Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica

Josef Metelka

Sur les variétés de base simples des transformations de Cremona

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol. 2 (1961), No. 1, 5--32

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/119780`

1961—ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLCMUCENSIS.
FACULTAS RERUM NATURALIUM. TOM 7.

Katedra algebry a geometrie přírodovědecké fakulty.
Vedoucí: Prof. RNDr. Josef Metelka.

SUR LES VARIÉTÉS DE BASE SIMPLES DES TRASFORMATIONS DE CREMONA

JOSEF METELKA

(Reçu le 1er septembre 1960)

L'article contient une partie des matériaux préparés déjà depuis longtemps pour un livre sur des transformations birationnelles. La première partie de ces matériaux était publiée en 1948 [12]. L'objet de l'article présent sont les variétés de base des transformations de Cremona et cela à présent seulement les variétés de base simples. Les deux premiers paragraphes font précéder quelques observations générales et quelques conventions. Le procédé employé à faire des recherches est purement analytique.

1. Les notes introductives.

1.1. Aperçu. — La litérature sur les transformations hyperspatiales de Cremona n'est pas trop étendue, comme nous l'avons fait savoir déjà dans l'article [12]. En ce qui concerne des variétés de base et des variétés fondamentales, elles sont étudiées par le procédé synthétique en plusieurs monographies par M. Derwidué [2, 3, 4, 5, 6] et par occasion par autres géomètres de l'école de M. Godeaux [7]. M. Derwidué a poussé ses études assez loin et il a même introduit une terminologie nouvelle.

Néanmoins on n'a jamais — autant que je sache — étudié des variétés de base et des variétés fondamentales par le procédé analytique et c'est pourquoi les résultats de cet article doivent être considérés comme nouveaux. Les points de vue de deux méthodes de l'étude — de la méthode analytique et de la méthode synthétique — diffèrent essentiellement et en conséquence même la classification résultante des variétés de base est différente ce qui a méné à une terminologie nouvelle qui correspond mieux à la méthode employée. Nous croyons que cette terminologie soit en général plus convenable que celle de M. Derwidué, parce que nous avons essayé de saisir l'idée essentielle ce qui n'avait pas lieu auparavant.

1.2. Quelques accords. — Avant de commencer le thème propre, nous voulons convenir de quelques choses. Tous les corps qui paraissent dans cet article sont commutatifs et à la caractéristique zéro. Tous sont sousensembles d'un corps „universel" qui est assez ample pour admettre une extension quelconque du corps justement employé. En ce qui concerne la notation, nous voulons désigner par des minuscules latines des éléments du corps universel et par des majuscules des indéterminés, c. à d. les symbols qui sont — en nombre quelconque — par définition indépendants au dessus du corps arbitraire.

Toutes les variétés arrivant dans cet article sont irréductibles à savoir absolument irréductibles (voir **10** b, p. 79) c. à d. elles restent irréductibles aussi quand le corps de référence est étendu. C'est une différence essentielle de la conception qui était acceptée chez nous jusqu'aujourd'hui en géométrie algébrique. Nous introduirons le nom „l'union des variétés" pour la somme de points d'un nombre fini de variétés, de sorte qu'un être géométrique appellé jusqu'ici par exemple „la conique composée de deux droites" sera pour nous maintenant „l'union de deux variétés linéaires (droites)" tandisque le terme „la courbe de deuxième degré (la conique),, sera réservé aux „coniques irréductibles (simples)" en terminologie valable auparavant. En conséquence, les termes „réductible" et „irréductible" n'avont plus raison et ne sont pas employés dans cet article.

Les variétés aux propriétés désidérées peuvent être définies au dessus d'un corps de référence T arbitraire (voir **16**, p. 68). Cependant le procédé le plus simple est celui où l'on suppose constamment que le corps de référence T soit algébriquement fermé. Cela signifie en réalité que nous le considérons comme le corps des nombres imaginaires. Chaque variété dans l'espace projectif S_n est donnée par le point général $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ au dessus du corps T, les spécialisations duquel par rapport à T sont tous les points de la variété (à voir **13**, p. 110 et suiv./[1]). La variété peut être donnée aussi par un idéal homogène, composé de ces polynômes $f(X_0, X_1, \ldots, X_n)$, appartenant à $T[X_0, X_1, \ldots, X_n]$, pour lesquels on a $F(\varrho x_0, \ldots, \varrho x_n) = 0$, ϱ étant quelconque. L'idéal en question est prime (**14** b, p. 53) et il possède — suivant le theorème d'Hilbert — une base finie (**14** b, p. 11; **10** a, p. 154) qui, dans ce cas, est formée par les polynômes homogènes. Dans ses livres cités plus haut, M. Waerden démontre que les variétés définies de cette manière sont irréductibles au dessus de T; par une application tout simple des résultats plus généraux dus à M. A. Weil (**16**, p. 18 et suiv.), on en déduit que nos variétés sont absolument irréductibles, car le corps T est algébriquement fermé.

2. Les correspondances algébriques.

2.1. Affirmations générales. — Désignons par $x_0, \ldots, x_n$ les coordonnées d'un point de l'espace projectif S_n et par $x'_0, \ldots, x'_m$ les coordonnées d'un point de l'espace projectif S'_m. Un système de polynômes doublement homogènes aux coëfficients du corps T

$$\chi_1(X_0, \ldots, X_n, X'_0, \ldots, X'_m), \ldots, \chi_\nu(X_0, \ldots, X_n, X'_0, \ldots, X'_m) \qquad 2.1.1.$$

est appellé *la correspondance algébrique* W (**17.** p. 3). Maintenant, nous voulons définir un ensemble ponctuel M resp. M' dans chacun de deux espaces projectifs S_n et S'_m:

Définition 2.1.1. *Le point* $(x) \in S_n$ *appartient à l'ensemble* M, *s'il existe au moins un point* $(x') \in S'_m$ *tel que*

[1]) Néanmoins, les variétés de M. Waerden ne sont pas absolument irréductibles.

$$\chi_1(\varrho x_0, \ldots, \varrho x_n, \sigma x_0', \ldots, \sigma x_m') = 0, \ldots, \chi_\nu(\varrho x_0, \ldots, \varrho x_n, \varrho x_0', \ldots, \sigma x_m') = 0$$

pour $\varrho \neq 0$, $\sigma \neq 0$ *arbitraires. La définition analogue determine l'ensemble* M' *dans l'*S_m'.

