1965 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS.
FAKULTAS RERUM NATURALIUM. TOM 18.

Katedra matematické analýzy přírodovědecké fakulty.
Vedoucí katedry: Z. prof. RNDr. Miroslav Laitoch, kandidát věd.

О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

СТАНИСЛАВ ТРАВНИЧЕК

(Поступило в редакцию 25. 5. 1964 г.)

Автор во своей работе [3] занимался решением вопроса о преобразованиях решений $u(t)$, $U(T)$ систем двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка в виде $u(t) = K(t)\, U[Z(t)]$. Основную мысль этих рассуждений можно применить и в случае систем n линейных дифференциальных уравнений первого порядка, как показано в настоящей работе. В работе дальше рассматривается специальный случай систем трёх уравнений и исследуется использование функции Флоке [1] для определения вида фундаментальной системы решений системы трёх уравнений.

1. Мы будем заниматься системами n линейных дифференциальных уравнений 1-ого порядка вида

$$(a_n) \qquad y' = M(t)\, y \qquad\qquad \dot{Y} = N(T)\, Y \qquad (A_n)$$

где

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}, \qquad Y(T) = \begin{pmatrix} Y_1(T) \\ \vdots \\ Y_n(T) \end{pmatrix},$$

$M(t)$, $N(T)$ квадратные матрицы функций $a_{ik}(t)$, $A_{ik}(T)$ (это элементы из i-той строки и k-того стобца), $i = 1, 2, \ldots, n$; $k = 1, 2, \ldots, n$, и где штрихом обозначаются производные по отношению к t, и точкой производные по отношению к T. Предположим, что $a_{ik}(t)$ непрерывны в интервале j и $A_{ik}(T)$ непрерывны в интервале J и что в этих интервалах определены решения системы (a_n) и (A_n) начальными условиями: для $t_0 \in j$, $T_0 \in J$ имеет место

$$(a^*) \qquad y(t_0) = y_0 \qquad\qquad Y(T_0) = Y_0 \qquad (A^*)$$

где

$$y_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{pmatrix}, \qquad Y_0 = \begin{pmatrix} Y_{10} \\ \vdots \\ Y_{n0} \end{pmatrix},$$

y_{i0}, Y_{i0} $(i = 1, 2, \ldots, n)$ произвольные числа.

Лемма 1: Пусть имеется система n^2 дифференциальных уравнений

$$\alpha'_{ik}(t) = \sum_{j=1}^{n} [a_{ij}(t)\,\alpha_{jk}(t) - A_{jk}[Z(t)]\,Z'(t)\,\alpha_{ij}(t)] \tag{1}$$

$i, k = 1, 2, \ldots, n$. Пусть при этом $Z(t)$ функция, которая отображает интервал (или отрезок) $i \subset j$ на интервал (или отрезок) $I \subset J$, данную внутреннюю точку $t_0 \in i$ отображает на данную внутреннюю точку $T_0 \in I$, функция $Z'(t)$ непрерывна для $t \in i$. Пусть α°_{ik} произвольные постоянные. Тогда для данной функции $Z(t)$ в интервале i существуют и определены однозначно функции $\alpha_{ik}(t)$ начальными условиями $\alpha_{ik}(t_0) = \alpha^{\circ}_{ik}$ как решения системы (1).

Доказательство: При данных предположениях удовлетворяются тоже предположения теоремы о существовании и однозначности решений систем дифференциальных уравнений (см. [6], гл. I, § 3, п. 1 и 4) откуда и вытекает верность леммы 1.

Ведем обозначение

$$K(t) = \begin{pmatrix} \alpha_{11}(t) & \ldots & \alpha_{1n}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1}(t) & \ldots & \alpha_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad K_0 = \begin{pmatrix} \alpha^0_{11} & \ldots & \alpha^0_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha^0_{n1} & \ldots & \alpha^0_{nn} \end{pmatrix}.$$

По лемме 1 существует и определено однозначно начальными условиями $K(t_0) = K_0$ решение $K(t)$ матричного уравнения

$$K'(t) = M(t)\,K(t) - K(t)\,N[Z(t)]\,Z'(t) \tag{1'}$$

и в этом виде мы будем использовать систему (1).

Для следующих теорем о преобразованиях решений систем дифференциальных уравнений имеют место предположения:

а) $U(T)$ является решением системы (A_n) определеным в интервале J начальными условиями $U(T_0) = U_0$, где $T_0 \in J$.

б) Функция $Z(t)$ имеет производную $Z'(t)$ и отображает интервал $i \subset j$ на интервал $I \subset J$ и имеет место $Z(t_0) = T_0$ $(t_0 \in i)$.

в) Функции $\alpha_{ik}(t)$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ определены в интервале i и имеют в этом интервале производную первого порядка.

Теорема 1,1: Если функции $\alpha_{ik}(t)$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$, $Z(t)$ удовлетворяют в интервале i системе (1), то $u(t)$ определенное уравнением

$$u(t) = K(t)\,U[Z(t)] \tag{2}$$

решение системы (a_n), определенное начальными условиями $u(t_0) = K_0 U_0$.

Доказательство: Имеет место

$$u'(t) = K'(t)\,U[Z(t)] + K(t)\,\dot{U}[Z(t)]\,Z'(t) = \{K'(t) + K(t)N[Z(t)]\,Z'(t)\}\,U[Z(t)].$$

По (1′) имеем

$$u'(t) = M(t)\,K(t)\,U[Z(t)] = M(t)\,u(t)$$

т. е. $u(t)$ определенное уравнением (2) удовлетворяет системе (a_n). Из уравнения (2) в точке $t = t_0$ следует $u(t_0) = K_0 U_0$, ч. т. д.

Замечание 1: Из уравнения (2) очевидно, что преобразование из теоремы 1,1 линейное, в частности линейно зависимые решения преобразуются в линейно зависимые.

Лемма 2: Пусть P, Q квадратные матрицы функций, и U произвольное решение системы (A_n) и пусть $PU = QU$. Тогда $P = Q$.

Доказательство: Обозначим через $R_i(U)$ квадратную матрицу, у которой в i-том столбце находятся компоненты решения U и остальные элементы которой равны 0. Из равенства $PU = QU$ вытекает равенство

$$PR_i(U) = QR_i(U) \tag{*}$$

для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть U_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ фундаментальная система решений. Тогда $W \neq 0$. Суммируя n равенств (*) получим

$$\sum_{i=1}^{n} PR_i(U_i) = \sum_{i=1}^{n} QR_i(U_i),$$

$$P\sum_{i=1}^{n} R_i(U_i) = Q\sum_{i=1}^{n} R_i(U_i). \tag{**}$$

Матрица $R = \sum_{i=1}^{n} R_i(U_i)$ регулярная, так как $|R| = W$. Если равенство (**) умножить справа на R^{-1}, то получаем утверждение леммы.

Теорема 1, 2: Пусть для любого решения $U(T)$ системы (A_n) существует решение $u(t)$ системы (a_n), так что удовлетворяется уравнение (2). Тогда функции $\alpha_{ik}(t)$, $Z(t)$ являются решением системы (1). Если начальные условия решения $u(t)$ имеют вид $u(t_0) = u_0$, то матрица K_0 начальных условий функций $\alpha_{ik}(t)$ удовлетворяет условию $u_0 = K_0U_0$.

Доказательство: Так как $u(t)$ удовлетворяет уравнению (2) и системе (a_n), то имеет место

$$u'(t) = \{K'(t) + K(t)\, N[Z(t)]\, Z'(t)\}\, U[Z(t)]$$

и также

$$u'(t) = M(t)\, K(t)\, U[Z(t)].$$

Сравнивая правые части, получаем по лемме 2 уравнение (1'). Положение теоремы о начальных условиях очевидно.

Лемма 3: Пусть квадратная матрица $X(t)$ удовлетворяет в интервале i матричному уравнению

$$X'(t) = A(t)\, X(t) + X(t)\, B(t),$$

где $A(t)$, $B(t)$ квадратные матрицы непрерывных функций $a_{ik}(t)$, $b_{ik}(t)$. Тогда

$$|X(t)| = |X(t_0)| \exp\int_{t_0}^{t} \left\{\sum_{j=1}^{n} [a_{jj}(\tau) + b_{jj}(\tau)]\right\} \mathrm{d}\tau,$$

где $|X(t)|$ определитель матрицы $X(t)$.

Доказательство: Для сжатости мы будем здесь пропускать обозначение переменной t. Мы применим метод, приведенный в [5], гл. I, теорема 2. Продифференцируя $|X|$ по строкам, мы получаем $|X|' = \sum_{j=1}^{n} L_j$, где L_j определитель возникший из $|X|$, если вместо x_{jk} $(k = 1, 2, \ldots, n)$ взять $\sum_{i=1}^{n}(a_{ji}x_{ik} + b_{ik}x_{ji})$. Всякий из определителей L_j мы разделяем на два $L_j = \bar{L}_j + L_j$ так, что в $\bar{L}_j$ в j-той строке на k-том месте $(k = 1, 2, \ldots, n)$ будет $\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_{ik}$ и в L_j будет на соответствующем месте $\sum_{i=1}^{n} b_{ik}x_{ji}$.

В определителе $\bar{L}_j$, мы прибавляем к j-той строке i-тую строку $(i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n, i \neq j)$, умноженную на $-a_{ji}$. Тогда в j-той строке на k-том месте $(k = 1, 2, \ldots, n)$ имеем $\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_{ik} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{ji}x_{ik} = a_{jj}x_{jk}$. Из этого вытекает, что $\bar{L}_j = a_{jj}|X|$ и наконец $\sum_{j=1}^{n} \bar{L}_j = |X| \sum_{j=1}^{n} a_{jj}$.

Обозначим сейчас M_{ik} алгебраическое дополнение элемента x_{ik} определителя $|X|$, так что

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}M_{ik} = \begin{cases} |X| & \text{для } j = k \\ 0 & \text{для } j \neq k \end{cases}.$$

Разложим определитель L_i (это определитель L_j удобнее обозначенный для следующих рассматрений) по элементам его i-той строки

$$L_i = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{jk}x_{ij}M_{ik}.$$

Суммируя для $i = 1, 2, \ldots, n$ мы получаем

$$\sum_{i=1}^{n} L_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{jk}x_{ij}M_{ik}.$$

Пусть $j = k$. Тогда

$$\sum_{\substack{i=1 \\ j=k}}^{n} L_i = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{jj}x_{ij}M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_{jj} \sum_{i=1}^{n} x_{ij}M_{ij} = |X| \sum_{j=1}^{n} b_{jj}.$$

Пусть $j \neq k$. Тогда

$$\sum_{\substack{i=1 \\ j\neq k}}^{n} L_i = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{jk} \sum_{i=1}^{n} x_{ij}M_{ik} = 0.$$

Итак $|X|' = |X| \sum_{j=1}^{n} (a_{jj} + b_{jj})$. Интегрируя от t_0 до t мы получаем утверждение леммы.

