left(\lambda_2 - \frac{1}{r_0}\right)}} = K_1, \\ \Phi_2(X, Y, Z) &= F_3(T, Y, Z) = C_{31}X + C_{32}Y + C_{33}Z = K_2 \end{aligned} \tag{14}$$

являются, согласно лемме 3, фундаментальными интегралами уравнения (I).

b) Пусть уравнение $\Delta(\lambda, r_0) = 0$ имеет двухкратный корень $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_0 \neq \lambda_1$, ранг которого равен двум. Решая систему 2(11) для $\lambda = \lambda_1$, корня, ранг которого равен единице, получаем нетривиальное решение (C_{11}, C_{12}, C_{13}). Если подставим в систему 2(11) λ_0, тогда матрица этой системы имеет ранг, равный единице. Следовательно, решение определяется первым уравнением

$$C_{k1} = \frac{A_{21}r_0}{1 - (\lambda_0 + A_{11})\, r_2}\, C_{k2} + \frac{A_{31}r_0}{1 - (\lambda_0 + A_{11})\, r_0}\, C_{k3} = M_1C_{k2} + M_2C_{k3},$$

где $k = 2, 3$. Итак, корню λ_0 отвечают два линейно независимые решения $(M_1, 1, 0)$, $(M_2, 0, 1)$. Тогда элементы матрицы $k(\tau)$ возьмем в виде

$$\beta_{11} = C_{11}\, e^{(\lambda_1 + A_{22})\, r_0\tau}, \qquad \beta_{12} = C_{12}\, e^{(\lambda_1 + A_{22})\, r_0\tau}, \qquad \beta_{13} = C_{13}\, e^{(\lambda_1 + A_{33})\, r_0\tau},$$

$$\beta_{21} = M_1\, e^{(\lambda_0 + A_{11})\, r_0\tau}, \qquad \beta_{22} = e^{(\lambda_0 + A_{22})\, r_0\tau}, \qquad \beta_{23} = 0,$$

$$\beta_{31} = M_2\, e^{(\lambda_0 + A_{11})\, r_0\tau}, \qquad \beta_{32} = 0 \qquad \beta_{33} = e^{(\lambda_0 + A_{33})\, r_0\tau}.$$

Далее, учитывая, что $T = r_0\tau$, то $k(\tau)\, C^{-1}(T)\, U =$

$$= \begin{pmatrix} C_{11}\, e^{(\lambda_1 + A_{11})\, T} & C_{12}\, e^{(\lambda_1 + A_{22})\, T} & C_{13}\, e^{(\lambda_1 + A_{33})\, T} \\ M_1\, e^{(\lambda_0 + A_{11})\, T} & e^{(\lambda_0 + A_{22})\, T} & 0 \\ M_2\, e^{(\lambda_0 + A_{11})\, T} & 0 & e^{(\lambda_0 + A_{33})\, T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-A_{11}T} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-A_{22}T} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-A_{23}T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

Согласно теореме 3.5, $F_i\{T, U\} = f_i^1\{T, k(\tau)\, C^{-1}(T)\, U\} =$

$$= f_i^1(T, (C_{11}X + C_{12}Y + C_{13}Z)\, e^{\lambda_1 T}, \quad (M_1X + Y)\, e^{\lambda_0 T}, \quad (M_2X + Z)\, e^{\lambda_0 T}) = C_i$$

есть первый интеграл системы (A). Если в качестве f_i^1, $i = 1, 2, 3$ взять независимые первые интегралы (1), то получаем три независимые первые интегралы системы (A)

$$F_1(T, X, Y, Z) = (C_{11}X + C_{12}Y + C_{13}Z)\, e^{\left(\lambda_1 - \frac{1}{r_0}\right) T} = C_1,$$

$$F_2(T, X, Y, Z) = (M_1X + Y)\, e^{\left(\lambda_0 - \frac{1}{r_0}\right) T} = C_2, \tag{15}$$

$$F_3(T, X, Y, Z) = (M_2X + Z)\, e^{\left(\lambda_0 - \frac{1}{r_0}\right) T} = C_3.$$

Если $\lambda_0 \neq (1 : r_0) + \lambda_1$, тогда

$$\Phi_1(X, Y, Z) = \frac{F_2^{\left(\lambda_1 - \frac{1}{r_0}\right)}}{F_1^{\left(\lambda_0 - \frac{1}{r_0}\right)}} = \frac{(M_1X + Y)^{\left(\lambda_1 - \frac{1}{r_0}\right)}}{(C_{11}X + C_{12}Y + C_{13}Z)^{\left(\lambda_0 - \frac{1}{r_0}\right)}} = K_1,$$

$$\Phi_2(X, Y, Z) = \frac{F_3^{\left(\lambda_1 - \frac{1}{r_0}\right)}}{F_1^{\left(\lambda_0 - \frac{1}{r_0}\right)}} = \frac{(M_2X + Y)^{\left(\lambda_1 - \frac{1}{r_0}\right)}}{(C_{11}X + C_{12}Y + C_{13}Z)^{\left(\lambda_0 - \frac{1}{r_0}\right)}} = K_2, \tag{16}$$

являются, согласно лемме 2, фундаментальными интегралами уравнения (I). Если $\lambda_0 = 1 : r_0$, тогда

$$\Phi_1(X, Y, Z) = F_2(T, X, Y, Z) = M_1X + Y = C_2,$$

$$\Phi_2(X, Y, Z) = F_3(T, X, Y, Z) = M_2X + Z = C_3, \tag{17}$$

являются фундаментальными интегралами уравнения (I). Если $\lambda_1 = 1 : r_0$, тогда

$$\Phi_1(X, Y, Z) = F_1(T, X, Y, Z) = C_{11}X + C_{12}Y + C_{13}Z = C_1,$$

$$\Phi_2(X, Y, Z) = \frac{F_2}{F_3} = \frac{M_1X + Y}{M_2X + Z} = K_2, \tag{18}$$

являются, согласно лемме 3, фундаментальными интегралами уравнения (I).