On observe aisément que les deux ensembles M et M' sont à la fois vides ou non vides et qu'ils sont des unions des variétés, s'il y a $M \neq \varnothing$. Dans ce cas, nous disons que la correspondance algébrique W *est définie entre les deux ensembles* M et M'.

Soit $P = (x)$ un point général au dessus de T d'une composante K_1[2]) de l'union M et désignons par $P' = (x') = W(x)$ le point général au dessus de T d'une composante K_1' de l'union M' qui est l'homologue de la variété K par la correspondance W. Si nous désignons encore par r, r_1', s, s' respectivement les dimensions du point (x) au dessus de T, du point (x') au dessus de T, du point (x) au dessus de $T(x')$ et finalement du point (x') au dessus du corps $T(x)$, nous voyons qu'il y a

$$r + s' = r' + s = q \, ,$$

où q est la dimension de l'ensemble (x, x') au dessus de T. Les nombres r, r', s, s' ont la signification géométrique suivante: r est la dimension de la composante K_1, r' la dimension de la composante K_1', s resp. s' est la dimension de l'union des variétés (c. à d. la dimension de la composante la plus ample de l'union) qui correspond par W au point général de la composante K_1' resp. K (à voir **15** ou **13** p. 141).

Une importance particulière appartient aux correspondances algébriques, où $s = s' = 0$, cela veut dire aux correspondances, où les points P' sont algébriques au dessus de $T(x)$ et réciproquement les points P sont algébriques au dessus de $T(x')$. Il en suit nécessairement $r = r'$, c. à d. les composantes homologues ont la même dimension. On peut démontrer plus généralement que, dans ce cas, à une subvariété Z à la dimension $r_1 < r$ de la variété K_1, elles correspondent, à quelques exceptions près, les subvariétés Z' de K_1 qui ont toutes la dimension r_1. Il peut exister, bien entendu, sur K_1 une union des variétés (appellées des variétés fondamentales de la correspondance) pour lesquelles et pour leurs subvariétés le règle, concernant la conservation de la dimension, ne vaut plus. La correspondance algébrique décrite ci-haut a la dimension de la variété comme une quantité invariante et elle s'appelle *la correspondance finie* au dessus de T.

Une correspondance finie étant donnée, deux nombres entiers ont une importance décisive, à savoir les deux degrés de l'extensions algébriques $[T(P, P') : T(P)] = \alpha$ et $[T(P, P') : T(P')] = \beta$. On peut démontrer que les deux nombres ne dépendent ni du choix des points généraux P et P' ni du choix du corps de référence T et par suite ils expriment une qualité géometrique de la correspondance. En effet, à un point général P de la variété K_1 au dessus de T, il correspond, dans ce cas, un ensemble de α points de la variété K_1' et réciproquement à un point P' de la variété K_1, général au dessus de T, β points justement de la variété K_1 sont homologues. C'est pourquoi nous donnons à une correspondance W de telle sorte un titre plus précis: $[\alpha, \beta]$ — *correspondance finie* au dessus de T.

[2]) La composante est une variété qui fait partie de l'union, mais qui n'est pas contenue dans une autre variété de l'union.

Si, spécialement, $\alpha = 1$, c. à d. si $T(P, P') = T(P)$, les proportions des éléments $x'_0, \ldots, x'_m$ sont contenues dans le corps $T(P)$ et l'on peut écrire

$$\frac{x'_j}{x'_k} = \frac{\varphi_j(x_0, x_1, \ldots, x_n)}{\varphi_k(x_0, x_1, \ldots, x_n)}, \quad 0 \leq j, k \leq m, \qquad 2.1.2.$$

où les polynômes homogènes φ_ν ont tous le même degré, ce qui est une qualité de l'extension homogène comme il en est le corps $T(P)$ au dessus de T. On énonce souvant le résultat obtenu sous une forme moins précise en disant que les équations qui proviennent des polynomes 2.1.1., comparés à zéro, peuvent être résolues rationnellement par rapport à X'. La correspondance, où il y a $\alpha = 1$, alors une $[1, \beta]$-correspondance, s'appelle aussi une *correspondance rationnelle* en direction $K_1 \to K'_1$ et puis K'_1 est la transformée rationnelle de la variété K_1. À un point général de la variété K_1 il correspond un seul point de la variété K'_1.

S'il y a encore $\beta = 1$, il est $T(P) = T(P') = T(P, P')$. La correspondance algébrique de cette sorte s'appelle une *correspondance* (*transformation*) *birationnelle* entre K_1 et K'_1. Dans ce cas, il est possible d'écrire, en outre des relations 2.1.1., encore

$$\frac{x_j}{x_k} = \frac{\psi_j(x'_0, x'_1, \ldots, x'_m)}{\psi_k(x'_0, x'_1, \ldots, x'_m)}, \quad 0 \leq j, k \leq n, \qquad 2.1.3$$

où les polynômes homogènes ψ_μ aux coefficients du corps T ont tous le même degré qui n'est pas nécessairement identique avec le degré des polynomes φ_ν dans les relations 2.1.2. Les expressions 2.1.3. peuvent s'obtenir des expressions 2.1.2 et réciproquement à l'aide des polynômes de base des idéaux qui expriment la variété K_1 dans S_n et la variété K'_1 dans S'_m.