Лемма 4: Пусть $\alpha_{ik}(t)$, $Z(t)$ удовлетворяют системе (1). Тогда

$$| K(t) | = | K(t_0) | \exp \int_{t_0}^{t} \{ \sum_{j=1}^{n} [a_{jj}(\tau) - A_{jj}[Z(\tau)] Z'(\tau)]\} \mathrm{d}\tau.$$

Доказательство очевидно, так как эта лемма есть прямое следствие леммы 3.

Замечание 2: При удобных начальных условиях имеет место $| K(t_0) | \neq 0$, т. е. $| K(t) | \neq 0$ для всех $t \in i$. Если в системе (a_n) перейти путём подстановки $y_j = x_j \exp \int_{t_0}^{t} a_{jj}(\tau) \mathrm{d}\tau$ к новым неизвестным функциям x_j, то получаем такую систему (a_n'), что в главной диагонали соответствующей матрицы $M(t)$ уже все элементы тождественно равны нулью. Поэтому для систем вида (a_n'), (A_n') имеет место $| K(t) | = konst$ и при подходящих начальных условиях мы имеем $| K(t) | = | K(t_0) | \neq 0$.

Пусть теперь функция $Z(t)$ имеет в интервале i непрерывную производную, отличную от нуля. Тогда существует функция $\zeta(T)$, обратная относительно функции $Z(t)$, которая отображает интервал $I \subset J$ на интервал $i \subset j$, внутреннюю точку $T_0 \in I$ на внутреннюю точку $t_0 \in i$ и имеет в I непрерывную производную $\dot{\zeta}(T)$ отличную от нуля, и имеет место $\dot{\zeta}(T)\ Z'(t) = 1$ (t, T соответствующие точки, т. е. $Z(t) = T$). Пусть еще при $t_0 \in i$ имеем $| K(t_0) | \neq 0$. Тогда и существует матрица $K^{-1}(t)$, обратная к матрице $K(t)$.

Теорема 1, 3: Решение $U(T)$ системы (A_n), рассматриваемое в теореме 1,1, удовлетворяет в интервале I по отношению к решению $u(t)$ системы (a_n) обратному соотношению

$$U(T) = K^{-1}[\zeta(T)]\ u[\zeta(T)],$$

где $K^{-1}(t)$ — матрица обратная по отношению к $K(t)$ и $\zeta(T)$ функция обратная относительно $Z(t)$. (Тогда решение $U(T)$ удовлетворяет начальным условиям $U(T_0) = U_0$.)

Доказательство: По теореме 1,1 можно провести следующее рассуждение: Пусть $u(t)$ является решением системы (a_n), определенным в интервале j начальными условиями $u(t_0) = u_0 (= K_0 U_0)$ и пусть $\zeta(T)$ есть функция, отображающая интервал $I \subset J$ на интервал $i \subset j$ и имеет место $\zeta(T_0) = t_0\ (= \zeta_0)$, $t_0 \in i$, $T_0 \in I$. [Этими свойствами обладает функция $\zeta(T)$, обратная по отношению к $Z(t)$]. Пусть еще функции $\bar{\alpha}_{ik}(T)$ удовлетворяют системе n^2 уравнений

$$\dot{\bar{\alpha}}_{ik}(T) = \sum_{j=1}^{n} [A_{ij}(T)\ \bar{\alpha}_{jk}(T) - a_{jk}[\zeta(T)]\ \dot{\zeta}(T)\ \bar{\alpha}_{ij}(T)] \qquad (\bar{1})$$

($i, k = 1, 2, \ldots, n$). Тогда $\bar{U}(T)$ определенное соотношением

$$\bar{U}(T) = \bar{K}(T)\ u[\zeta(T)],$$

где $\bar{K}(T)$ матрица, элементами которой служат функции $\bar{\alpha}_{ik}(T)$, есть решение системы (A_n), определенное начальными условиями $\bar{U}(T_0) = \bar{K}(T_0)\ u_0$.

Условие $(\bar{1})$ можно представить в матричном виде, следовательно матрица $\bar{K}(T)$ должна быть решением матричного уравнения

$$\dot{\bar{K}}(T) = N(T)\,\bar{K}(T) - \bar{K}(T)\,M[\zeta(T)]\,\dot{\zeta}(T). \qquad (\bar{1}')$$

Требуется доказать, что матрица $K^{-1}[\zeta(T)]$, где функция $\zeta(T)$ обратная относительно функции $Z(t)$, удовлетворяет уравнению $(\bar{1}')$.
По [5], гл. I,2 имеем

$$[K^{-1}(t)]' = -K^{-1}(t)\,K'(t)\,K^{-1}(t),$$

из этого вытекает

$$\{K^{-1}[\zeta(T)]\}^{\cdot} = -K^{-1}[\zeta(T)]\,K'[\zeta(T)]\,K^{-1}[\zeta(T)]\,\dot{\zeta}(T) =$$

$$= -K^{-1}[\zeta(T)]\,\{M[\zeta(T)]\,K[\zeta(T)] - K[\zeta(T)]\,N(T)\,\frac{1}{\dot{\zeta}(T)}\}K^{-1}[\zeta(T)]\,\dot{\zeta}(T) =$$

$$= N(T)\,K^{-1}[\zeta(T)] - K^{-1}[\zeta(T)]\,M[\zeta(T)]\,\dot{\zeta}(T)$$

и уравнение $(\bar{1}')$ удовлетворено. Остается доказать, что решение $\bar{U}(T)$ системы (A_n) тождественно с решением $U(T)$, это значит, что оно удовлетворяет в I тем же начальным условиям. Но

$$\bar{U}(T_0) = K^{-1}(\zeta_0)\,u_0 = K^{-1}(\zeta_0)\,K(t_0)\,U_0 = U_0, \text{ ч. т. д.}$$

Замечание 3: Если предположения теоремы 1,3 удовлетворены, то линейно независимые решения преобразуются по теореме 1,1 в линейно независимые. (Если бы они преобразовались в линейно зависимые, то по замечанию 1 мы получили бы при обратном преобразовании линейно зависимые решения, что противоречит предположению.)

Лемма 5: Пусть фундаментальная система $U^{(j)}(T)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, решений системы (A_n) преобразуется в фундаментальную систему $u^{(j)}(t)$ решений системы (a_n), так что

$$u^{(j)}(t) = K(t)\,U^{(j)}[Z(t)]. \qquad (*)$$

Тогда $K(t) = \omega(t)\,\Omega^{-1}[Z(t)]$, где

$$\omega(t) = \begin{pmatrix} u_1^{(1)}(t) & \ldots & u_1^{(n)}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_n^{(1)}(t) & \ldots & u_n^{(n)}(t) \end{pmatrix}, \qquad \Omega(T) = \begin{pmatrix} U_1^{(1)}(T) & \ldots & U_1^{(n)}(T) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ U_n^{(1)}(T) & \ldots & U_n^{(n)}(T) \end{pmatrix}.$$

Доказательство: Равенство (*) можно представить в виде

$$R_i[u^{(j)}(t)] = K(t)\,R_i\{U^{(j)}[Z(t)]\}$$

(см. лемму 2). Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} R_i[u^{(i)}(t)] = K(t)\sum_{i=1}^{n} R_i\{U^{(i)}[Z(t)]\},$$

так что $\omega(t) = K(t)\,\Omega[Z(t)]$.

Так как $\Omega(T)$ регулярная, утверждение леммы вытекает из умножения последнего уравнения справа на матрицу $\Omega^{-1}[Z(t)]$.

Замечание 4: Из леммы 5 вытекает, что для элементов матрицы $K(t)$ имеет место

$$\alpha_{ik}(t) = \frac{W_{ki}[t, Z(t)]}{W[Z(t)]},$$

где $W(T) = |\Omega(T)|$ и определитель $W_{ki}(t, T)$ получаем из определителя $W(T)$ заменой k-той строки матрицы $\Omega(T)$ i-той строкой матрицы $\omega(t)$.

Предположим теперь, что система (A_n) тождественна с системой (a_n). Функция $Z(t)$ пусть отображает интервал $i \subset j$ на интервал $I \subset j$, данную внутреннюю точку $t_0 \in i$ на внутреннюю точку $Z_0 \in I$. Мы имеем систему

$$\alpha'_{ik}(t) = \sum_{j=1}^{n} [a_{ij}(t)\,\alpha_{jk}(t) - a_{jk}[Z(t)]\,Z'(t)\,\alpha_{ij}(t)] \tag{3}$$

или в матричном виде

$$K'(t) = M(t)\,K(t) - K(t)\,M[Z(t)]\,Z'(t). \tag{3'}$$

Если $Z'(t)$ непрерывна в i и α^0_{ik} произвольные постоянные, то из леммы 1 следует, что для данной функции $Z(t)$ в интервале i существуют и однозначно определены функции $\alpha_{ik}(t)$ начальными условиями $\alpha_{ik}(t_0) = \alpha^0_{ik}$ как решения системы (3). Из этого следует, что существует и однозначно определено начальными условиями $K(t_0) = K_0$ решение $K(t)$ матричного уравнения (3′).

Заметим, что теперь все теоремы, леммы 4,5 и замечания 2, 3, 4 имеют место и в том случае, если система (A_n) тождественна с системой (a_n), но их новой формулировкой мы не будем заниматься. В частности, если преобразование решений системы (a_n) удовлетворяет теореме 1,3, то получаем регулярное линейное преобразование пространства решений системы (a_n) на себя.

2. В этом абзаце мы будем рассматривать случай трёх уравнений, частные случаи общего преобразования и их связь с [2]. С начала выберем подходящий канонический вид системы трёх уравнений:

$$(\bar{a}_3) \qquad x' = \bar{M}(t)\,x \qquad\qquad \dot{X} = \bar{N}(T)\,X, \qquad (\bar{A}_3)$$

где

$$\bar{M}(t) = \begin{pmatrix} 0 & a(t) & 0 \\ b(t) & 0 & c(t) \\ d(t) & e(t) & 0 \end{pmatrix}, \qquad \bar{N}(T) = \begin{pmatrix} 0 & A(T) & 0 \\ B(T) & 0 & C(T) \\ D(T) & E(T) & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим достаточные условия, при которых можно систему (a_3) привести к виду $(\bar{a}_3)$.