Как видно, приведенные фундаментальные интегралы (13), (14), (16), (17), (18) имеют вид (11). Этим теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть уравнение $\Delta(\lambda, r_0) = 0$ имеет двухкратный корень $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_0$, ранг которого равен единице или трехкратный корень $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_0$, ранг которого равен двум.*

Тогда фундаментальные интегралы уравнения (I) *можно определить в виде*

$$\Phi_k(X, Y, Z) = (D_{k1}X + D_{k2}Y + F_{k3}Z) \exp \alpha_k \frac{D_{k4}X + D_{k5}Y + D_{k6}Z}{D_{k7}X + D_{k8}Y + D_{k9}Z} = C_k, \tag{19}$$

где D_{kl}, α_k, $k = 1, 2$, $l = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ определенные постоянные.

Доказательство. а) По предположению уравнение $\Delta(\lambda, r_0) = 0$ имеет двухкратный корень λ_0, ранг которого равен единице и однократный корень λ_1, ранг которого равен единице. Для корня λ_1 определим из системы 2(11) нетривиальное решение (C_{11}, C_{12}, C_{13}). Если подставить λ_0 в систему 2(11), тогда ранг матрицы этой системы равен двум и нам не удастся определить два линейно независимые решения. Поэтому решение системы (β_i) ищем в виде

$$\beta_{i1} = (a_1\tau + a_2)\, e^{(\lambda_0 + A_{11}) r_0 \tau}, \qquad \beta_{i2} = (b_1\tau + b_2)\, e^{(\lambda_0 + A_{22}) r_0 \tau},$$
$$\beta_{i3} = (c_1\tau + c_2)\, e^{(\lambda_0 + A_{33}) r_0 \tau}. \tag{20}$$

Если (20) подставить в систему (β_i) и сравнить члены при одинаковых степенях τ, тогда для определения a_k, b_k, c_k, $K = 1, 2$ получаем две системы следующего типа

$$\begin{aligned}
&[1 - (\lambda_0 + A_{11}) r_0]\, a_k - A_{21} r_0 b_k - A_{31} r_0 c_k = Q_{1k},\\
&- A_{12} r_0 a_k + [1 - (\lambda_0 + A_{22}) r_0]\, b_k - A_{32} r_0 c_k = Q_{2k},\\
&- A_{13} r_0 a_k - A_{23} r_0 b_k + [1 - (\lambda_0 + A_{33}) r_0]\, c_k = Q_{3k},
\end{aligned} \tag{21}$$

где $k = 1, 2$, $Q_{11} = Q_{21} = Q_{31} = 0$, $Q_{12} = a_1$, $Q_{22} = b_1$, $Q_{32} = c_1$. Согласно сделанным предположениям, система (21) эквивалентна с системой

$$\begin{aligned}
&[1 - (\lambda_0 + A_{11}) r_0]\, a_k - A_{21} r_0 b_k = Q_{1k} + A_{31} r_0 c_k,\\
&- A_{12} r_0 a_k + [1 - (\lambda_0 + A_{22}) r_0]\, b_k = Q_{2k} + A_{32} r_0 c_k,
\end{aligned} \tag{22}$$

решение которой запишем в виде

$$\begin{aligned}
a_k &= l_1(Q_{1k} + A_{31} r_0 c_k) + l_2(Q_{2k} + A_{32} r_0 c_k),\\
b_k &= k_1(Q_{1k} + A_{31} r_0 c_k) + k_2(Q_{2k} + A_{32} r_0 c_k),
\end{aligned} \tag{23}$$

где l_1, l_2, k_1, k_2 определенные вещественные числа. Если в системе (22) положить $k = 1$, тогда согласно (23) получаем, что

$$a_1 = (l_1 A_{31} + l_2 A_{32}) r_0 c_1 = m_1 c_1, \qquad b_1 = (k_1 A_{31} + k_2 A_{32}) r_0 c_1 = m_2 c_1.$$

Для $k = 2$ определим, что

$$a_2 = l_1(a_1 + A_{31} r_0 c_2) + l_2(b_1 + A_{32} r_0 c_2) = l_1 a_1 + l_2 a_2 + (l_1 A_{31} + l_2 A_{32})\, r_0 c_2 = (l_1 m_1 + l_2 m_2)\, c_1 + m_1 c_1 = n_1 c_1 + m_1 c_2,$$

$$b_2 = k_1(a_1 + A_{31}r_0c_2) + k_2(b_1 + A_{32}r_0c_2) = k_1a_1 + k_2b_1 + (k_1A_{31} + k_2A_{32})\, r_0c_2 =$$
$$= (k_1m_1 + k_2m_2)\, c_1 + m_2c_2 = n_2c_1 + m_2c_2.$$