2.2. Les transformations de Cremona. — Les circonstances les plus simples concernant les transformations birationnelles sont celles, quand la variété K_1 est identique avec l'espace S_n et quand en même temps la variété K'_1 coïncide avec l'espace S'_m, quand, alors, il s'agit de la transformation birationnelle entre deux espace projectifs. Dans ce cas, naturellement, il y a $n = m$. L'ensemble $(\sigma x_0, \ldots, \sigma x_n)$, $\sigma \neq 0$, et à la fois l'ensemble $(\varrho x'_0, \ldots, \varrho x'_n)$, $\varrho \neq 0$, sont composés des $n + 1$ éléments algébriquement indépendants au dessus de T, alors des éléments que l'on peut considérer comme des indéterminées au dessus de T. Afin de faire observer cette circonstance, nous écrirons $X_0, \ldots, X_n$ au lieu de $x_0, \ldots, x_n$ et de même $X'_0, \ldots, X'_n$ au lieu de $x'_0, \ldots, x'_n$. Après cela l'on peut écrire les relations 2.1.2 et 2.1.3 sous la forme suivante

$$\varrho X'_j = \varphi_j(X_0, X_1, \ldots, X_n), \quad 0 \leq j \leq n, \qquad 2.2.1$$

$$\sigma X_k = \psi_k(X'_0, X'_1, \ldots, X'_n), \quad 0 \leq k \leq n, \qquad 2.2.2$$

où $\varrho \neq 0$, $\sigma \neq 0$ sont des éléments arbitraires et transcendants au dessus de $T(X)$ respectivement au dessus de $T(X')$. Dans ce cas, on peut obtenir les expressions 2.2.2. des relations 2.2.1 sans autres conditions et réciproquement, car les deux idéaux déterminés au dessus de T par les ensembles (X) resp. (X') sont nuls. Maintenant, la transformation est appellée *la transformation de Cremona* entre les deux espaces S_n et S'_n. Au lieu des relations 2.2.1. nous écrirons plus succintement $X' = W(X)$ et au lieu des relations 2.2.2. par analogie $X = W^{-1}(X')$.

2.3. Quelques propriétés des relations 2.2.1. et 2.2.2. — La transformation de Cremona est complètement déterminée par les relations 2.2.1 ou 2.2.2, comme nous l'avons déjà constaté plus haut. Néanmoins, il est évident, que les polynômes φ_ν et ψ_μ ne peuvent pas être tout à fait arbitraires pour qu'on obtienne une transformation de Cremona (à comparer **1.** p. 613 et suiv.) Les propriétés que nous indiquerons ci-bas pour les relations 2.2.1. et 2.2.2. sont nécessaires pour définir la transformation de Cremona, cependant elles ne sont pas suffisant du tout.

a) Les polynômes homogènes $\varphi_\nu(X_0, \ldots, X_n)$ resp. $\varphi_\mu(X'_0, \ldots, X'_n)$ sont privés d'un diviseur commun qui serait de degré surpassant zéro. On peut toujours supposer que chaque diviseur commun de cette sorte, qui arriverait eventuellement, fût enlevé par division ce qui était permis, car le diviseur commun en question ne pouvait jamais acquérir la valeur zéro, les X et les X' étant indéterminées.

b) Les polynômes homogènes φ_ν resp. ψ_μ sont algébriquement indépendants au dessus de T, parce que chaque polynôme $\Phi(Y_0, \ldots, Y_n)$ aux coefficients du corps T pour lequel l'égalité $\Phi(\varphi_0, \ldots, \varphi_n) = 0$ aurait lieu, signifirait une relation $\Phi(\varrho X'_0, \ldots, \varrho X'_n) = 0$ qui ne pourrait être satisfaite que dans le cas, si $\Phi(Y_0, \ldots, Y_n)$ était nul identiquement.

c) Tous les polynômes homogènes φ_ν ont le même degré r_1 et analogiquement tous les polynômes ψ_μ ont le même degré r_{n-1}.[3]) Cette propriété est un corollaire du fait que nous employons des coordonnées et des extensions homogènes, comme nous l'avons déjà commenté.

Les propriétés a), b), c) ne sont suffisantes que dans le cas, si $r_1 = 1$. Puis nous avons aussi $r_{n-1} = 1$ et la transformation est une homographie.

3. Des variétés de base et des variétés fondamentales.

3.1. Des variétés de base. — La transformation de Cremona est biunivoque pour un point général de l'espace S_n resp. S'_n, mais cet univocité peut être corrompue dans une direction, si l'on considère une spécialisation du point général, ou bien la correspondance même peut cesser à exister tout à fait. Nous voulons maintenant étudier les exceptions de telle sorte.

Définiton 3.1.1. *Les points (y) en S_n, pour lesquels nous avons $\varphi_j(y_0, \ldots, y_n) = 0$, $0 \leq j \leq n$, s'appellent les points de base dans l' S_n. Analogiquement sont définis les points de base dans l' S'_n.*

Pour les points de base, le théorème suivant a lieu:

Théorème 3.1.2. *Aux points de base et seulement à ces points, il n'existe pas l'homologue, dans l'autre espace, par la transformation de Cremona.*

Démonstration: Pour les points de base dans l' S_n et seulement pour ces points, il y a $X'_j = 0$, $0 \leq j \leq n$, d'après les relations 2.2.1, ce qui donne l'espace nul et pas un point géometrique dans l' S'_n. La démonstration analogue vaut pour les points de base dans l' S'_n.

Remarque: Le théorème 3.1.2. diffère essentiellement de la formulation habituelle employée en géométrie algébrique et il diffère même de la concep-

[3]) Pour $n = 2$ cela pourrait conduire à une confusion apparente. Cependant, dans ce cas, il y a toujours $r_1 = r_{n-1}$ (voir **1.** p. 633) de sorte que la symbolique est admissible.

tion habituelle (à comparer p. ex. **11,8,9** et d'autres) qui parle des homologues coordonnés aux points de base. Nous aurons l'occasion, plus tard, de définir tout à fait précisement le sens que nous voulons donner à l'assertion qu'un ensemble de points dans l' S'_n corresponde à un point de base dans S_n. Jamais, cette correspondance ne sera donnée par les relations simples 2.2.1 ou 2.2.2.

L'ensemble de points de base dans l' S_n s'appelle *la base* dans l' S_n et il est un union de variétés nommées *les variétés de base* dans l' S_n.

Théorème 3.1.3. *La plus grande dimension de la variété de base est n-2.*

Démonstration: (x) étant le point général au dessus de T d'une variéte de base U dans l'S_n, il y a $\varphi_j(x) = 0$, pour $0 \leq j \leq n$, ce qui signifie que tous les polynômes homogènes $\varphi_\nu(X)$ appartiennent à l'idéal défini au dessus de T par le point (x). Mais les polynômes $\varphi_\nu(X)$ sont privés d'un diviseur commun de degré positif d'après la propriété a), art. 1. 3., et c'est pourquoi l'idéal cité ci-haut ne peut pas être in idéal principal, c'est à-dire il a comme sa base au moins deux polynômes homogènes. Il en suit que la variété U a la dimension qui ne surpasse pas le nombre n-2.