а) Пусть $a_{13}(t) \equiv 0$. Тогда получим вид $(\bar{a}_3)$ подстановкой

$$y_i(t) = e^{\int a_{ii}(t)dt} x_i(t).$$

б) Пусть $a_{13}(t) \neq 0$ в интервале j. Заменяя компоненты y_2, y_3 мы можем предполагать, что $a_{12}(t) \neq 0$ в интервале j. Пусть существуют непрерывные производные $a'_{12}(t)$, $a'_{13}(t)$. Тогда получим $(\bar{a}_3)$ подстановкой

$$
\begin{aligned}
y_1(t) &= e^{\int a_{11}(t)\mathrm{d}t} x_1(t) \\
y_2(t) &= e^{\int \left[a_{22}(t) + \frac{a_{13}(t)a_{32}(t)}{a_{12}(t)}\right] \mathrm{d}t} x_2(t) - \frac{a_{13}(t)}{a_{12}(t)} e^{\int \left[a_{33}(t) - \frac{a_{13}(t)a_{32}(t)}{a_{12}(t)}\right] \mathrm{d}t} x_3(t) \\
y_3(t) &= e^{\int \left[a_{33}(t) - \frac{a_{13}(t)a_{32}(t)}{a_{12}(t)}\right] \mathrm{d}t} x_3(t).
\end{aligned}
$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что элементы матриц $\bar{M}(t)$, $\bar{N}(T)$ непрерывны в интервалах j, J и что в этих интервалах решения систем (a_3), (A_3) определены однозначно начальными условиями вида (a^*), (A^*).

Чтобы упростить следующую запись, обозначим

$$
K(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t) & \alpha_2(t) & \alpha_3(t) \\ \beta_1(t) & \beta_2(t) & \beta_3(t) \\ \gamma_1(t) & \gamma_2(t) & \gamma_3(t) \end{pmatrix}, \quad K_0 = \begin{pmatrix} \alpha_{10} & \alpha_{20} & \alpha_{30} \\ \beta_{10} & \beta_{20} & \beta_{30} \\ \gamma_{10} & \gamma_{20} & \gamma_{30} \end{pmatrix}.
$$

Систему (1) можно теперь выразить следующим образом

$$
\left.
\begin{aligned}
\alpha_1'(t) &= -B[Z(t)]\, Z'(t)\, \alpha_2(t) - D[Z(t)]\, Z'(t)\, \alpha_3(t) + a(t)\, \beta_1(t) \\
\alpha_2'(t) &= -A[Z(t)]\, Z'(t)\, \alpha_1(t) - E[Z(t)]\, Z'(t)\, \alpha_3(t) + a(t)\, \beta_2(t) \\
\alpha_3'(t) &= -C[Z(t)]\, Z'(t)\, \alpha_2(t) + a(t)\, \beta_3(t) \\
\beta_1'(t) &= -B[Z(t)]\, Z'(t)\, \beta_2(t) - D[Z(t)]\, Z'(t)\, \beta_3(t) + b(t)\, \alpha_1(t) + c(t)\, \gamma_1(t) \\
\beta_2'(t) &= -A[Z(t)]\, Z'(t)\, \beta_1(t) - E[Z(t)]\, Z'(t)\, \beta_3(t) + b(t)\, \alpha_2(t) + c(t)\, \gamma_2(t) \\
\beta_3'(t) &= -C[Z(t)]\, Z'(t)\, \beta_2(t) + b(t)\, \alpha_3(t) + c(t)\, \gamma_3(t) \\
\gamma_1'(t) &= -B[Z(t)]\, Z'(t)\, \gamma_2(t) - D[Z(t)]\, Z'(t)\, \gamma_3(t) + d(t)\, \alpha_1(t) + e(t)\, \beta_1(t) \\
\gamma_2'(t) &= -A[Z(t)]\, Z'(t)\, \gamma_1(t) - E[Z(t)]\, Z'(t)\, \gamma_3(t) + d(t)\, \alpha_2(t) + e(t)\, \beta_2(t) \\
\gamma_3'(t) &= -C[Z(t)]\, Z'(t)\, \gamma_2(t) + d(t)\, \alpha_3(t) + e(t)\, \beta_3(t)
\end{aligned}
\right\} \quad (4)
$$

Замечание 5: В системе (1), значит и в системе (4), имеем n^2 уравнений и $n^2 + 1$ неизвестных функций, итак можно одну из них избрать до некоторой степени произвольно. Очевидно, если избрать больше чем одну функцию, то получим специальное преобразование, которое выражает связь между решениями систем дифференциальных уравнений. Эти уравнения уже нет произвольные, но их коэффициенты должны удовлетворять каким-то условиям.

Будем рассматривать специальное преобразование, когда $\alpha_2(t) = \alpha_3(t) = 0$. Из третьего уравнения (4) вытекает, что для $a(t) \neq 0$ имеем тоже $\beta_3(t) = 0$. Матрица $K(t)$ в этом случае треугольная и система (4) имеет вид [функция $\alpha_1(t)$ обозначена через $\alpha(t)$]:

$$
\left.
\begin{aligned}
\alpha'(t) &= a(t)\, \beta_1(t) \\
0 &= -A[Z(t)]\, Z'(t)\, \alpha(t) + a(t)\, \beta_2(t) \\
\beta_1'(t) &= -B[Z(t)]\, Z'(t)\, \beta_2(t) + b(t)\, \alpha(t) + c(t)\, \gamma_1(t) \\
\beta_2'(t) &= -A[Z(t)]\, Z'(t)\, \beta_1(t) + c(t)\, \gamma_2(t) \\
0 &= -C[Z(t)]\, Z'(t)\, \beta_2(t) + c(t)\, \gamma_3(t) \\
\gamma_1'(t) &= -B[Z(t)]\, Z'(t)\, \gamma_2(t) - D[Z(t)]\, Z'(t)\, \gamma_3(t) + d(t)\, \alpha(t) + e(t)\, \beta_1(t) \\
\gamma_2'(t) &= -A[Z(t)]\, Z'(t)\, \gamma_1(t) - E[Z(t)]\, Z'(t)\, \gamma_3(t) + e(t)\, \beta_2(t) \\
\gamma_3'(t) &= -C[Z(t)]\, Z'(t)\, \gamma_2(t)
\end{aligned}
\right\} \quad (5)
$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что для $t \in j$, $T \in J$ имеет место $a(t) \neq 0$, $c(t) \neq 0$, $A(T) \neq 0$, $C(T) \neq 0$, что существуют их непрерывные производные до третьего порядка включительно и функции $b(t)$, $e(t)$, $B(T)$, $E(T)$ имеют непрерывные производные 1-ого порядка.

Будем рассматривать уравнения

$$\{Z, t\} + \frac{1}{2}\,\Omega[Z(t)]\,Z'^2(t) = \frac{1}{2}\,\omega(t) \qquad (\Omega, \omega)$$

$$\{\zeta, T\} + \frac{1}{2}\,\omega[\zeta(T)]\,\dot{\zeta}^2(T) = \frac{1}{2}\,\Omega(T), \qquad (\omega, \Omega)$$

где обозначено

$$\{Z, t\} = \frac{1}{2}\,\frac{Z'''(t)}{Z'(t)} - \frac{3}{4}\,\frac{Z''^2(t)}{Z'^2(t)}, \qquad \{\zeta, T\} = \frac{1}{2}\,\frac{\dddot{\zeta}(T)}{\dot{\zeta}(T)} - \frac{3}{4}\,\frac{\ddot{\zeta}^2(T)}{\dot{\zeta}^2(T)},$$

$$\Omega(T) = \frac{1}{2}\,\frac{\ddot{A}(T)}{A(T)} - \frac{2}{3}\,\frac{\dot{A}^2(T)}{A^2(T)} + \frac{1}{2}\,\frac{\ddot{C}(T)}{C(T)} - \frac{2}{3}\,\frac{\dot{C}^2(T)}{C^2(T)} - \frac{1}{6}\,\frac{\dot{A}(T)\,\dot{C}(T)}{A(T)\,C(T)} - \frac{1}{2}\,A(T)\,B(T) - \frac{1}{2}\,C(T)\,E(T),$$

$$\omega(t) = \frac{1}{2}\,\frac{a''(t)}{a(t)} - \frac{2}{3}\,\frac{a'^2(t)}{a^2(t)} + \frac{1}{2}\,\frac{c''(t)}{c(t)} - \frac{2}{3}\,\frac{c'^2(t)}{c^2(t)} - \frac{1}{6}\,\frac{a'(t)\,c'(t)}{a(t)\,c(t)} - \frac{1}{2}\,a(t)\,e(t) - \frac{1}{2}\,c(t)\,e(t).$$

Замечание 6: Функции $\omega(t)$, $\Omega(T)$ очевидно непрерывные и имеют тоже непрерывные производные в интервале j, J. Тогда по [2] существует интеграл $Z(t)$ уравнения (Ω, ω), который отображает интервал $i \subset j$ на интервал $I \subset J$, имеет производную 4-ого порядка и который определенный начальными условиями

$$Z(t_0) = Z_0,\; Z'(t_0) = Z_0'(\neq 0),\; Z''(t_0) = Z_0'', \qquad (Z^*)$$

где $t_0 \in j$, $Z_0 \in J$, $Z_0'(\neq 0)$, Z_0'' произвольные данные.

Введем еще обозначение

$$p(t) = -\frac{1}{3}\left[\frac{2a'(t)}{a(t)} + \frac{c'(t)}{c(t)}\right], \qquad P(T) = -\frac{1}{3}\left[\frac{2\dot{A}(T)}{A(T)} + \frac{\dot{C}(T)}{C(T)}\right]$$

$$q(t) = -\frac{1}{3}\left[3p(t)\,\frac{a'(t)}{a(t)} + \frac{a''(t)}{a(t)} + a(t)\,b(t) + c(t)\,e(t)\right]$$

$$Q(T) = -\frac{1}{3}\left[3P(T)\,\frac{\dot{A}(T)}{A(T)} + \frac{\ddot{A}(T)}{A(T)} + A(T)\,B(T) + C(T)\,E(T)\right]$$

$$r(t) = \frac{c'(t)}{c(t)}\,a(t)\,b(t) - a(t)\,b'(t) - a(t)\,c(t)\,d(t)$$

$$R(T) = \frac{\dot{C}(T)}{C(T)}\,A(T)\,B(T) - A(T)\,\dot{B}(T) - A(T)\,C(T)\,D(T).$$

$$h(t) = \omega'(t) - r(t) + 3p(t)\,q(t) - 2p^3(t) + p''(t)$$
$$H(T) = \dot{\Omega}(T) - R(T) + 3P(T)\,Q(T) - 2P^3(T) + \ddot{P}(T)$$

Очевидно, что в интервале j, J функции $p(t)$, $P(T)$ имеют непрерывные производные до 2-ого порядка включительно, функции $q(t)$, $Q(T)$ имеют непрерывную производную 1-ого порядка и функции $r(t)$, $R(T)$ непрерывны. Мы видим, что тогда имеет место

$$\omega(t) = \frac{3}{2}\left[q(t) - p^2(t) - p'(t)\right], \quad \Omega(T) = \frac{3}{2}\left[Q(T) - P^2(T) - \dot{P}(T)\right]. \tag{6}$$