Итак,

$$\beta_{i1} = (m_1c_1\tau + n_1c_1 + m_1c_2)\, e^{(\lambda_0+A_{11})\, r_0\tau},$$
$$\beta_{i2} = (m_2c_1\tau + n_2c_1 + m_2c_2)\, e^{(\lambda_0+A_{22})\, r_0\tau},$$
$$\beta_{i3} = (c_1\tau + c_2)\, e^{(\lambda_0+A_{31})\, r_0\tau}.$$

Решение β_{ik}, как видим, зависит от двух произвольных постоянных. Полагая поочередно $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ и $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, получаем нужные частные решения. Следовательно,

$$\begin{array}{lll}
\beta_{11} = C_{11}\, e^{(\lambda_1+A_{11})\, r_0\tau}, & \beta_{12} = C_{12}\, e^{(\lambda_1+A_{22})\, r_0\tau}, & \beta_{13} = C_{13}\, e^{(\lambda_1+A_{33})\, r_0\tau}, \\
\beta_{21} = m_1\, e^{(\lambda_0+A_{11})\, r_0\tau}, & \beta_{22} = m_2\, e^{(\lambda_0+A_{22})\, r_0\tau}, & \beta_{23} = e^{(\lambda_0+A_{33})\, r_0\tau}, \\
\beta_{31} = (m_1\tau + n_1)\, e^{(\lambda_0+A_{11})\, r_0\tau}, & \beta_{32} = (m_2\tau + n_2)\, e^{(\lambda_0+A_{22})\, r_0\tau}, & \beta_{33} = \tau\, e^{(\lambda_0+A_{33})\, r_0\tau}.
\end{array}$$

Поэтому учитывая, что $T = r_0\tau$, то $k(\tau)\, C^{-1}(T)\, U =$

$$= \begin{pmatrix}
C_{11}\, e^{(\lambda_1+A_{11})\, T} & C_{12}\, e^{(\lambda_1+A_{22})\, T} & C_{13}\, e^{(\lambda_1+A_{33})\, T} \\
m_1\, e^{(\lambda_0+A_{11})\, T} & m_2\, e^{(\lambda_0+A_{22})\, T} & e^{(\lambda_0+A_{33})\, T} \\
\left(m_1 \dfrac{T}{r_0} + n_1\right) e^{(\lambda_0+A_{11})\, T} & \left(m_2 \dfrac{T}{r_0} + n_2\right) e^{(\lambda_0+A_{11})\, T} & \dfrac{T}{r_0}\, e^{(\lambda_0+A_{33})\, T}
\end{pmatrix} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} e^{-A_{11}T} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-A_{22}T} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-A_{33}T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

Тогда согласно теореме 3.5 $F_i\{T, U\} = f_i^1\{T, k(\tau)\, C^{1}(T)\, U\} =$

$$= f_i^1\Big(T,\ (C_{11}X + C_{12}Y + C_{13}Z)\, e^{\lambda_1 T},\quad (m_1X + m_2Y + Z)\, e^{\lambda_0 T},$$
$$\left[(m_1X + m_2Y + Z)\frac{T}{r_0} + n_1X + n_2Y\right] e^{\lambda_0 T}\Big) = C_i,$$

есть первый интеграл системы (A). Если в качестве f_i^1, $i = 1, 2, 3$ взять независимые первые интегралы (1), тогда получаем три независимые первые интегралы системы (A)

$$\begin{aligned}
F_1(T, X, Y, Z) &= (C_{11}X + C_{12}Y + C_{13}Z)\, e^{\left(\lambda_1 - \frac{1}{r_0}\right) T} = C_1, \\
F_2(T, X, Y, Z) &= (m_1X + m_2Y + Z)\, e^{\left(\lambda_0 - \frac{1}{r_0}\right) T} = C_2, \qquad\qquad (24) \\
F_3(T, X, Y, Z) &= \left[(m_1X + m_2Y + Z)\, \frac{T}{r_0} + n_1X + n_2Y\right] e^{\left(\lambda_0 - \frac{1}{r_0}\right) T} = C_3.
\end{aligned}$$

Предположим, что $\lambda_1 \neq (1 : r_0) \neq \lambda_0$. Имеем, что

$$r_0 \frac{F_3}{F_2} = T + r_0 \frac{n_1X + n_2Y}{m_1X + m_2Y + Z} = T + \psi(X, Y, Z) = K = \frac{r_0C_3}{C_2}.$$

Тогда, согласно лемме 4

$$\begin{gathered}
\Phi_1(X, Y, Z) = F_1(K - \psi(X, Y, Z), X, Y, Z) = \\
= (C_{11}X + C_{12}Y + C_{13}Z) \exp \frac{(1 - \lambda_1 r_0)(n_1 X + n_2 Y)}{m_1 X + m_2 Y + Z} = K_1, \\
\Phi_2(X, Y, Z) = F_2(K - \psi(X, Y, Z), X, Y, Z) = \\
= (m_1 X + m_2 Y + Z) \exp \frac{(1 - \lambda_0 r_0)(n_1 X + n_2 Y)}{m_1 X + m_2 Y + Z} = K_2
\end{gathered} \tag{25}$$

являются фундаментальными интегралами уравнения (I).