Nous pouvons en tirer une conséquence, à savoir celle que pour $n = 1$, c.à-d.s'il s'agit de la transformation entre deux droites, les points de base n' existent pas du tout et alors que la correspondance vaut sans exception pour tous les points dans une et l'autre direction. Nous retrouverons ce résultat encore par un autre procédé.

3.2. **Les variétés fondamentales.** — Désignons par $\varphi_{jr}(X)$, $0 \leq j \leq n$, $0 \leq r \leq n$, la dérivée partielle, formellement effectuée, du polynôme homogène φ_j par rapport à l' indéterminée X_r et soit $\psi_{ks}(X')$, $0 \leq k \leq n$, $0 \leq s \leq n$, un symbole analogue. Nous appellons *la Jacobienne de la transformation W* resp. W^{-1} le déterminant à $n + 1$ colonnes $|\varphi_{jr}(X)|$ resp. $|\psi_{ks}(X')|$. Les deux Jacobiennes sont des polynômes homogènes dans $T(X)$ resp. dans $T(X')$ et alors elles définissent un union d'hypersurfaces dans l' S_n resp. dans l' S'_n.

Définition 3.2.1. *Les hypersurfaces de l'union de variétés définies dans l' S_n par le polynôme homogène $|\varphi_{jr}(X)|$ s'appellent les hypersurfaces fondamentales de la transformation W dans l'S_n.*

Par un procédé analogue, on définit les hypersurfaces fondamentales de la transformation W^{-1} dans l' S'_n.

Le theorème suivant garantit que la définition 3.2.1. n'est pas sans contenu:

Théorème 3.2.2. *Le polynôme $|\varphi_{jr}(X)|$ ne peut pas être nul identiquement.*

Démonstration: S'il y avait $|\varphi_{jr}(X)| = 0$, nous aurions pour le point général de l'espace S_n, que les polynômes $\varphi_j(X)$ étaient dépendants, ce qui contredisait la propriété b) art. 1.3.

Néanmoins l'union de variétés fondamentales peut être vide. Une information plus précise présente le théorème suivant.

Théorème 3.2.3. *Si l'union de variétés fondamentales est vide, la transformation de Cremona est une projectivité régulière et réciproquement.*

Démonstration: L'union de variétés fondamentales n'est vide que dans le cas, s'il y a $|\varphi_{jr}(X)| = a$, aù a est un élément du corps T qui est différent de zéro suivant le théorème 3.2.2. Cela signifie naturellement, que $\varphi_{jr}(X) = a_{jr}$, où $a_{jr} \in T$, et alors $\varphi_j(X) = \Sigma\, a_{jr}X_r$. Ainsi la transformation est une projectivité qui est régulière, car $|a_{jr}| = a \neq 0$. L'assertion réciproque est évidente.

Théorème 3.2.4. *L'homologue d'un point général au dessus de T d'une hypersurface fondamentale de la transformation W dans l' S_n est un point de base dans l' S'_n.*

Démonstration : Supposons que l'union de variétés fondamentales de la transformation W ne soit pas vide (autrefois on n'aurait rien à démontrer), que V soit une hypersurface de cet union et (x) son point général au dessus de T. La relation $\varphi_j(x) = 0$ pour chaque j n'est pas possible, car autrefois la variété V serait une variété de base, ce qui est impossible à l'égard de sa dimension et du théorème 3.1.3. Alors, suivant le théorème 3.1.2., au point (x) doit correspondre un seul point (x') dans l' S'_n. Cependant, les relations $\varrho x'_j = \varphi_j(x)$, qui sont valables entre les points (x) et (x') ne peuvent pas être résolues par rapport à (x), parce qu'il y a $|\varphi_{jr}(x)| = 0$, et cela signifie qu'au point (x') il n'existe pas un homologue bien déterminé dans l' S_n. Il en suit que (x') est un point de base dans l' S_n.

L'existence des hypersurfaces fondamentales dans l'un de deux espaces implique alors l'existence des variétés de base dans l'autre espace. Ainsi le théorème 3.2.3. énonce, que toutes les transformations de Cremona à l' exception des projectivités régulières doivent avoir des variétés de base dans les deux espaces. Une projectivité régulière n'a pas, en effet, les points de base, parce que les relations $\varphi_j(\xi) = \Sigma a_{ij}\xi i = 0$ n' ont pas une solution pour $|a_{ij}| \neq 0$.

Nous ne voulons plus nous occuper des transformations projectives et pour cela nous supposerons dans tout ce qui suit $r_1 > 1$ et $r_{n-1} > 1$.

Théorème 3.2.5. *Il ne peut exister, entre deux espaces projectifs à dimension* 1 (*droites*), *une autre transformation de Cremona que l'homographie.*

Démonstration: Si nous supposons $n = 1$, les relations 2.2.1 ont la forme

$$\varrho X'_0 = \varphi_0(X_0, X_1)\,, \qquad \varrho X'_1 = \varphi_1(X_0, X_1)\,.$$

Les équations $\varphi_0(\xi_1\ \xi_1) = 0$ et $\varphi_1(\xi_0, \xi_1) = 0$ ne peuvent avoir qu'une solution triviale $\xi_0 = 0$, $\xi_1 = 0$, car autrefois les deux polynômes φ_0 et φ_1 auraient un diviseur commun, ce qui nous avons exclu. Ainsi la transformation ne possède pas des points de base dans l' S_n et suivant nos résultats précédents elle est nécessairement l'homographie.

En conséquence de ce théorème, nous voulons ci-après supposer encore $n > 1$.

La relation mutuelle des variétés de base et des variétés fondamentales sera complétée encore par le théorème suivant:

Théorème 3.2.6. *Chaque variété de base dans l' S_n est contenue au moins dans une variété fondamentale dans S_n.*

Démonstration: Soit (x) le point général au dessus de T de la variété de base dans lespace S_n, de sorte qu'il y a $\varphi_j(x) = 0$, $0 \leqq j \leqq n$. Nous voulons examiner le déterminant $|\varphi_{jr}(x)|$. S'il a y par exemple $x_0 \neq 0$, nous multiplions la seconde, la troisième, . . ., la $(n+1)^{\text{ème}}$ colonne du déterminant successivement par les éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et puis nous les aditionons à la première colonne multipliée par x_0. Le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes conduit à l'égalité $x_0 \,.\, |\varphi_{jr}(x)| = 0$, qui démontre notre théorème.