Теорема 2,1: Пусть $U(T)$ решение системы (A_3) определенное начальными условиями $U(T_0) = U_0$, коэффициенты систем $(\bar{a}_3)$, (A_3) удовлетворяют условиям

$$h(t) \equiv 0, \quad H(T) \equiv 0 \tag{7}$$

и пусть имеют место следующие формулы (8):

$$\alpha(t) = \sqrt[3]{\frac{a^2(t)\,c(t)}{A^2[Z(t)]\,C[Z(t)]}}\,\frac{1}{Z'(t)}$$

$$\beta_1(t) = \frac{1}{a(t)}\left\{P[Z(t)]\,Z'(t) - p(t) - \frac{Z''(t)}{Z'(t)}\right\}\sqrt[3]{\frac{a^2(t)\,c(t)}{A^2[Z(t)]\,C[Z(t)]}}\,\frac{1}{Z'(t)}$$

$$\beta_2(t) = \frac{A[Z(t)]}{a(t)}\sqrt[3]{\frac{a^2(t)\,c(t)}{A^2[Z(t)]\,C[Z(t)]}}$$

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) = {} & \frac{1}{a(t)\,c(t)}\Bigg(\{P^2[Z(t)] + \dot{P}[Z(t)] + \Omega[Z(t)] + A[Z(t)]\,B[Z(t)]\}\,Z'^2(t) + \\ & + p^2(t) - [p'(t) + \omega(t) + a(t)\,b(t)] - \frac{a'(t)}{a(t)}\left\{P[Z(t)]\,Z'(t) - p(t) - \frac{Z''(t)}{Z'(t)}\right\} - \\ & - \{P[Z(t)]\,Z'(t) - 2p(t)\}\,\frac{Z''(t)}{Z'(t)} - 2P[Z(t)]\,p(t)\,Z'(t) + \\ & + \frac{1}{2}\,\frac{Z''^2(t)}{Z'^2(t)}\Bigg)\sqrt[3]{\frac{a^2(t)\,c(t)}{A^2[Z(t)]\,C[Z(t)]}}\,\frac{1}{Z'(t)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_2(t) = {} & \frac{A[Z(t)]}{a(t)\,c(t)}\left\{\frac{\dot{A}[Z(t)]}{A[Z(t)]}\,Z'(t) + 2P[Z(t)]\,Z'(t) - \frac{a'(t)}{a(t)} - 2p(t) - \right. \\ & \left. - \frac{Z''(t)}{Z'(t)}\right\}\sqrt[3]{\frac{a^2(t)\,c(t)}{A^2[Z(t)]\,C[Z(t)]}}\end{aligned}$$

$$\gamma_3(t) = \frac{A[Z(t)]\,C[Z(t)]}{a(t)\,c(t)}\sqrt[3]{\frac{a^2(t)\,c(t)}{A^2[Z(t)]\,C[Z(t)]}}\,Z'(t),$$

где $Z(t)$ является решением уравнения (Ω, ω), определенным начальными условиями (Z^*). Тогда существует интервал $i \subset j$, в котором $u(t)$ определено уравнением

$$u(t) = K_0(t)\,U[Z(t)] \tag{9}$$

где

$$K_0(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) & 0 & 0 \\ \beta_1(t) & \beta_2(t) & 0 \\ \gamma_1(t) & \gamma_2(t) & \gamma_3(t) \end{pmatrix}$$

есть решение системы $(\bar{a}_3)$, определенное начальными условиями $u(t_0) = K_0(t_0)\, U_0$.

Доказательство: Простой подстановкой убедимся, что элементы матрицы $K_0(t)$ определенные формулами (8) вместе с решением уравнения (Ω, ω) удовлетворяют системе (5). Тогда утверждение теоремы вытекает из замечания 6 и теоремы 1,1.

Теорема 2,2: Пусть для любого решения $U(T)$ системы (A_3), существует решение $u(t)$ системы $(\bar{a}_3)$, так что имеет место (9), Z_0, $Z'_0 \neq 0$, Z''_0 произвольные постоянные и системы $(\bar{a}_3)$, (A_3) удовлетворяют условиям (7). Тогда элементы матрицы $K_0(t)$ определены с точностью до постоянного множителя формулами (8) и фукнция $Z(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (Ω, ω). Можем взять то решение уравнения (Ω, ω), которое определено начальными условиями (Z^*). Если $u(t)$ $[U(T)]$ определено начальными условиями $u(t_0) = u_0$ $[U(T_0) = U_0]$, то матрица K_{00} начальных условий для $K_0(t)$ должна удовлетворять условию $u_0 = K_{00} U_0$.

Доказательство: По теореме 1,2 элементы матрицы $K_0(t)$ должны удовлетворять системе (5). Для большей сжатости мы в этом доказательстве будем пропускать обозначение переменной t.

Из 1-ого уравнения (5) получаем

$$\beta_1 = \frac{1}{a}\,\alpha', \tag{10}$$

из 2-ого

$$\beta_2 = \frac{A(Z)}{a}\, Z'\alpha, \tag{11}$$

из 5-ого $\gamma_3 = \dfrac{C(Z)}{c}\, Z'\beta_2$ и по (11) получаем

$$\gamma_3 = \frac{A(Z)\, C(Z)}{ac}\, Z'^2\alpha. \tag{12}$$

Из 4-ого уравнения (5) получаем $\gamma_2 = \dfrac{\beta_2' + A(Z)Z'\beta_1}{c}$ и из этого по (10), (11)

$$\gamma_2 = \frac{1}{c}\left\{\left[\frac{A(Z)}{a}\, Z'\right]'\alpha + \frac{2A(Z)}{a}\, Z'\alpha'\right\}. \tag{13}$$

Из 8-ого уравнения получаем

$$\gamma_2 = -\frac{1}{C(Z)\, Z'}\left\{\left[\frac{A(Z)\, C(Z)}{ac}\, Z'^2\right]'\alpha + \frac{A(Z)\, C(Z)}{ac}\, Z'^2\alpha'\right\}. \tag{14}$$

Сравнивая правые части уравнений (13), (14) получаем

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{1}{3}\left[\frac{2a'}{a} + \frac{c'}{c} - \frac{2\dot{A}(Z)\, Z'}{A(Z)} - \frac{\dot{C}(Z)\, Z'}{C(Z)} - 3\,\frac{Z''}{Z'}\right]$$

и из этого

$$\alpha = k\sqrt[3]{\frac{a^2 c}{A^2(Z)\,C(Z)}\,\frac{1}{Z'}},$$

где k произвольная постоянная. Если взять $k = 1$, то получаем первую формулу (8). Тогда имеем $\alpha' = \left[P(Z)\,Z' - p - \frac{Z''}{Z'}\right]\alpha$.
Из уравнений (10), (11), (12), (13) теперь получим формулы (8) для функций β_1, β_2, γ_3, γ_2. Функцию γ_1 получим из третьего уравнения (5). Если подставить функции β_2, γ_1, γ_2, γ_3 в седьмое уравнение (5), то получим, что функция $Z(t)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению (Ω, ω). Подставляя полученные формулы в шестое уравнение (5), мы получим уравнение $H(Z)Z'^3 = h$, которое удовлетворено ввиду (7). Утверждение теоремы о начальных условиях вытекает из замечания 6 и теоремы 1,2.

Замечание 7: Очевидно $|\,K_0(t)\,| = k^3$ и для формул (8) $|\,K_0(t)\,| = 1$.

Замечание 8: По [2] относительно решения $Z(t)$ уравнения (Ω, ω) существует обратная функция $\zeta(T)$, которая является решением уравнения (ω, Ω). Связь между производными функций $Z(t)$, $\zeta(T)$ выражается формулами (τ) [2].

Теорема 2,3: Решение $U(T)$ системы (A_3), рассматриваемое в теореме 2,1, удовлетворяет в интервале I по отношению к решению $u(t)$ системы $(\bar{a}_3)$ обратному соотношению

$$U(T) = K_0(T)\,u[\zeta(T)],$$

где $\zeta(T)$ является решением уравнения (ω, Ω) и

$$K_0(T) = \begin{pmatrix} \alpha(T) & 0 & 0 \\ \beta_1(T) & \beta_2(T) & 0 \\ \bar{\gamma}_1(T) & \bar{\gamma}_2(T) & \gamma_3(T) \end{pmatrix},$$

и элементы этой матрицы удовлетворяют следующим формулам $(\bar{8})$:

$$\alpha(T) = \sqrt[3]{\frac{A^2(T)\,C(T)}{a^2[\zeta(T)]\,c[\zeta(T)]}\,\frac{1}{\dot{\zeta}(T)}}$$

$$\beta_1(T) = \frac{1}{A(T)}\left\{p[\zeta(T)]\,\dot{\zeta}(T) - P(T) - \frac{\ddot{\zeta}(T)}{\dot{\zeta}(T)}\right\}\sqrt[3]{\frac{A^2(T)\,C(T)}{a^2[\zeta(T)]\,c[\zeta(T)]}\,\frac{1}{\dot{\zeta}(T)}}$$

$$\beta_2(T) = \frac{a[\zeta(T)]}{A(T)}\sqrt[3]{\frac{A^2(T)\,C(T)}{a^2[\zeta(T)]\,c[\zeta(T)]}}$$

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}_1(T) = \frac{1}{A(T)\,C(T)}\Bigg(&\{p^2[\zeta(T)] + p'[\zeta(T)] + \omega[\zeta(T)] + a[\zeta(T)]\,b[\zeta(T)]\}\,\dot{\zeta}^2(T) + \\ &+ P^2(T) - [\dot{P}(T) + \Omega(T) + A(T)\,B(T)] - \frac{\dot{A}(T)}{A(T)}\Big\{p[\zeta(T)]\,\dot{\zeta}(T) - \\ &- P(T) - \frac{\ddot{\zeta}(T)}{\dot{\zeta}(T)}\Big\} - \{p[\zeta(T)]\,\dot{\zeta}(T) - 2P(T)\}\frac{\ddot{\zeta}(T)}{\dot{\zeta}(T)} - 2p[\zeta(T)]\,P(T)\,\dot{\zeta}(T) + \\ &+ \frac{1}{2}\,\frac{\ddot{\zeta}^2(T)}{\dot{\zeta}^2(T)}\Bigg)\sqrt[3]{\frac{A^2(T)\,C(T)}{a^2[\zeta(T)]\,c[\zeta(T)]}\,\frac{1}{\dot{\zeta}(T)}}\end{aligned}$$

$$\bar{\gamma}_2(T) = \frac{a[\zeta(T)]}{A(T)\,C(T)} \left\{ \frac{a'[\zeta(T)]}{a[\zeta(T)]} \dot{\zeta}(T) + 2p[\zeta(T)]\,\dot{\zeta}(T) - \frac{\dot{A}(T)}{A(T)} - \right.$$

$$\left. - 2P(T) - \frac{\ddot{\zeta}(T)}{\dot{\zeta}(T)} \right\} \sqrt[3]{\frac{A^2(T)\,C(T)}{a^2[\zeta(T)]\,c[\zeta(T)]}}$$

$$\bar{\gamma}_3(T) = \frac{a[\zeta(T)]\,c[\zeta(T)]}{A(T)\,C(T)} \sqrt[3]{\frac{A^2(T)\,C(T)}{a^2[\zeta(T)]\,c[\zeta(T)]}}\,\dot{\zeta}(T).$$

[Значит, $U(T)$ является решением и удовлетворяет начальным условиям $U(T_0) = U_0$.]