b) Пусть уравнение $\Delta(\lambda, r_0) = 0$ имеет трехкратный корень λ_0, ранг которого равен двум. Как мы уже знаем, в таком случае после подстановки λ_0 в систему 2(11) определим два линейно независимые решения $(M_1, 1, 0)$, $(M_2, 0, 1)$. Этим определены функции β_{ik} для $i = 1, 2$, $k = 1, 2, 3$. Функции $\beta_{31}, \beta_{32}, \beta_{33}$ ищем в виде (20). Система (21) эквивалента с системой, состоящей из первого уравнения

$$[1 - (\lambda_0 + A_{11}) r_0] a_k - A_{21} r_0 b_k - A_{31} r_0 c_k = Q_{1k},$$

из которого для $k = 1$ определим, что

$$a_1 = \frac{A_{21} r_0}{1 - (\lambda_0 + A_{11}) r_0} b_1 + \frac{A_{31} r_0}{1 - (\lambda_0 + A_{11}) r_0} c_1 = M_1 b_1 + M_2 c_1$$

и для $k = 2$, что

$$\begin{gathered}
a_2 = \frac{A_{21} r_0}{1 - (\lambda_0 + A_{11}) r_0} b_2 + \frac{A_{31} r_0}{1 - (\lambda_0 + A_{11}) r_0} c_2 + \frac{a_1}{1 - (\lambda_0 + A_{11}) r_0} = \\
= M_1 b_2 + M_2 c_2 + \frac{M_1 b_1}{1 - (\lambda_0 + A_{11}) r_0} + \frac{M_2 c_1}{1 - (\lambda_0 + A_{11}) r_0} = \\
= M_1 b_2 + M_2 c_2 + N_1 b_1 + N_2 c_1.
\end{gathered}$$

Итак,

$$\begin{gathered}
\beta_{i1} = [(M_1 b_1 + M_2 c_1) \tau + \mathrm{N}_2 c_1 + M_1 b_2 + A_2 c_2] e^{(\lambda_0 + A_{11}) r_0 \tau}, \\
\beta_{i2} = (b_1 \tau + b_2) e^{(\lambda_0 + A_{22}) r_0 \tau}, \qquad \beta_{i3} = (c_1 \tau + c_2) e^{(\lambda_0 + A_{33}) r_0 \tau}.
\end{gathered}$$

Полагая в этих выражениях $b_1 = 1$, $b_2 = c_1 = c_2 = 0$, получаем, что для $i = 3$

$$\beta_{31} = (M_1 \tau + \mathrm{N}_1) e^{(\lambda_0 + A_{11}) r_0 \tau}, \qquad \beta_{32} = \tau e^{(\lambda_0 + A_{22}) r_0 \tau}, \qquad \beta_{33} = 0.$$

Далее, для $b_1 = 0$, $b_2 = 1$, $c_1 = c_2 = 0$ и $b_1 = b_2 = c_1 = 0$, $c_2 = 1$, получаем, что

$$\begin{aligned}
&\beta_{11} = M_1 e^{(\lambda_0 + A_{11}) r_0 \tau}, \qquad &&\beta_{12} = e^{(\lambda_0 + A_{22}) r_0 \tau}, \qquad &&\beta_{13} = 0, \\
&\beta_{21} = M_2 e^{(\lambda_0 + A_{11}) r_0 \tau}, \qquad &&\beta_{22} = 0, \qquad &&\beta_{23} = e^{(\lambda_0 + A_{33}) r_0 \tau}.
\end{aligned}$$

Следовательно, учитывая, что $T = r_0\tau$, то $k(\tau)\, C^{-1}(T)\, U =$

$$= \begin{pmatrix} M_1\, e^{(\lambda_0+A_{11})\, T} & e^{(\lambda_0+A_{22})\, T} & 0 \\ M_2\, e^{(\lambda_0+A_{11})\, T} & 0 & e^{(\lambda_0+A_{22})\, T} \\ \left(M_1 \dfrac{T}{r_0} + N_1\right) e^{(\lambda_0+A_{11})\, T} & \dfrac{T}{r_0}\, e^{(\lambda_0+A_{22})\, T} & 0 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} e^{-A_{11}T} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-A_{22}T} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-A_{33}T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

Согласно теореме 3.5, $F_i\{T, U\} = f_i^1\{T, k(\tau)\, C^{-1}(T)\, U\} =$

$$= f_i^1\Big(T,\ (M_1X + Y)\, e^{\lambda_0 T}, \qquad (M_2X + Z)\, e^{\lambda_0 T},$$

$$\left[(M_1X + Y \frac{T}{r_0} + \mathrm{N}_1 X\right] e^{\lambda_0 T}\Big) = c_i,$$

есть первый интеграл системы (A). Если в качестве f_i^1, $i = 1, 2, 3$ взять независимые первые интегралы (1), тогда получаем три независимые первые интегралы системы (A)

$$\begin{aligned} F_1(T, X, Y, Z) &= (M_1X + Y)\, e^{\left(\lambda_0 - \frac{1}{r_0}\right) T} = C_1, \\ F_2(T, X, Y, Z) &= (M_2X + Z)\, e^{\left(\lambda_0 - \frac{1}{r_0}\right) T} = C_2, \\ F_3(T, X, Y, Z) &= \left[(M_1X + Y)\frac{T}{r_0} + N_1X\right] e^{\left(\lambda_0 - \frac{1}{r_0}\right) T} = C_3. \end{aligned} \tag{26}$$