3.3. **La multiplicité des variétés de base.** — Le rôle important dans notre théorie ont les matrices à $n + 1$ lignes, qui nous désignerons par $H_m(X)$, $1 \leqq m \leqq r_1$. Elles sont construites à la manière suivante:

La matrice $H_m(X)$ possède, dans sa ligne à l'indice i $(0 \leqq i \leqq n)$, toutes les dérivées partielles du m-ème ordre du polynôme $\varphi_\cdot(X)$ par rapport aux indéterminées X_k. L'arrangement, en lequel les dérivées suivent dans une ligne donnée, n'est pas essentiel, cependant il doit être le même dans toutes lignes de la matrice. Pour fixer les idées, nous convenons que ce sera l'arrangement lexicographique suivant les puissances $\partial x_0^{m_0} \dots \partial x_n^{m_n}$, c'est à dire, la dérivée $\frac{\partial^m \varphi_i(X)}{\partial x_0^{m_0} \dots \partial x_n^{m_n}}$ précédera la dérivée $\frac{\partial^m \varphi_i(X)}{\partial x_0^{e_0} \dots \partial x_n^{e_n}}$, juste quand la première diférence, m_j-e_j qui n'est pas nulle, sera positive. D'après cela, la matrice $H_m(X)$ a $\binom{m+n}{m}$ colonnes en entier, particulièrement $H_1(X)$ est une matrice carré, dont le déterminant est la Jacobienne de la transformation. Pour simplifier quelques formulations, il est convenable d'admettre aussi la matrice $H_0(X)$, qui est une matrice à $n+1$ lignes et à une seule colonne, formée par les polynômes $\varphi_i(X)$, $0 \leq i \leq n$.

(x) étant un point arbitraire dans l'espace S_n, nous désignerons par $H_m(x)$, respectivement par $h_m(x)$, la matrice $H_m(X)$ resp. son rang, quand nous y avons substitué les indéterminées (X) par les coordonnées (x) du point. Soit pour un m donné $h_m(x) = 0$. À l'aide du théorème d'Euler sur les fonctions homogènes, nous démontrons tout de suite qu'il y a aussi $h_k(x) = 0$, $0 \leq k \leq m$. De cet observation jaillit la définition:

Définition 3.3.1. *Le point (x) dans l'espace S_n est appellé le point m-uple dans la base ($m \geq 1$), s'il y a $h_m(x) > 0$ et $h_{m-1}(x) = 0$.*

On peut introduire aussi le terme „le point à la multiplicité égal à zéro dans la base", s'il a a $h_0(x) < 0$. Évidement, il s'agit d'un point qui n'appartient pas à la base. Soit (x') une spécialisation du point (x) au dessus de T. Il est clair, que nous avons $h_k(x') \leq h_k(x)$, de sorte que la multiplicité du point (x') ne peut pas être inférieure à celle du point (x). Particulièrement, si (x) et $(\bar{x})$ sont deux points généraux au dessus de T d'une variété et m et $\bar{m}$ leurs multiplicités respectives dans la base, il y a nécessairement $m = \bar{m}$. Ainsi, la définition suivante est justifiée:

Définition 3.3.2. *La variété de base U est une variété m-uple dans la base, quand son point général au dessus de T est m-uple dans la base.*

Une conséquence immédiate est le théor me:

Théorème 3.3.3. *U étant une variété m-uple dans la base, chaque variété de base contenant U est au plus m- uple ($m \geq 1$).*

Le théorème n' a pas besoin de la démonstration. Particulièrement, si $m = 1$, la variété de base, contenant U est justement simple dans la base.

La multiplicité du point d ns la base et la multiplicité du même point comme un point de la variété de base sont deux choses différentes. Un point, qui est simple sur la variété de base, peut être, malgré cela, multiple dans la base. Le plus simple exemple en est le point général d'une variété multiple dans la base. Réciproquement, un point multiple sur la variété peut être simple dans la base. Nous expliquerons maintenant ces circonstances plus en détail.

Définition 3.3.4. *Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ les indéterminées. Une hypersurface, exprimée par le polynôme $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \varphi_i(X)$, s'appelle l'homaloïde général. Si $(\lambda) \to (\mu)$ est une spécialisation des quantités (λ) au dessus de T, l'union d'hypersurfaces donnée par $\Sigma\, \mu_i \varphi_i(X)$ est appellée l'homaloïde.*

Pour être complet, il faudrait montrer que l'homalo"de général était en effet une hypersurface, c.-à-d. que le polynôme $\Sigma\ \lambda_i \varphi_i(X)$ était irréductible. Mais c'est évident eu égard l'indépendance des élément (λ). Aprés cette définition on peut énoncer le théorème suivant:

Théorème 3.3.5. *La multiplicité d'un point dans la base est égal à la multiplicité du même point sur l'homaloïde général.*

Démonstration: Dés'gnons par $F(X)$ le polynôme homogène qui détermine l'homalo de général. Si le point (x) est m-uple dans la base, toutes les dérivées d'ordre m-1 de tous les polynômes $\varphi_\nu(X)$ sont égales à zéro dans ce point et il existe au moins une dérivée d'ordre m, qui diff.re de zéro. Il en suit, que toutes les dérivées d'ordre $m - 1$ du polyn me $F(X)$ sont égales à zéro, mais, (λ) étant des indéterminées, une dérivée au moins d'ordre m du polynôme $F(X)$ diffère de zéro dans le point (x), ce qui démontre notre assertion.

En connexion avec le précédent, nous énon;ons encore un théorème, concernant les points multiples:

Théorème 3.3.6. *L'homaloïde général ne possède aucun point multiple en dehors des points multiples dans la base.*

On appelle ce théorème le deuxième théorème de BERTINI sur les systèmes linéaires. Sa démonstration peut être trouvée p. ex. en **13.** p. 201.