Доказательство: Простым вычислением (используя замечание 7) убедимся, что матрица $\bar{K}_0[Z(t)]$ обратная по отношению к матрице $K_0(t)$, и утверждение теоремы вытекает тогда из теоремы 1,3 и замечания 8.

Рассмотрим теперь значение уравнений (7) и их связь с дифференциальными уравнениями 3-го порядка.

a) Пусть имеем уравнения

$$(\omega) \qquad y''' + 2\bar{\omega}(t)\,y' + \bar{\omega}'(t)\,y = 0 \qquad \dddot{Y} + 2\Omega(T)\,\dot{Y} + \dot{\Omega}(T)\,Y = 0. \qquad (\Omega)$$

Если привести эти уравнения к системе [полагая $y(t) = x_1(t)$, $y'(t) = x_2(t)$, $y''(t) = x_3(t)$, $Y(T) = X_1(T)$, $\dot{Y}(T) = X_2(T)$, $\ddot{Y}(T) = X_3(T)$], то получаем системы

$$\begin{array}{llll} & x_1' = x_2 & \dot{X}_1 = X_2 & \\ (\bar{\omega}) & x_2' = x_3 & \dot{X}_2 = X_3 & (\bar{\Omega}) \\ & x_3' = -\bar{\omega}'(t)\,x_1 - 2\bar{\omega}(t)\,x_2 & \dot{X}_3 = -\dot{\Omega}(T)\,X_1 - 2\bar{\Omega}(T)X_2. & \end{array}$$

Мы получаем $\omega(t) = \bar{\omega}(t)$, $\Omega(T) = \Omega(T)$, $p(t) = P(T) = 0$, $q(t) = \frac{2}{3}\,\omega(t)$, $Q(T) = \frac{2}{3}\,\Omega(T)$, $r(t) = \bar{\omega}'(t)$, $R(T) = \dot{\Omega}(T)$. Из этого следует, что системы $(\bar{\omega})$, $(\bar{\Omega})$ удовлетворяют условиям (7). При преобразовании по теореме 2,1 мы имеем

$$\alpha(t) = \frac{1}{Z'(t)}, \qquad \beta_1(t) = -\frac{Z''(t)}{Z'^2(t)}, \qquad \beta_2(t) = 1,$$

$$\gamma_1(t) = \left\{ \Omega[Z(t)]\,Z'^2(t) - \omega(t) + \frac{1}{2}\,\frac{Z''^2(t)}{Z'^2(t)} \right\} \frac{1}{Z'(t)},$$

$$\gamma_2(t) = -\frac{Z''(t)}{Z'^2(t)}, \qquad \gamma_3(t) = Z'(t).$$

Таким образом мы имеем определенное преобразование решений дифференциальных уравнений (ω), (Ω) в виде

$$y(t) = \frac{Y[Z(t)]}{Z'(t)}, \qquad y'(t) = -\frac{Z''(t)}{Z'^2(t)}\,Y[Z(t)] + \dot{Y}[Z(t)],$$

$$y''(t) = \left\{ \Omega[Z(t)]\,Z'^2(t) - \omega(t) + \frac{1}{2}\,\frac{Z''^2(t)}{Z'^2(t)} \right\} \frac{Y[Z(t)]}{Z'(t)} - \frac{Z''(t)}{Z'^2(t)}\,\dot{Y}[Z(t)] +$$

$$+ Z'(t)\ddot{Y}[Z(t)].$$

Если еще рассмотреть начальные условия (Z^*) и начальные условия для решений уравнения (Ω), то из теоремы 2,1 получим теорему 2,1 [2].

б) Рассмотрим теперь обратную задачу: Если систему $(\bar{a}_3)$ привести к дифференциальному уравнению 3-ьего порядка по отношению к 1-ой компоненте, то получим [полагая $x_1(t) = x(t)$] уравнение

$$x''' + 3p(t)\, x'' + 3q(t)\, x' + r(t)\, x = 0. \tag{15}$$

Это уравнение мы можем по [6], 1, гл. II, § 4 привести подстановкой

$$x(t) = \sqrt[3]{a^2(t)\, c(t)}\, y(t)$$

к виду

$$y''' + 3y'[q(t) - p^2(t) - p'(t)] + y[r(t) - 3p(t)\, q(t) + 2p^3(t) - p''(t)] = 0,$$

значит

$$y''' + 2\omega(t)\, y' + y[r(t) - 3p(t)\, q(t) + 2p^3(t) - p''(t)] = 0. \tag{16}$$

Из этого вытекает, что смысл условий (7) заключается в том, чтобы уравнение (16) и аналогичное уравнение для системы (A_3) были самосопряженными.

Пример:

Рассмотрим системы уравнений

$$(x)\quad \begin{aligned} x_1' &= b(t)\, x_2 \\ x_2' &= 2c(t)\, x_1 + 2b(t)\, x_3 \\ x_3' &= c(t)\, x_2 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \dot{X}_1 &= B(T)\, X_2 \\ \dot{X}_2 &= 2C(T)\, X_1 + 2B(T)\, X_3 \\ \dot{X}_3 &= C(T)\, X_2 \end{aligned} \quad (X)$$

Здесь имеем $\omega_0(t) = \dfrac{b''(t)}{b(t)} - \dfrac{3}{2}\dfrac{b'^2(t)}{b^2(t)} - 2b(t)\, c(t), \quad p_0(t) = -\dfrac{b'(t)}{b(t)},$

$$q_0(t) = \frac{b'^2(t)}{b^2(t)} - \frac{1}{3}\frac{b''(t)}{b(t)} - \frac{4}{3} b(t)\, c(t), \quad r_0(t) = 2[b'(t)\, c(t) - b(t)\, c'(t)]$$

и легко проверить, что условия (7) удовлетворены. Решение системы (X) тогда преобразуется на решение системы (x) таким образом, что имеет место (с точностью до постоянного множителя):

$$\alpha(t) = \frac{b(t)}{B[Z(t)]}\frac{1}{Z'(t)}, \qquad \beta_1(t) = \frac{1}{B[Z(t)]}\left\{\frac{b'(t)}{b(t)} - \frac{\dot{B}[Z(t)]\, Z'(t)}{B[Z(t)]} - \frac{Z''(t)}{Z'(t)}\right\}\frac{1}{Z'(t)}.$$

$$\beta_2(t) = 1, \quad \gamma_1(t) = \frac{1}{4b(t)\, B[Z(t)]}\left\{\frac{b'(t)}{b(t)} - \frac{\dot{B}[Z(t)]\, Z'(t)}{B[Z(t)]} - \frac{Z''(t)}{Z'(t)}\right\}^2\frac{1}{Z'(t)},$$

$$\gamma_2(t) = \frac{1}{2b(t)}\left\{\frac{b'(t)}{b(t)} - \frac{\dot{B}[Z(t)]\, Z'(t)}{B[Z(t)]} - \frac{Z''(t)}{Z'(t)}\right\}, \qquad \gamma_3(t) = \frac{B[Z(t)]}{b(t)}\, Z'(t),$$

и $Z(t)$ решением уравнения (Ω_0, ω_0).

Легко убелимся в том, что системы (x), (X) имеют решение

$$\begin{pmatrix} y_1^2(t) \\ 2y_1(t)\, y_2(t) \\ y_2^2(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} Y_1^2(T) \\ 2Y_1(T)\ Y_2(T) \\ Y_2^2(T) \end{pmatrix}$$

где

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \quad Y(T) = \begin{pmatrix} Y_1(T) \\ Y_2(T) \end{pmatrix}$$

являются решениями систем

$$(a) \qquad \begin{aligned} y_1' &= b(t)\, y_2 \\ y_2' &= c(t)\, y_1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \dot{Y}_1 &= B(T) Y_2 \\ \dot{Y}_2 &= C(T)\ Y_1 \end{aligned} \qquad (A)$$

По [3] можем решение системы (A) преобразовать в решение системы (a) уравнениями

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \bar{\alpha}(t)\ Y_1[Z(t)] \\ y_2(t) &= \bar{\gamma}(t)\ Y_1[Z(t)] + \bar{\delta}(t)\ Y_2[Z(t)], \end{aligned}$$

где с точностью до постоянного множителя имеем

$$\bar{\alpha}(t) = \sqrt{\frac{b(t)}{B[Z(t)]}} \frac{1}{\sqrt{|Z'(t)|}}, \qquad \bar{\gamma}(t) = \frac{1}{2b(t)} \left\{ \frac{b'(t)}{b(t)} - \frac{\dot{B}[Z(t)]\, Z'(t)}{B[Z(t)]} - \right.$$

$$\left. - \frac{Z''(t)}{Z'(t)} \right\} \sqrt{\frac{b(t)}{B[Z(t)]}} \frac{1}{\sqrt{|Z'(t)|}}, \qquad \bar{\delta}(t) = \operatorname{sgn} Z' . \sqrt{\frac{B[Z(t)]}{b(t)}} \sqrt{|Z'(t)|}$$

и $Z(t)$ решением дифференциального уравнения $(b_{1,1})$ [3], но это (Ω_0, ω_0). Наконец мы убедимся в том, что в действительности имеет место (с точностью до постоянного множителя)

$$\begin{aligned} &\alpha(t) = \bar{\alpha}^2(t),\ \beta_1(t) = 2\bar{\alpha}(t)\, \bar{\gamma}(t),\ \beta_2(t) = \bar{\alpha}(t)\, \bar{\delta}(t)\ \ (= 1), \\ &\gamma_1(t) = \bar{\gamma}^2(t),\ \gamma^2(t) = \bar{\gamma}(t)\, \bar{\delta}(t),\ \ \gamma_3(t) = \bar{\delta}^2(t). \end{aligned}$$

Замечание 9: Мы рассмотрели специальный случай преобразования систем (a_3), (A_3), когда эти системы имели канонический вид $(\bar{a}_3)$, $(\bar{A}_3)$ и когда $\alpha_2(t) = \alpha_3(t) = \beta_3(t) = 0$. Мы могли избрать другой канонический вид, или рассмотреть другие специальные преобразования на основании других требований, но этим мы теперь не будем заниматься.