Предположим, что $\lambda_0 \neq 1 : r_0$. Тогда

$$r_0 \frac{F_3}{F_1} = T + r_0 \frac{N_1X}{M_1X + Y} = T + \psi(X, Y, Z) = K = \frac{r_0 C_3}{C_1}$$

и, согласно лемме 4,

$$\begin{aligned} \Phi_1(X, Y, Z) &= F_1[K - \psi(X, Y, Z), X, Y, Z] = \\ &= (M_1X + Y) \exp \frac{(1 - \lambda_0 r_0)\, N_1X}{M_1X + Y} = K_1, \\ \Phi_2(X, Y, Z) &= F_2[K - \psi(X, Y, Z), X, Y, Z] = \\ &= (M_2X + Z) \exp \frac{(1 - \lambda_0 r_0)\, N_1X}{M_1X + Y} = K_2, \end{aligned} \tag{27}$$

являются фундаментальными интегралами уравнения (I).

Как видно, приведенные фундаментальные интегралы (25), (27) имеют вид (19). Этим теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть уравнение* $\Delta(\lambda, r_0) = 0$ *имеет трехкратный корень* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_0$, *ранг которого равен единице.*

Тогда фундаментальные интегралы уравнения (I) *можно определить в виде*

$$(D_{k1}X + D_{k2}Y + D_{k3}Z)^k \exp \beta_k \frac{D_1X + D_2Y}{D_3X + D_4Y + Z} = C_k, \tag{28}$$

где D_{ki}, D_l, β_k, $k = 1, 2$, $i = 1, 2, 3$, $l = 1, 2, 3, 4$ *определенные постоянные.*

Доказательство. Если подставить λ_0 в систему 2(11), тогда ранг матрицы этой системы равен двум, и нам не удастся определить три линейно независимые решения. Поэтому используем систему (β_i), решение которой ищем в виде

$$\begin{aligned} \beta_{i1} &= (a_1\tau^2 + a_2\tau + a_3)\, e^{(\lambda_0 + A_{11})\, r_0\tau}, \\ \beta_{i2} &= (b_1\tau^2 + b_2\tau + b_3)\, e^{(\lambda_0 + A_{22})\, r_0\tau}, \\ \beta_{i3} &= (c_1\tau^2 + c_2\tau + c_3)\, e^{(\lambda_0 + A_{33})\, r_0\tau}. \end{aligned} \tag{29}$$

Если (29) подставить в систему (β_i) и сравнить члены при одинаковых степенях τ, тогда для определения коэффициентов a_k, b_k, c_k, $k = 1, 2, 3$ получаем три системы типа (21), в которых $Q_{11} = Q_{21} = Q_{31} = 0$, $Q_{12} = 2a_1$, $Q_{22} = 2b_1$, $Q_{32} = 2c_1$, $Q_{13} = a_2$, $Q_{23} = b_2$, $Q_{33} = c_2$. С помощью (23) опять определим, что

$$a_1 = m_1c_1, \qquad b_1 = m_2c_2, \qquad a_2 = 2n_1c_1 + m_1c_2, \qquad b_2 = 2n_2c_1 + m_2c_2.$$

Далее,

$$\begin{aligned} a_3 &= l_1(a_2 + A_{31}r_0c_3) + l_2(b_2 + A_{32}r_0c_3) = l_1(2n_1c_1 + m_1c_2) + l_2(2n_2c_1 + m_2c_2) + \\ &\quad + (l_1A_{31} + l_2A_{32})\, r_0c_3 = 2(l_1n_1 + l_2n_2)\, c_1 + (l_1m_1 + l_2m_2)\, c_2 + m_1c_1 = \\ &\quad = 2p_1c_1 + n_1c_2 + m_1c_3, \\ b_3 &= 2p_2c_1 + n_2c_2 + m_2c_3. \end{aligned}$$

Частные решения β_{ik}, $i, k = 1, 2, 3$ определим так, что для $i = 1$ положим $c_1 = 0 = c_2$, $c_3 = 1$, для $i = 2$, $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $c_3 = 0$ и для $i = 3$, $c_1 = 1$, $c_2 = c_3 = 0$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= m_1\, e^{(\lambda_0 + A_{11})\, r_0\tau}, & \beta_{12} &= m_2\, e^{(\lambda_0 + A_{22})\, r_0\tau}, \\ \beta_{21} &= (m_1\tau + n_1)\, e^{(\lambda_0 + A_{11})\, r_0\tau}, & \beta_{22} &= (m_2\tau + n_2)\, e^{(\lambda_0 + A_{22})\, r_0\tau}, \\ \beta_{31} &= (m_1\tau^2 + 2n_1\tau + 2p_1)\, e^{(\lambda_0 + A_{11})\, r_0\tau}, & \beta_{32} &= (m_2\tau^2 + 2n_2\tau + 2p_2)\, e^{(\lambda_0 + A_{22})\, r_0\tau}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_{13} &= e^{(\lambda_0 + A_{33})\, r_0\tau}, \\ \beta_{23} &= \tau\, e^{(\lambda_0 + A_{33})\, r_0\tau}, \\ \beta_{33} &= \tau^2\, e^{(\lambda_0 + A_{33})\, r_0\tau}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $T = r_0\tau$, то $k(\tau)\, C^{-1}(T)\, U =$