Nous finissons ce paragraphe encore par une définition:

Définition 3.3.7. *Soit (x) un point m-uple dans la base et soit (x') une spécialisation de ce point au dessus de T. S'il y a $h_m(x) > h_m(x')$, le point (x') s'appelle une spécialisation irrégulière du point (x') au dessus de T. Toute autre spécialisation est régulière.*

4. Des variétés de base simples

4. 1. Des conditions de contact du 1er ordre. — Nous voulons ci-après nous occuper seulement des variétés de base simples et pour cela nous supposerons constamment, qu'il y ait $h_1(x) > 0$, où (x) soit un point général de la variété de base au dessus de T.

Théorème 4.1.1. *Si (x) est un point général au dessus de T d'une variété à la dimension r, qui est simple dans la base dans S_n, il y a $h_1(x) \leqq n - r$.*

Démonstration: Soient $G_\nu(X)$ des polynômes homogènes, qui forment la base de l'idéal P, défini au dessus de T par le point général (x). Dans le point (x), il existe une variété tangente L à la variété de base et — comme on sait — elle est une variété linéaire à r dimensions (**13.**p.171 ou **15.**p.99), donnée par les polynômes homogènes

$$\sum_{k=0}^{n} X_k \frac{\partial\, G_\nu\,(x)}{\partial\, X_k} \tag{4.1.1.}$$

Le rang de la matrice, construite des coéfficients aux indéterminées, est justement $n - r$. D' autre part, l'homalo.de général est determiné par le polynôme $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \varphi_i(X)$ et son hyperplan tangent dans le point simple (x) s'écrit

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \sum_{k=0}^{n} X_k \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial X_k}.$$

Cet hyperplan tangent appartient dans un système linéaire à la dimension $h_1(x) - 1$. Ainsi, il suffit de montrer, que tous les hyperplans du système contiennent la variété linéaire L, car, s'il est vrai, nous avons — eu égard à la dimension de la variété L — $h_1(X) \leqq n - r$. Il vaut $\varphi_i(x) = 0$, $0 \leqq i \leqq n$, et alors tous les polynômes $\varphi_i(X)$ appartiennent à l'idéal P, ce qui veut dire, que l'on peut les mettre sous la forme $\varphi_i(X) = \Sigma_\nu A_{\nu i}(X) \, . \, G_\nu(X)$. Il en suit

$$\frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial X_k} = \Sigma_\nu A_{\nu i} (x) \frac{\partial G_\nu(x)}{\partial X_k},$$

parce que nous avons $G_\nu(x) = 0$. Ainsi on obtient

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \sum_{k=0}^{n} X_k \frac{\partial \varphi_i (x)}{\partial X_k} = \Sigma_\nu C_\nu (x) \sum_{k=0}^{n} X_k \frac{\partial G_\nu(x)}{\partial X_k}, \qquad (4.1.2)$$

où $C_\nu(X) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i A_{\nu i}(X)$. En comparant les expressions 4.1.2. et 4.1.1., nous en tirons notre assertion, que tous les hyperplans tangents des homaloïdes dans le point (x) — tant qu'ils existent — contiennent la variété linéaire L. Par la le théorème est démontré.

Le nombre $h_1(x)$ est de grande importance pour les variétés de base simple, comme nous le verrons plus tard. Souvent nous avons beaucoup d'avantage — surtout au sens intuitive — de la définition d'un autre caractère numérique, que nous donnons ci-bas:

Définition 4. 1. 22 (x) *étant le point général au dessus de T de la variété à la dimension r, qui est simple dans la base dans S_n, le nombre entier non négatif $q = n - r - h_1(x)$ s'appelle le nombre de conditions de contact du* 1er *ordre de la variété.*

Le théorème suivant est presque évident.

Théorème 4.1.3. *Le nombre de conditions de contact du* 1er *ordre d'une variété de base donnée ne dépend pas du choix du point général de la variété au dessus de T.*

Si (x) est un point général au dessus de T d'une variété de base U à r dimensions, qui est simple dans la base et, qui est une subvariété d'une autre variété de base simple V, et si (x_1) est un point général à la dimension r_1 au dessus de T de la variété V, puis les rélations suivantes ont lieu:

$$(x_1) \to (x) \text{ au dessus de } T; \; r_1 > r; \; h_1(x_1) \geqq h_1(x) \, .$$

Il en suit

$$q_V = n - r_1 - h_1 (x_1) < n - r - h(x) = q_U \, .$$

Nous en déduirons comme conséquence, que si le nombre de conditions de contact du 1er ordre d'une variété de base est égal à zéro, cette variété est nécessairement une composante simple de base. Les composantes de cette sorte existent en effet et elles ont par leur simplicité une importance particulière. Nous donnons à eux le nom spécial:

Définition 4.1.4. *Une composante simple de la base, pour laquelle il y a $q = 0$, s'appelle une composante ordinaire de la base. Quand la composante ordinaire a la dimension zéro, c'est à dire quand elle est réduite à un point, elle s'appelle le point isolé de la base.*

L'interpretation géometrique du nombre q peut etre donnée, comme il suit: Supposons que le symbol L ait la même signification comme en démonstration du théorème 4.1.1, cela veut dire que ce soit la variété linéaire tangente dans le point (x) à la variété de base simple. Désignons par L' une variété linéaire complémentaire à L, alors une variété à $n - r - 1$ dimensions et de telle sorte, que l' intersection de L et de L' est un ensemble vide. Les hyperplans tangents dans le point (x) à tous les homaloïdes — tant qu'ils existent — coupent la variété L' dans un système à $h_1(x) - 1$ dimensions, formé par les variétés linéaires à $n - r - 2$ dimensions. La base de ce système est alors une variété linéaire qui a la dimension $n - r - h_1(x) - 1 = q - 1$. La base est complètement déterminée, si l'on préscrit justement q points linéairement indépendants dans L'. Ainsi le nombre de conditions de contact du 1[er] ordre est égal au nombre de points linéairement indépendants dans L', qui sont nécessaires à déterminer un espace linéaire dans L' commun aux hyperplans tangents à tous les homaloïdes dans le point (x).