3. Если систему (A_3) отождествить с системой $(\bar{a}_3)$, то теоремы 2,1, 2,2 и 2,3 описывают преобразование решений системы $(\bar{a}_3)$ в решения той-же системы, а именно в виде

$$y(t) = K(t)\ u[Z(t)],$$

где элементы матрицы $K(t)$ определены следующими уравнениями (17):

$$\alpha(t) = \sqrt[3]{\frac{a^2(t)\,c(t)}{a^2[Z(t)]\,c[Z(t)]}\,\frac{1}{Z'(t)}}$$

$$\beta_1(t) = \frac{1}{a(t)}\left\{p[Z(t)]\,Z'(t) - p(t) - \frac{Z''(t)}{Z'(t)}\right\}\sqrt[3]{\frac{a^2(t)c(t)}{a^2[Z(t)]\,c[Z(t)]}\,\frac{1}{Z'(t)}}$$

$$\beta_2(t) = \frac{a[Z(t)]}{a(t)}\sqrt[3]{\frac{a^2(t)\,c(t)}{a^2[Z(t)]\,c[Z(t)]}}$$

$$\gamma_1(t) = \frac{1}{a(t)\,c(t)}\left(\left\{p^2[Z(t)] + \dot{p}[Z(t)] + \omega[Z(t)] + a[Z(t)]\,b[Z(t)]\right\}Z'^2(t) + \right.$$

$$+ p^2(t) - [p'(t) + \omega(t) + a(t)\,b(t)] - \frac{a'(t)}{a(t)}\left\{p[Z(t)]\,Z'(t) - p(t) - \frac{Z''(t)}{Z'(t)}\right\} -$$

$$\left\{p[Z(t)]\,Z'(t) - 2p(t)\right\}\frac{Z''(t)}{Z'(t)} - 2p[Z(t)]\,p(t)\,Z'(t) +$$

$$\left. + \frac{1}{2}\,\frac{Z''^2(t)}{Z'^2(t)}\right)\sqrt[3]{\frac{a^2(t)\,c(t)}{a^2[Z(t)]\,c[Z(t)]}\,\frac{1}{Z'(t)}}$$

$$\gamma_2(t) = \frac{a[Z(t)]}{a(t)\,c(t)}\left\{\frac{\dot{a}[Z(t)]}{a[Z(t)]}\,Z'(t) + 2p[Z(t)]\,Z'(t) - 2p(t) - \frac{a'(t)}{a(t)} - \right.$$

$$\left. + \frac{Z''(t)}{Z'(t)}\right\}\sqrt[3]{\frac{a^2(t)\,c(t)}{a^2[Z(t)]\,c[Z(t)]}}$$

$$\gamma_3(t) = \frac{a[Z(t)]\,c[Z(t)]}{a(t)\,c(t)}\sqrt[3]{\frac{a^2(t)\,c(t)}{a^2[Z(t)]\,c[Z(t)]}}\,Z'(t),$$

и функция $Z(t)$, отображающая интервал $i \subset j$ на интервал $i' \subset j$, определена начальными условиями (Z^*) ($t_0 \in j$, $Z_0' \in j$, $Z_0'' \neq 0$, Z_0 произвольные числа) и является решением уравнения

$$\{Z, t\} + \frac{1}{2}\,\omega[Z(t)]\,Z'^2(t) = \frac{1}{2}\,\omega(t). \qquad (\omega, \omega)$$

Преобразование по теореме 2,1 при наличии предположений теоремы 2,3 есть линейное регулярное преобразование пространства решений системы $(\bar{a}_3)$ на себя. Если обозначить его $\boldsymbol{A}$, то имеем

$$u(t)\,\boldsymbol{A} = K(t)\,u[Z(t)].$$

Пусть $u^{(k)}(t)$ ($k = 1, 2, 3$) три линейно независимых решения системы $(\bar{a}_3)$. При этом всякое решение $y(t)$ этой системы можно представить в виде $y(t) = \sum_{k=1}^{3} c_k\,u^{(k)}(t)$, где c_k постоянные. Тогда тоже

$$u^{(k)}(t)\,\boldsymbol{A} = \sum_{l=1}^{3} a_{kl}u^{(l)}(t), \qquad (18)$$

где $a_{kl}(k, l = 1, 2, 3)$ удобные постоянные.

Матрица $A = (a_{kl})$ — это матрица линейного преобразования $\boldsymbol{A}$ относительно фундаментальной системы решений $u^{(k)}(t)$ и ввиду регулярности $\boldsymbol{A}$ имеем $|A| \neq 0$. Мы теперь найдем вид фундаментальной системы решений системы $(\bar{a}_3)$, для которой A имеет канонический вид. Таким образом нас будут интересовать нормальные решения, это значит решения $U(t)$, для которых имеет место

$$U^{(k)}(t)\boldsymbol{A} = s_k U^{(k)}(t) \quad (k = 1, 2, 3).$$

Из равенства

$$U^{(k)}(t) = \sum_{l=1}^{3} \alpha_{kl} u^{(l)}(t)$$

получаем, что коэффициэнты α_{kl} удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} (a_{11} - s_k)\,\alpha_{k1} + a_{21}\alpha_{k2} + a_{31}\alpha_{k3} &= 0 \\ a_{12}\alpha_{k1} + (a_{22} - s_k)\,\alpha_{k2} + a_{32}\alpha_{k3} &= 0 \\ a_{13}\alpha_{k1} + a_{23}\alpha_{k2} + (a_{33} - s_k)\,\alpha_{k3} &= 0 \end{aligned} \tag{19}$$

Из этого следует, что s_k должны быть корнями характеристического уравнения преобразования $\boldsymbol{A}$

$$|A - sE| = 0. \tag{20}$$

Лемма 6. Пусть $u_1(t)$ первая компонента решения системы $(\bar{a}_3)$, $a(t) \neq 0$, $c(t) \neq 0$ и существуют непрерывные производные $u_1'''(t)$, $a''(t)$, $b'(t)$, $c'(t)$ в интервале j. Тогда это решение системы $(\bar{a}_3)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ \dfrac{1}{a(t)}\, u_1'(t) \\ \dfrac{1}{a(t)\,c(t)}\, u_1''(t) - \dfrac{a'(t)}{a^2(t)\,c(t)}\, u_1'(t) - \dfrac{b(t)}{c(t)}\, u_1(t) \end{pmatrix}.$$

Доказательство: Простой подстановкой мы убедимся, что три определенные таким образом функции $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$ являются решением системы $(\bar{a}_3)$. При этом надо использовать тот факт, что $u_1(t)$ удовлетворяет уравнению (15). Если $u_1(t)$, $\bar{u}_2(t)$, $\bar{u}_3(t)$ являются тоже решением системы $(\bar{a}_3)$, то из 1-ого уравнения $(\bar{a}_3)$ следует, что $a(t)\,u_2(t) = a(t)\,\bar{u}_2(t)$ и так как $a(t) \neq 0$, имеет место $\bar{u}_2(t) = u_2(t)$ и из 2-ого уравнения $(\bar{a}_3)$ следует, что $\bar{u}_3(t) = u_3(t)$.

В дальнейшем мы будем рассматривать преобразования пространства решений $(\bar{a}_3)$ над полем вещественных чисел.

Пусть теперь $F(t)$ функция имеющая непрерывную производную 4-ого порядка, и удовлетворяющая функциональному уравнению

$$F[Z(t)] - F(t) = 1, \quad F'(t) \neq 0. \tag{F}$$

Определим вспомогательную функцию $g(t) \neq 0$ уравнением

$$g[Z(t)] = g(t)\,\mathrm{sgn}\, s$$

и предположим, что эта функция имеет непрерывную производную 3-го порядка.

Лемма 7. Функция $\Phi(t) = g(t)\sqrt[3]{a^2(t)\,c(t)}\,\dfrac{e^{rF(t)}}{F'(t)}$ где $r = \ln|s|$ обладает свойством $\alpha(t)\,\Phi[Z(t)] = s\Phi(t)$, где $\alpha(t)$ определено в (17).

Доказательство: Из уравнения (F) вытекает $\dot{F}[Z(t)] = \dfrac{F'(t)}{Z'(t)}$ и о верности леммы можно теперь убедиться простой подстановкой.

Функцию $\Phi(t)$ называем по [1] функцией Флоке, сопряженной с системой ($\bar{a}_3$) и с корнем s.

Теорема 3,1. Пусть характеристическое уравнение (20) имеет действительный корень s. Тогда система ($\bar{a}_3$) имеет нормальное решение $U(t)$, которое можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned}
U_1(t) &= \Phi(t)\,\pi(t)\\
U_2(t) &= \frac{1}{a(t)}\,[\Phi'(t)\,\pi(t) + \Phi(t)\,\pi'(t)]\\
U_3(t) &= \frac{1}{a(t)\,c(t)}\left\{\left[\Phi''(t) - \frac{a'(t)}{a(t)}\,\Phi'(t) - a(t)b(t)\Phi(t)\right]\pi(t) + \right.\\
&\left. + \left[2\Phi'(t) - \frac{a'(t)}{a(t)}\,\Phi(t)\right]\pi'(t) + \Phi(t)\,\pi''(t)\right\}
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

где $\pi(t)$ функция, имеющая непрерывную производную 3-го порядка и удовлетворяющая тождеству $\pi[Z(t)] = \pi(t)$.

Доказательство: Так как s является корнем характеристического уравнения (20), то существует нормальное решение системы ($\bar{a}_3$), для которого имеет место равенство $U(t)\,\mathbf{A} = sU(t)$. Тогда для 1-ой компоненты имеет место $\alpha(t)\,U_1[Z(t)] = sU_1(t)$. Частное $\dfrac{U_1(t)}{\Phi(t)} = \pi(t)$ является таким образом инвариантом при подстановке $Z(t)$ вместо независимо переменной и 1-ую компоненту $U_1(t)$ нормального решения можно представить в виде $U_1(t) = \Phi(t)\,\pi(t)$. Компоненты $U_2(t)$ и $U_3(t)$ решения $U(t)$ получим на основании леммы 6.

Теорема 3,2. Пусть характеристическое уравнение (20) имеет три разных действительных корня s_i ($i = 1, 2, 3$). Тогда существует фундаментальная система нормальных решений $U^{(i)}(t)$ системы ($\bar{a}_3$), которую можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned}
U_1^{(i)}(t) &= \Phi_i(t)\,\pi_i(t)\\
U_2^{(i)}(t) &= \frac{1}{a(t)}\,[\Phi_i'(t)\,\pi_i(t) + \Phi_i(t)\,\pi_i'(t)]\\
U_3^{(i)}(t) &= \frac{1}{a(t)\,c(t)}\left\{\left[\Phi_i''(t) - \frac{a'(t)}{a(t)}\,\Phi_i'(t) - a(t)\,b(t)\,\Phi_i(t)\right]\pi_i(t) + \right.\\
&\left. + \left[2\Phi_i'(t) - \frac{a'(t)}{a(t)}\,\Phi_i(t)\right]\pi_i'(t) + \Phi_i(t)\,\pi_i''(t)\right\}
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

где $\Phi_i(t)$ функция Флоке, сопряженная с корнем s_i и $\pi_i(t)$ функции имеющие непрерывную производную 3-го порядка и удовлетворяющие тождеству $\pi_i[Z(t)] = \pi_i(t)$.