$$= \begin{pmatrix} m_1\, e^{(\lambda_0+A_{11})\,T} & m_2\, e^{(\lambda_0+A_{22})\,T} & e^{(\lambda_0+A_{33})\,T} \\ \left(m_1 \frac{T}{r_0} + n_1\right) e^{(\lambda_0+A_{11})\,T} & \left(m_2 \frac{T}{r_0} + n_2\right) e^{(\lambda_0+A_{22})\,T} & \frac{T}{r_0}\, e^{(\lambda_0+A_{33})\,T} \\ \left(m_1 \frac{T^2}{r_0^2} + 2n_1 \frac{T}{r_0} + 2p_1\right) e^{(\lambda_0+A_{11})T} & \left(m_2 \frac{T^2}{r_0} + 2n_2 \frac{T}{r_0} + 2p_2\right) e^{(\lambda_0+A_{22})T} & \frac{T^2}{r_0}\, e^{(\lambda_0+A_{33})\,T} \end{pmatrix}.$$

$$\cdot \begin{pmatrix} e^{-A_{11}T} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-A_{22}T} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-A_{33}T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

Согласно теореме 3.5 $F_i\{T, U\} = f_i^1\{T, k(\tau)\, C^{-1}(T)\, U\} =$

$$= f_i^1\Big([T, (m_1X + m_2Y + Z)]\, e^{\lambda_0 T},\ \left[(m_1X + m_2Y + Z)\frac{T}{r_0} + n_1X + n_2Y\right] e^{\lambda_0 T},$$

$$\left[(m_1X + m_2Y + Z)\frac{T}{r_0^2} + 2(n_1X + n_2Y)\frac{T}{r_0} + 2(p_1X + p_2Y)\right] e^{\lambda_0 T}\Big) = c_i,$$

есть первый интеграл системы (A). Если в качестве f_i^1, $i = 1, 2, 3$ взять независимые первые интегралы (1), тогда получим три независимые первые интегралы системы (A)

$$\begin{aligned} F_1(T, X, Y, Z) &= (m_1X + m_2Y + Z)\, e^{\left(\lambda_0 - \frac{1}{r_0}\right) T} = C_1, \\ F_2(T, X, Y, Z) &= \left[(m_1X + m_2Y + Z)\frac{T}{r_0} + n_1X + n_2Y\right] e^{\left(\lambda_0 - \frac{1}{r_0}\right) T} = C_2, \\ F_3(T, X, Y, Z) &= \Big[(m_1X + m_2Y + Z)\frac{T^2}{r_0^2} + 2(n_1X + n_2Y)\frac{T}{r_0} + \\ &\quad + 2(p_1X + p_2Y)\Big] e^{\left(\lambda_0 - \frac{1}{r_0}\right) T} = C_3. \end{aligned} \tag{30}$$

Функция $F_4(T, X, Y, Z) = F_2^2 - F_1F_3 =$

$$= [(n_1X + n_2Y)^2 - 2(p_1X + p_2Y)(m_1X + m_2Y + Z)]\, e^{2\left(\lambda_0 - \frac{1}{r_0}\right) T} = C_4$$

является, очевидно, первым интегралом, не зависимым от функции F_1. Далее

$$r_0 \frac{F_2}{F_1} = T + r_0 \frac{n_1X + n_2Y}{m_1X + m_2Y + Z} = T + \psi(X, Y, Z) = K.$$

Предположим, что $\lambda_0 \neq 1 : r_0$, тогда, согласно лемме 4,

$$\Phi_1(X, Y, Z) = F_1[K - \psi(X, Y, Z), X, Y, Z] =$$

$$= (m_1X + m_2Y + Z)\exp\frac{(1 - \lambda_0 r_0)(n_1X + n_2Y)}{m_1X + m_2Y + Z} = K_1,$$

$$\Phi_2(X, Y, Z) = F_4[K - \psi(X, Y, Z), X, Y, Z] = \tag{31}$$
$$= [(n_1X + n_2Y)^2 - 2(p_1X + p_1X + p_2Y)$$
$$. (m_1X + m_2Y + Z)] \exp \frac{2(1 - \lambda_0 r_0)(n_1X + n_2Y)}{m_1X + m_2Y + Z} = K_2,$$

являются фундаментальными интегралами уравнения (I).

Заметим, что выражения (31) сохраняют смысл и для $\lambda_0 = 1 : r_0$. Как видно, приведенные фундаментальные интегралы (31), имеют вид (28).

Теорема 4. *Пусть уравнение* $\Delta(\lambda_1 r_0) = 0$ *имеет комплексные корни* $\lambda_{2,3} = \nu \pm i\mu$.