4.2. La dimension de fixation et la dimension homologue de la variété de base. — Pour nos études, qui suivront, nous avons besoin d'introduire encore quelques symbols utiles. S'il n'y a pas danger de confusion, nous écrirons simplement h au lieu de $h_1(x)$. Par le symbol $\Delta(x)$ ou simplement Δ nous désignerons un déterminant à h lignes, différent de zéro, choisi de la matrice $H_1(x)$ du rang h. Supposons, que le déterminant soit composé des éléments des lignes aux indices $i_1, i_2 \ldots, i_h$, $0 \leqq i_s \leqq n$, et des colonnes aux indices $k_1, k_2, \ldots, k_h$, $0 \leqq k_s \leqq n$.

Désignons encore par $\Delta_{ij}(x)$ ou simplement par Δ_{ij} un déterminant à h lignes qu'on obtient du Δ en y remplaçant la ligne, qui porte l'indice $i (i = i_1, \ldots, i_h)$, par la ligne à l'indice j $(0 \leqq j \leqq n)$ de la matrice $H_1(x)$, les éléments étant choisis toujours des mêmes colonnes $k_1, \ldots, k_h$ comme auparavant. Cela signifie par exemple, que $\Delta_{ij} = 0$ pour $j = i_1, \ldots, i_h$ et $i \neq j$ et qu'il y a, évidement, $\Delta_{ii} = \Delta$.

Enfin, pour simplifier l'écriture, nous voulons introduire encore une abréviation, à savoir $a_{ij} = \dfrac{\Delta_{ij}}{\Delta}$ $(i = i_1, \ldots, i_h,\ 0 \leqq j \leqq n)$. De ces définitions il est clair, que le déterminant Δ et tous les Δ_{ij} et alors aussi les a_{ij} appartiennent au corps $T(x)$. $S_i(x)$ est, comme auparavant, le point général au dessus de T d'une variété V_i simple dans la base, qui est de la dimension r, nous trouvons r égal à la dimension homogène de l'ensemble (x) au dessus de T et pour cela il y a $\dim_T(a_{ij}) \leqq r$.

Définition 4.2.1. *Le nombre entier non négatif* $s = r - \dim_T(a_{ij})$ *s'appelle la dimension de fixation de la variété dans la base.*

La dimension de fixation peut être évidement définie aussi comme la dimension (homogène) de l'ensemble (x) au dessus du corps $T(a_{ij})$. Son interpretation géometrique sera expliquée mieux plus tard. Les valeurs extrèmes de la dimension de fixation sont évidement des nombres 0 et r et tous les deux peuvent être atteints, comme nous le verrons aux exemples. Si la variété se réduit au point, sa dimension de fixation est toujours égale à zéro, ce qui veut dire — eu égard au théorème 3.1.3. — que le contenu du terme justement défini est trivial pour les transformations de Cremona dans le plan.

Théorème 4.2.2. *La dimension de fixation ne dépende pas du choix du point général au dessus de T de la variété de base.*

Démonstration: Soient (x) et $(\bar{x})$ deux points généraux au dessus de T de la même variété simple dans la base. Nous savons déjà que les deux matrices $H_1(x)$ et $H_1(\bar{x})$ ont le même rang et que les deux déterminantes $\Delta(x)$ et $\Delta(\bar{x})$ différent de zéro simultanément. Cela veut dire qu'on peut, dans les deux cas, définir les éléments $a_{ij}(x)$ et $a_{ij}(\bar{x})$ analogiquement. On voit de suite, qu'il existe une correspondance isomorphe (à voir **13**.p.111; **16**.p.28; **10** b,p.21) entre $T(x)$ et $T(\bar{x})$ et que cette correspondance coordonne $a_{ij}(x)$ à $a_{ij}(\bar{x})$. Il en suit l'énoncé de notre théorème.

Le théorème précédent était nécessaire, pour que la définition 4.2.1. fût légitime. Pour le même raison, il faut, que le théorème suivant soit valable:

Théorème 4.2.3. *La dimèssion de fixation ne dépende pas du choix du déterminant Δ à h lignes, différent de zéro, dans la matrice $H_1(x)$.*

Pour démontrer le théorème, il suffit évidement de faire voir, que la dimension $\dim_T(a_{ij})$ ne change pas, si nous partons de différents déterminants Δ en construisant les éléments a_{ij}. Mais c'est un corollaire immédiat du théorème suivant, qui est plus général.

Théorème 4.2.4. *Soient Δ et Δ' deux déterminants* à *h lignes, non nuls, choisis de la matrice $H_1(x)$, qui est de rang h, et soient a_{ij} les éléments du corps $T(x)$, construits de Δ par le procédé décrit plus haut, $a'_{i'j'}$ les éléments construits par le procédé analogue de Δ'. Puis il y a $T(a_{ij}) = T(a'_{i'j'})$.*

Démonstration: Le déterminant Δ soit composé des éléments de la matrice $H_1(x)$, qui sont pris des lignes $i_1, \ldots i_h$ et des colonnes $k_1, \ldots, k_h$, le déterminant Δ' soit composé des lignes $i'_1, \ldots, i'_h$ et des colonnes $k'_1, \ldots, k'_h$ de la même matrice. Désignons par Δ'' le déterminant composé des lignes $i_1, \ldots, i_h$ et des colonnes $k'_1, \ldots, k'_h$; puis le symbol a''_{ij} a une signification bien compréhensible.

A l'égard du rang h de la matrice $H_1(x)$ on peut écrire

$$\frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_k} = \Sigma_s c_{sk} \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_s}, 0 \leqq i \leqq n, \quad 0 \leqq k \leqq n \qquad (4.2.1.)$$

où l'indice de summation s parcourt les valeurs $k_1, \ldots, k_h$ et c_{sk} sont des éléments du corps $T(x)$. Ainsi nous avons $\Delta'' = \left| \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_{k'}} \right| = |c_{sk'}| \Delta, \; s = k_1, \ldots, k_h$, $k = k'_1, \ldots, k'_h$. Nous verrons plus loin, que $\Delta'' \neq 0$ et alors que $|c_{sk'}| \neq 0$. La transformation (4.2.1) se rapporte aux colonnes entières, de sorte que nous pouvons écrire

$\Delta''_{ij} = |c_{sk'}| \Delta_{ij}$ et de cela $a_{ij} = \frac{\Delta_{ij}}{\Delta} = \frac{\Delta''_{ij}}{\Delta''} = a''_{ij}$. On en déduit naturellement $T(a_{ij}) = T(a''_{ij})$.