Доказательство: Так как характеристическое уравнение (20) имеет корни s_i, то существуют нормальные решения $U^{(i)}(t)$ системы $(\bar{a}_3)$, которые можно по теореме 3,1 представить в виде (21), т. е. (22), и которые по [7], гл. VII, § 33, линейно независимы. Поэтому их можем выбрать в качестве фундаментальной системы.

Лемма 8. Для совокупности подобных матриц A ранг матрицы $A - \lambda E$ одинаковый.

Доказательство: Пусть матрицы A, A_0 подобны. Тогда по основной теореме о подобии матриц [7], гл. XIII, § 60, матрицы $A - \lambda E$, $A_0 - \lambda E$ эквивалентны. Тогда можно перейти от одной матрицы к другой при помощи конечного числа элементарных преобразований, но последние не меняют ранга матрицы [7], гл. II, § 11.

Теорема 3,3. Пусть характеристическое уравнение (20) имеет трехкратный корень s_0 и ранг h матрицы $A - s_0 E$ равен 0. Тогда существует фундаментальная система нормальных решений $U^{(i)}(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ системы $(\bar{a}_3)$, которую можно выразить в виде

$$\left.\begin{aligned}
U_1^{(i)}(t) &= \Phi_0(t)\,\pi_i(t)\\
U_2^{(i)}(t) &= \frac{1}{a(t)}\,[\Phi_0'(t)\,\pi_i(t) + \Phi_0(t)\,\pi_i'(t)]\\
U_3^{(i)}(t) &= \frac{1}{a(t)\,c(t)}\left\{\left[\Phi_0''(t) - \frac{a'(t)}{a(t)}\,\Phi_0'(t) - a(t)\,b(t)\,\Phi_0(t)\right]\pi_i(t) + \right.\\
&\quad\left. + \left[2\Phi_0'(t) - \frac{a'(t)}{a(t)}\,\Phi_0(t)\right]\pi_i'(t) + \Phi_0(t)\,\pi_i''(t)\right\}
\end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

где $\Phi_0(t)$ функция Флоке, сопряженная с корнем s_0, и $\pi_i(t)$ функции, имеющие непрерывную производную 3-го порядка, удовлетворяющие тождеству $\pi_i[Z(t)] = \pi_i(t)$ и

$$W_л(t) = \begin{vmatrix} \pi_1(t) & \pi_2(t) & \pi_3(t)\\ \pi_1'(t) & \pi_2'(t) & \pi_3'(t)\\ \pi_1''(t) & \pi_2''(t) & \pi_3''(t)\end{vmatrix} \neq 0.$$

Доказательство: Так как $h = 0$, то коэффициэнты системы (19) равны 0. Из (18) следует, что существует фундаментальная система нормальных решений $U^{(i)}(t)$ системы $(\bar{a}_3)$, так что $U^{(i)}(t)\,\mathbf{A} = s_0 U^{(i)}(t)$. Всякое из них можно по теореме 3,1 представить в виде (21), т. е. (23). Определитель $\Delta(t)$ $(\neq 0)$ этой системы равен

$$\Delta(t) = \frac{\Phi_0^3(t)}{a^2(t)\,c(t)}\,W_л(t)$$

и поэтому тоже $W_л(t) \neq 0$, ч. т. д.

Замечание 10. В случае, описанном в теореме 3,3, является каждое решение системы $(\bar{a}_3)$ нормальным.

Теорема 3,4. Пусть характеристическое уравнение (20) имеет трехкратный корень s_0 и ранг h матрицы $A - s_0 E$ равен 1. Тогда существует фундаментальная система решений $U^{(i)}(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ системы $(\bar{a}_3)$, которую можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned} U_1^{(i)}(t) &= \Phi_0(t)\,\pi_i(t) \\ U_2^{(i)}(t) &= \frac{1}{a(t)}\,[\Phi_0'(t)\,\pi_i(t) + \Phi_0(t)\,\pi_i'(t)] \\ U_3^{(i)}(t) &= \frac{1}{a(t)\,c(t)}\left\{\left[\Phi_0''(t) - \frac{a'(t)}{a(t)}\,\Phi_0'(t) - a(t)\,b(t)\,\Phi_0(t)\right]\pi_i(t) + \right. \\ &\quad \left. + \left[2\Phi_0'(t) - \frac{a'(t)}{a(t)}\,\Phi_0(t)\right]\pi_i'(t) + \Phi_0(t)\,\pi_i''(t)\right\} \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

для $i = 1, 2$, и

$$\left.\begin{aligned} U_1^{(3)}(t) &= \Phi_0(t)\,z(t) \\ U_2^{(3)}(t) &= \frac{1}{a(t)}\,[\Phi_0'(t)\,z(t) + \Phi_0(t)\,z'(t)] \\ U_3^{(3)}(t) &= \frac{1}{a(t)\,c(t)}\left\{\left[\Phi_0''(t) - \frac{a'(t)}{a(t)}\,\Phi_0'(t) - a(t)\,b(t)\,\Phi_0(t)\right]z(t) + \right. \\ &\quad \left. + \left[2\Phi_0'(t) - \frac{a'(t)}{a(t)}\,\Phi_0(t)\right]z'(t) + \Phi_0(t)\,z''(t)\right\} \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

где $\Phi_0(t)$ функция Флоке, сопряженная с корнем s_0, $\pi_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ обладают непрерывными производными 3-го порядка и удовлетворяют тождеству $\pi_i[Z(t)] = \pi_i(t)$, $z(t) = \pi_3(t) + F(t)\,\pi_2(t)$, и функция $F(t)$ определена уравнением (F).

Доказательство: Так как ранг матрицы $A - s_0E$ равен 1, то по лемме 8 имеет одинаковый ранг и матрица $A_0 - s_0E$, где A_0 матрица в каноническом виде подобна матрице A. Значит, существует фундаментальная система решений $U^{(i)}(t)$ $(i = 1, 2, 3)$, для которой верно

$$U^{(i)}(t)\,\mathbf{A} = s_0 U^{(i)}(t) \quad \text{для} \quad i = 1, 2$$
$$U^{(3)}(t)\,\mathbf{A} = s_0[U^{(3)}(t) + U^{(2)}(t)].$$

Решения $U^{(1)}(t)$, $U^{(2)}(t)$ нормальны и по теореме 3,1 их можем представить в виде (21) т. е. (24). Все остальные нормальные решения системы $(\bar{a}_3)$ линейно зависят от этих двух решений. Для $U^{(3)}(t)$ имеем

$$\alpha(t)\;U_1^{(3)}[Z(t)] = s_0[U_1^{(3)}(t) + U_1^{(2)}(t)]$$

Функцию $U_1^{(3)}(t)$ будем рассматривать в виде $U_1^{(3)}(t) = \Phi_0(t)\,z(t)$. Имеем

$$\alpha(t)\;U_1^{(3)}[Z(t)] = \alpha(t)\;\Phi_0[Z(t)]\;z[Z(t)]$$

и тоже

$$\alpha(t)\;U_1^{(3)}[Z(t)] = s_0[\Phi_0(t)\,z(t) + \Phi_0(t)\,\pi_2(t)].$$

Сравнивая правые части этих уравнений и используя лемму 7, получим $z[Z(t)] = z(t) + \pi_2(t)$. Функция $\pi_3(t) = z(t) - F(t)\,\pi_2(t)$ является инвариантом при подстановке $Z(t)$ вместо независимо переменной, потому что

$$\pi_3[Z(t)] = z[Z(t)] - F[Z(t)]\,\pi_2[Z(t)] = z(t) + \pi_2(t) - [F(t) + 1]\,\pi_2(t) = \\ = z(t) - F(t)\,\pi_2(t) = \pi_3(t).$$

Из этого вытекает, что $U_1^{(3)}(t)$ можно выразить в виде $U_1^{(3)}(t) = \Phi_0(t)\,[\pi_3(t) + F(t)\,\pi_2(t)]$ и по лемме 6 получим (25).

Теорема 3,5. Пусть характеристическое уравнение (20) имеет трехкратный корень s_0 и ранг h матрицы $A - s_0E$ равен 2. Тогда существует фундаментальная система решений $U^{(i)}(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ системы $(\bar{a}_3)$, которую можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned} U_1^{(1)}(t) &= \Phi_0(t)\,\pi_1(t) \\ U_2^{(1)}(t) &= \frac{1}{a(t)}[\Phi_0'(t)\,\pi_1(t) + \Phi_0(t)\,\pi_1'(t)] \\ U_3^{(1)}(t) &= \frac{1}{a(t)\,c(t)}\left\{\left[\Phi_0''(t) - \frac{a'(t)}{a(t)}\Phi_0'(t) - a(t)\,b(t)\,\Phi_0(t)\right]\pi_1(t) + \right. \\ &\left. + \left[2\Phi_0'(t) - \frac{a'(t)}{a(t)}\,\Phi_0(t)\right]\pi_1'(t) + \Phi_0(t)\,\pi_1''(t)\right\} \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

$$\left.\begin{aligned} U_1^{(i)}(t) &= \Phi_0(t)\,z_i(t) \\ U_2^{(i)}(t) &= \frac{1}{a(t)}[\Phi_0'(t)\,z_i(t) + \Phi_0(t)\,z_i'(t)] \\ U_3^{(i)}(t) &= \frac{1}{a(t)\,c(t)}\left\{\left[\Phi_0''(t) - \frac{a'(t)}{a(t)}\,\Phi_0'(t) - a(t)\,b(t)\,\Phi_0(t)\right]z_i(t) + \right. \\ &\left. + \left[2\Phi_0'(t) - \frac{a'(t)}{a(t)}\,\Phi_0(t)\right]z_i'(t) + \Phi_0(t)\,z_i''(t)\right\} \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

при $i = 2, 3$, где $\Phi_0(t)$ функция Флоке, сопряженная с корнем s_0, $\pi_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ обладают непрерывными производными 3-го порядка и удовлетворяют тождеству $\pi_i[Z(t)] = \pi_i(t)$, $z_2(t) = \pi_2(t) + F(t)\,\pi_1(t)$, $z_3(t) = \pi_3(t) + F(t)\,\pi_2(t) + \dfrac{F(t)\,[F(t) - 1]}{2}\,\pi_1(t)$, и функция $F(t)$ определена уравнением (F).