Тогда фундаментальные интегралы уравнения (I) *можно определить в виде*

$$(D_{k1}X + D_{k2}Y + D_{k3}Z)^k \exp \beta_k \operatorname{arctg} \frac{D_1X + D_2Y + D_3Z}{D_4X + D_5Y + D_6Z} = C_k, \tag{32}$$

где D_{ki}, D_l, β_k, $k = 1, 2$, $i = 1, 2, 3$, $l = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ *определенные постоянные.*

Доказательство. Вещественный корень λ_1 имеет ранг, равный единице. Подставляя λ_1 в систему 2(11), определим решение (C_{11}, C_{12}, C_{13}). Решения системы (β_i), отвечающие комплексным корням $\lambda_{2,3}$ ищем в виде

$$\beta_{i1} = (a_1 + \mathrm{i}a_2)\, \mathrm{e}^{(\nu + A_{11} + \mathrm{i}\mu) r_0 \tau}, \qquad \beta_{i2} = (b_1 + \mathrm{i}b_2)\, \mathrm{e}^{(\nu + A_{22} + \mathrm{i}\mu) r_0 \tau},$$
$$\beta_{i3} = (c_1 + \mathrm{i}c_2)\, \mathrm{e}^{(\nu + A_{33} + \mathrm{i}\mu) r_0 \tau}, \tag{33}$$

После подстановки (33) в систему (β_i) получаем, что

$$\begin{aligned}
&(1 - (\nu + A_{11} + \mathrm{i}\mu) r_0]\,(a_1 + \mathrm{i}a_2) && - A_{21} r_0 (b_1 + \mathrm{i}b_2) && - A_{31} r_0 (c_1 + \mathrm{i}c_2) = 0,\\
&- A_{12} r_0 (a_1 + \mathrm{i}a_2) + [1 - (\nu + A_{22} + \mathrm{i}\mu) r_0]\,(b_1 + \mathrm{i}b_2) && && - A_{32} r_0 (c_1 + \mathrm{i}c_2) = 0,\\
&- A_{13} r_0 (a_1 + \mathrm{i}a_2) && - A_{23} r_0 (b_1 + \mathrm{i}b_2) + [1 - (\nu + A_{33} + \mathrm{i}\mu) r_0]\,(c_1 + \mathrm{i}c_2) && = 0.
\end{aligned} \tag{34}$$

В качестве решений этой системы возьмем алгебраическое дополнения элементов последней строки матрицы системы (34). Напомним, что из сделанных предположений вытекает нетривиальность этого решения. Пусть

$$a + \mathrm{i}a_2 = l_1 + \mathrm{i}l_2, \qquad b_1 + \mathrm{i}b_2 = k_1 + \mathrm{i}k_2, \qquad c_1 + \mathrm{i}c_2 = m_1 + \mathrm{i}m_2$$

решение системы (34). Тогда, как известно, функции (33) для $i = 2, 3$ принимают вид

$$\begin{aligned}
\beta_{21} &= \mathrm{e}^{(\nu + A_{11}) r_0 \tau}\,(l_1 \cos \mu r_0 \tau - l_2 \sin \mu r_0 \tau),\\
\beta_{22} &= \mathrm{e}^{(\nu + A_{22}) r_0 \tau}\,(k_1 \cos \mu r_0 \tau - k_2 \sin \mu r_0 \tau),\\
\beta_{23} &= \mathrm{e}^{(\nu + A_{33}) r_0 \tau}\,(m_1 \cos \mu r_0 \tau - m_2 \sin \mu r_0 \tau),\\
\beta_{31} &= \mathrm{e}^{(\nu + A_{11}) r_0 \tau}\,(l_2 \cos \mu r_0 \tau + l_1 \sin \mu r_0 \tau),\\
\beta_{32} &= \mathrm{e}^{(\nu + A_{22}) r_0 \tau}\,(k_2 \cos \mu r_0 \tau + k_1 \sin \mu r_0 \tau),\\
\beta_{33} &= \mathrm{e}^{(\nu + A_{33}) r_0 \tau}\,(m_2 \cos \mu r_0 \tau + m_1 \sin \mu r_0 \tau).
\end{aligned}$$

Следовательно, учитывая, что $T = r_0\tau$, то $k(\tau)\, C^{-1}(T)\, U =$

$$= \begin{pmatrix} C_{11}\, e^{(\nu+A_{11})T} & C_{12}\, e^{(\nu+A_{22})T} & C_{13}\, e^{(\nu+A_{33})T} \\ e^{(\nu+A_{11})T}(l_1\cos\mu T - l_2\sin\mu T) & e^{(\nu+A_{22})T}(k_1\cos\mu T - k_2\sin\mu T) & e^{(\nu+A_{33})T}(m_1\cos\mu T - m_1\sin\mu T) \\ e^{(\nu+A_{11})T}(l_2\cos\mu T + l_1\sin\mu T) & e^{(\nu+A_{22})T}(k_2\cos\mu T + k_1\sin\mu T) & e^{(\nu+A_{33})T}(m_2\cos\mu T + m_1\sin\mu T) \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} e^{-A_{11}T} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-A_{22}T} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-A_{33}T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