Доказательство: Так как ранг матрицы $A - s_0E$ равен 2, то по лемме 8 имеет одинаковый ранг и матрица $A_0 - s_0E$, где A_0 матрица в каноническом виде подобна матрице A. Значит, существует фундаментальная система решений $U^{(i)}(t)$ $(i = 1, 2, 3)$, для которой верно

$$\begin{aligned} U^{(1)}(t)\,\mathbf{A} &= s_0U^{(1)}(t) \\ U^{(2)}(t)\,\mathbf{A} &= s_0[U^{(2)}(t) + U^{(1)}(t)] \\ U^{(3)}(t)\,\mathbf{A} &= s_0[U^{(3)}(t) + U^{(2)}(t)]. \end{aligned}$$

Нормальное решение $U^{(1)}(t)$ можем по теореме 3,1 выразить в виде (21), т. е. (26). Все остальные нормальные решения системы $(\bar{a}_3)$ линейно зависят от $U^{(1)}(t)$. Если теперь рассматривать функции $U^{(2)}(t)$, $U^{(3)}(t)$ в виде $\Phi_0(t)\, z_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$, то применением приема из теоремы 3,3 [2] и из предыдущей теоремы 3,4 получим выражения для $z_2(t)$, $z_3(t)$ по утверждению теоремы. Уравнения (27) получаем по лемме 6.

Теорема 3,6. Пусть характеристическое уравнение (20) имеет однократный корень s_1 и двухкратный корень s_2, и ранг h матрицы $A - s_2E$ равен 1. Тогда существует фундаментальная система нормальных решений $U^{(i)}(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ системы $(\bar{a}_3)$, которую можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned}
U_1^{(1)}(t) &= \Phi_1(t)\, \pi_1(t)\\
U_2^{(1)}(t) &= \frac{1}{a(t)}\left[\Phi_1'(t)\, \pi_1(t) + \Phi_1(t)\, \pi_1'(t)\right]\\
U_3^{(1)}(t) &= \frac{1}{a(t)\, c(t)}\left\{\left[\Phi_1''(t) - \frac{a'(t)}{a(t)}\Phi_1'(t) - a(t)\, b(t)\, \Phi_1(t)\right]\pi_1(t) + \right.\\
&\quad \left. + \left[2\Phi_1'(t) - \frac{a'(t)}{a(t)}\Phi_1(t)\right]\pi_1'(t) + \Phi_1(t)\, \pi_1''(t)\right\}
\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

$$\left.\begin{aligned}
U_1^{(i)}(t) &= \Phi_2(t)\, \pi_i(t)\\
U_2^{(i)}(t) &= \frac{1}{a(t)}\left[\Phi_2'(t)\, \pi_i(t) + \Phi_2(t)\, \pi_i'(t)\right]\\
U_3^{(i)}(t) &= \frac{1}{a(t)\, c(t)}\left\{\left[\Phi_2''(t) - \frac{a'(t)}{a(t)}\Phi_2'(t) - a(t)b(t)\, \Phi_2(t)\right]\pi_i(t) + \right.\\
&\quad \left. + \left[2\Phi_2'(t) - \frac{a'(t)}{a(t)}\Phi_2(t)\right]\pi_i'(t) + \Phi_2(t)\, \pi_i''(t)\right\}
\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

при $i = 2, 3$, где $\Phi_i(t)$ функция Флоке, сопряженная с корнем s_i $(i = 1, 2)$ и функции $\pi_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ обладают непрерывными производными 3-го порядка и удовлетворяют тождеству $\pi_i[Z(t)] = \pi_i(t)$.

Доказательство: Так как ранг матрицы $A - s_2E$ равен 1, то по лемме 8 имеет одинаковый ранг и матрица $A_0 - s_2E$, где A_0 матрица в каноническом виде подобна матрице A. Значит, существует фундаментальная система нормальных решений $U^{(i)}(t)$ $(i = 1, 2, 3)$, для которой верно $U^{(1)}(t)\, \mathbf{A} = s_1U^{(1)}(t)$ и $U^{(i)}(t)\, \mathbf{A} = s_2U^{(i)}(t)$ для $i = 1, 2, 3$. По теореме 3,1 можно все эти решения представить в виде (21), т. е. (28) и (29).

Теорема 3,7. Пусть характеристическое уравнение (20) имеет однократный корень s_1 и двухкратный корень s_2, и ранг h матрицы $A - s_2E$ равен 2. Тогда существует фундаментальная система решений $U^{(i)}(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ системы $(\bar{a}_3)$, которую можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned}
U_1^{(i)}(t) &= \Phi_i(t)\, \pi_i(t)\\
U_2^{(i)}(t) &= \frac{1}{a(t)}\left[\Phi_i'(t)\, \pi_i(t) + \Phi_i(t)\, \pi_i'(t)\right]\\
U_3^{(i)}(t) &= \frac{1}{a(t)\, c(t)}\left\{\left[\Phi_i''(t) - \frac{a'(t)}{a(t)}\Phi_i'(t) - a(t)\, b(t)\, \Phi_i(t)\right]\pi_i(t) + \right.\\
&\quad \left. + \left[2\Phi_i'(t) - \frac{a'(t)}{a(t)}\Phi_i(t)\right]\pi_i'(t) + \Phi_i(t)\pi_i''(t)\right\}
\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

для $i = 1, 2$ и

$$\left.\begin{aligned} U_1^{(3)}(t) &= \Phi_2(t)\, z(t) \\ U_2^{(3)}(t) &= \frac{1}{a(t)} \left[\Phi_2'(t)\, z(t) + \Phi_2(t)\, z'(t) \right] \\ U_3^{(3)}(t) &= \frac{1}{a(t)\, c(t)} \left\{ \left[\Phi_2''(t) - \frac{a'(t)}{a(t)} \Phi_2'(t) - a(t)\, b(t)\, \Phi_2(t) \right] z(t) + \right. \\ &\quad \left. + \left[2\Phi_2'(t) - \frac{a'(t)}{a(t)} \Phi_2(t) \right] z'(t) + \Phi_2(t)\, z''(t) \right\} \end{aligned} \right\} \tag{31}$$

где $\Phi_i(t)$ функции Флоке, сопряженная с корнем s_i ($i = 1, 2$), функции $\pi_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) обладают непрерывными производными 3-го порядка и удовлетворяют тождеству $\pi_i[Z(t)] = \pi_i(t)$, $z(t) = \pi_3(t) + F(t)\, \pi_2(t)$ и функция $F(t)$ определена уравнением (F).

Доказательство: Так как ранг матрицы $A - s_2E$ равен 2, то по лемме 8 имеет одинаковый ранг и матрица $A_0 - s_2E$, где A_0 матрица в каноническом виде подобна матрице A. Значит, существует фундаментальная система нормальных решений $U^{(i)}(t)$ ($i = 1, 2, 3$), для которых верно $U^{(i)}(t)\, \mathbf{A} = s_i U^{(i)}(t)$ для $i = 1, 2$ и $U^{(3)}(t)\, \mathbf{A} = s_2[U^{(3)}(t) + U^{(2)}(t)]$. Решения $U^{(i)}(t)$ ($i = 1, 2$) нормальны и уравнения (30) получаем по теореме 3,1 и лемме 6. Для получения уравнений (31) надо использовать прием из доказательства теоремы 3,4.

Замечание 11. В вещественном пространстве решений системы $(\bar{a}_3)$ существует всегда по крайней мере одно нормальное решение, которое можно представить по теореме 3,1 в виде (21).

Если рассматривать комплексное пространство, то при определении функции Флоке уравнением

$$\Phi(t) = \sqrt[3]{a^2(t)\, c(t)}\, \frac{e^{rF(t)}}{F'(t)},$$

где $r = \ln s$ (главное значение логарифма), остают все теоремы из абзаца 3 верными и исчерпывают все возможные случаи решений характеристического уравнения (20).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Лайтох, М.:* Расширение метода Флоке для определения вида фундаментальной системы решений дифференциального уравнения вида $y'' = Q(x)\, y$. „Чехословацкий математический журнал" (Прага) т. 5 (80), 1955, с. 164 и д.

[2] *Лайтох, М.:* О преобразованиях решений линейных дифференциальных уравнений. „Чехословацкий математический журнал" (Прага) т. 10 (85), 1960, с. 258 и д.

[3] *Травничек, С.:* О преобразованиях решений систем двух линейных дифференциальных уравнений 1-ого порядка. „Acta Universitatis Palackianae Olomucensis" F. R. N. т. 9, 1962.

[4] *Травничек, С.:* Об одном использовании функции Флоке. „Acta Universitatis Palackianae Olomucensis" F. R. N. т. 12, 1963.

[5] *Беллман, Р.:* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. Москва, ИЛ 1954.

[6] *Сансоне, Дж.:* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва, ИЛ 1953.

[7] *Курош, А. Г.:* Курс высшей алгебры. Издание 7-ое. Москва, ФМ 1962.

SHRNUTÍ

O TRANSFORMACÍCH ŘEŠENÍ SOUSTAV LINEÁRNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC PRVNÍHO ŘÁDU

STANISLAV TRÁVNÍČEK

V 1. části je řešen problém vzájemné transformace řešení soustav (A_n) a (a_n) ve tvaru (2).

Ve 2. části se uvažuje zvláštní případ těchto transformací pro soustavy $(\bar{a}_3)$, (A_3), tří diferenciálních rovnic, je-li matice $K(t)$ trojúhelníková. Podmínky řešitelnosti této úlohy jsou uvedeny do souvislosti s [2].

V 3. části je uvedeno použití Floquetovy funkce, definované podobně jako v [1], na určení tvaru fundamentální soustavy řešení soustavy $(\bar{a}_3)$. Diskutuje se kvalita kořenů charakteristické rovnice (20) a hodnost matice $A - sE$.

ZUSAMMENFASSUNG

ÜBER DIE TRANSFORMATIONEN DER LÖSUNGEN DER SYSTEME VON LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN 1. ORDNUNG

STANISLAV TRÁVNÍČEK

Im ersten Teil wurde das Problem der gegenseitigen Transformationen der Form (2) von Lösungen zweier Systeme (A_n) und (a_n) behandelt.

Im zweiten Teil wird ein Specialfall dieser Transformationen für Systeme (A_3), $(\bar{a}_3)$ dreier Differentialgleichungen untersucht, falls die Matrix $K(t)$ von besonderer Form ist. Der Autor zeigt den Zusammenhang der Bedingungen der Lösbarkeit dieses Problems mit [2].

Der dritte Teil bringt eine Applikation der Floquet'schen Funktion, die ähnlich wie in [1] definiert wurde, zur Bestimmung der Form des Fundamentalsystems von Lösungen eines Systems $(\bar{a}_3)$. Gleichzeitig wird die Qualität der Wurzeln der charakteristischen Gleichung (20) und der Rang der Matrix $A - sE$ diskutiert.