Положим

$$\varphi_1 = \varphi_1(X,\ Y,\ Z) = l_1X + k_1Y + m_1Z,$$

$$\varphi_2 = \varphi_2(X,\ Y,\ Z) = l_2X + k_2Y + m_2Z.$$

Согласно теореме 3.5 $F_i\{T,\ U\} = f_i^1(T,\ k(\tau)\, C^{-1}(T)\, U) =$

$$= f_i^1[T,\ (C_{11}X + C_{12}Y + C_{13}Z)\, e^{\lambda_1 T},$$

$$(\varphi_1\cos\mu T - \varphi_2\sin\mu T)\, e^{\nu T},$$

$$(\varphi_2\cos\mu T - \varphi_1\sin\mu T)\, e^{\nu T}] = C_i$$

есть первый интеграл системы (A). Если в качестве f_i^1, $i = 1,\ 2,\ 3$ взять независимые первые интегралы (1), тогда получим три независимые первые интегралы системы (A)

$$\begin{aligned} F_1(T,\ X,\ Y,\ Z) &= (C_{11}X + C_{12}Y + C_{13}Z)\, e^{\left(\lambda_1 - \frac{1}{r_0}\right)T} = C_1, \\ F_2(T,\ X,\ Y,\ Z) &= (\varphi_1\cos\mu T - \varphi_2\sin\mu T)\, e^{\left(\nu - \frac{1}{r_0}\right)T} = C_2, \\ F_3(T,\ X,\ Y,\ Z) &= (\varphi_2\cos\mu T + \varphi_1\sin\mu T)\, e^{\left(\nu - \frac{1}{r_0}\right)T} = C_3. \end{aligned} \tag{35}$$

Очевидно, что первый интеграл

$$F_4(T,\ X,\ Y,\ Z) = F_2^2 + F_3^2 = (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)\, e^{2\left(\nu - \frac{1}{r_0}\right)T} = C_2^2 + C_3^2 = C_4 \geqq 0,$$

не зависимый от $F_1(T,\ X,\ Y,\ Z)$. Заметим, что

$$F_2(T, X, Y, Z) = \sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}\left(\frac{\varphi_1}{\sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}}\cos\mu T - \frac{\varphi_2}{\sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}}\sin\mu T\right) e^{\left(\nu - \frac{1}{r_0}\right)T} =$$

$$= (\cos\varphi\cos\mu T - \sin\varphi\sin\mu T)\sqrt{C_4} = \sqrt{C_4}\cos(\varphi + \mu T) = C_2,$$

$$F_3(T, X, Y, Z) = \sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}\left(\frac{\varphi_2}{\sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}}\cos\mu T + \frac{\varphi_1}{\sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}}\sin\mu T\right) e^{\left(\nu - \frac{1}{r_0}\right)T} =$$

$$= \sqrt{C_4}\sin(\varphi + \mu T) = C_3,$$

где

$$\cos\varphi = \frac{\varphi_2}{\sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{\varphi_1}{\sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{\mu}\operatorname{arctg}\frac{F_3}{F_2} = \frac{1}{\mu}\varphi + T = \frac{1}{\mu}\operatorname{arctg}\frac{C_3}{C_2}.$$

Так как $\operatorname{tg}\varphi = \varphi_1 : \varphi_2$, то $\varphi = \operatorname{arctg}(\varphi_1 : \varphi_2)$ и, следовательно,

$$F\left(\frac{F_3}{F_2}\right) = \frac{1}{\mu}\operatorname{arctg}\frac{\varphi_1}{\varphi_2} + T = \psi(X; Y, Z) + T = K = \frac{1}{\mu}\operatorname{arctg}\frac{C_3}{C_2}.$$

Предположим, что $\lambda_1 \neq (1 : r_0) \neq \nu$, тогда можно доказать, что

$$\begin{aligned} \Phi_1(X, Y, Z) &= F_1[K - \psi(X, Y, Z), X, Y, Z] = \\ &= (C_{11}X + C_{12}Y + C_{13}Z)\exp\frac{1-\lambda_1 r_0}{\mu r_0}\operatorname{arctg}\frac{l_1X + k_1Y + m_1Z}{l_2X + k_2Y + m_2Z} = K_1, \\ \Phi_2(X, Y, Z) &= F_4[K - \psi(X, Y, Z), X, Y, Z] = \\ &= [(l_1X + k_1Y + m_1Z)^2 + \\ &\quad + (l_2X + k_2Y + m_2Z)^2]\exp 2\frac{1-\nu r_0}{\mu r_0}\operatorname{arctg}\frac{l_1X + k_1Y + m_1Z}{l_2X + k_2Y + m_2Z} = K_2 \end{aligned} \tag{36}$$

являются фундаментальными интегралами уравнения (I).

Заметим, что выражения (36) сохраняют смысл и для $\lambda_1, \nu = 1 : r_0$. Как видно, приведенные фундаментальные интегралы (36), имеют вид (32). Этим теорема доказана.

Литература

[1] *Травничек С.:* О преобразованиях решений систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка, Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. F. R. N., Tom 18.

[2] *Палат И.:* О преобразованиях решений двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, Acta Universitatis Palackianae Olomucensis, F. R. N., Tom 21.

[3] *Степанов В. В.:* Курс дифференциальных уравнений, Москва 1958.

[4] *Трикоми Ф.:* Лекции по уравнениям в частных производных, русское издание, Москва 1957.

Shrnutí

Řešení jisté kvazilineární parciální diferenciální rovnice prvního řádu

JINDŘICH PALÁT

V této práci se odvozuje vzorec pro obecné řešení parciální diferenciální rovnice (I). K tomu se využívá vzájemné transformace prvých integrálů rovnic (I) a (II) na sebe.

Zusammenfassung

Über die Lösung einer gewissen quasilinearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

JINDŘICH PALÁT

In der Arbeit wird eine Formel für die allgemeine Lösung der Gleichung (I) abgeleitet. Zu diesem Zweck benützt man die Transformation erster Integrale der Gleichungen (I) und (II) in sich.