Maintenant nous effectuons une combinaison linéaire des lignes de la matrice $H_1(x)$ qui est analogue à celle faite en 4.2.1 sur des colonnes. Nous obtiendrons

$$\frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x_k} = \Sigma_i d_{ij} \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_k}, 0 \leqq j \leqq n, \; 0 \leqq k \leqq n,$$

où l'indice de summation i parcourt des valeurs $i_1, \ldots, i_h$. Dans ce cas, nous pouvons déterminer plus précisement les coefficients d_{ij} de la combinaison: on voit aisément, qu'il y a $d_{ij} = a_{ij}$. Nous trouverons — comme auparavant — que $\Delta' = \left|\frac{\partial\varphi_{i'}(x)}{\partial x_{k'}}\right| = |a_{ii'}|\,\Delta''$, d'ou il suit $\Delta'' \neq 0$ et aussi $|a_{ii'}| \neq 0$, car il est — selon la supposition du théorème — $\Delta' \neq 0$. De même, on a $\Delta'_{i'j} = \Delta''\,.\,|a_{ii''}|$, où l'indice i'' dans le déterminant $|a_{ii''}|$ atteint successivement des valeurs $i'_1, \ldots, i'_h$ excepté la valeur i' qui est remplacée par l'indice j. De ces relation, on voit qu'il y a $a'_{i'j} \epsilon\ T(a''_{ij}) = T(a_{ij})$ et alors $T(a'_{i'j}) \subset T(a_{ij})$. La considération entière peut être, bien entendu, effectuée réciproquement, c'est à-dire, on peut exprimer a_{ij} comme un élément du corps $T(a'_{i'j})$, d'où il suit $T(a_{ij}) \subset (Ta_{i'j})$ et finalement l'énoncé du théorème ,cela veut dire l' égalité $T(a_{ij}) = T(a'_{i'j})$.

Soient encore ξ_i, $i = i_1, \ldots i_h$ de tels éléments, que l'ensemble (ξ) ait la dimension $h - 1$ au dessus de $T(a_{ij})$. Cela se réalise par exemple comme il suit: on prend l'un de ces éléments ξ_i égal à l'unité, les autres étant considérés comme des indéterminés et par conséquent comme algébraiquement indépendants au dessus de $T(a_{ij})$. Désignons enfin par (y) l'ensemble des $n + 1$ éléments donnés par les relations

$$y_j = \Sigma_i a_{ij}\xi_i, \qquad 0 \leqq j \leqq n\,,$$

où l'indice de summation i parcourt, comme dans les cas précédents, des valeurs $i_1, \ldots, i_h$.

Définition 4.2.5. *Le nombre entier non négatif* $p = \dim_T(y)$ *s'appelle la dimension homologue de la variété de base.*

Le sens géometrique et la raison pour le choix du nom de la dimension homologue seront expliqués plus tard.

Théorème 4.2.6. *La dimension homologue ne dépend pas du choix du point général au dessus de T de la variété de base.*

Démonstration: Nous avons vu au cours de la démonstration du théorème 4.2.2., que (x) et (x') étant deux points généraux au dessus de T de la variété de base, il existe un isomorphisme entre $T(x)$ et $T(\bar{x})$ au dessus de T, qui fait correspondre $a_{ij}(x)$ a $a_{ij}(\bar{x})$. Si l'ensemble (ξ) est de la dimension h-1 au dessus de $T(a_{ij}(x))$ et l'ensemble $(\bar{\xi})$ de la dimension h-1 au dessus de $T(a_{ij}(\bar{x}))$, on peut toujours — après un arrangement convenable des indices, s'il en est besoin — étendre notre isomorphisme, de sorte qu'il y ait $a_{ij}(x)\xi_i \sim a_{ij}(\bar{x})\bar{\xi}_i$. Puis évidement, il est aussi $y_j = \Sigma\, a_{ij}(x)\xi_i \sim \Sigma\, a_{ij}(\bar{x})\bar{\xi}_i = \bar{y}_j$, ce qui démontre notre assertion.

Comme dans le cas de la dimension de fixation il faut démontrer encore le théorème suivant:

Théorème 4.2.7. *La dimension homologue de la variété de base ne dépend pas du choix du déterminant Δ, à h lignes, différent de zéro, dans la matrice $H_1(x)$.*

Démonstration: Les symbols Δ, Δ', Δ'' et d'autres ayant la même signification comme dans la démonstration du théorème 4.2.4, nous écrirons plus en détail l'expression pour $a'_{i'j}$ que nous y avons obtenue

$$a'_{i'j} = \begin{vmatrix} a_{i_1i'}, \ldots, a_{i_1j}, \ldots, a_{i_1i'_h} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i_hi'_1}, \ldots, a_{i_hj}, \ldots, a_{i_hi'_h} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{i_1i'_1}, \ldots, a_{i_1i'_h} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i_hi'_1}, \ldots, a_{i_hi'_h} \end{vmatrix}, 0 \leqq j \leqq n, \qquad (4.2.2.)$$

(dans cet expression, nous avons supposé — pour simplifier la forme du premier déterminant — que l'indice i' ne fût pas identique avec i'_1 ou avec i'_h).

Maintenant nous développons le premier déterminant selon des éléments de la colonne à l'indice i':

$$a'_{i'j} = \Sigma_i\, a_{ij} A_{i'i}\,.$$

Cependant, il y a $A_{i'i} = a'_{i'i} \,.\, |a_{ii'}|$, une relation, que nous vérifions aisément en posant dans 4.2.2. succéssivement $j = i_1, \ldots, i_h$. Alors, nous avons

$$a'_{i'j} = \Sigma_i\, a_{ij} \,.\, a'_{i'i} \,.\, |a_{ii'}|\,, \quad 0 \leqq j \leqq n\,, \quad i' = i'_i, \ldots, i'_h$$

D'autre part, il est clair, que le déterminant $|a'_{i'i}|$ est différent de zéro, car il est engagé en relation $\Delta'' = |a'_{i'i}| \,.\, \Delta'$. De cela il suit, que la correspondance entre les deux ensembles d'éléments (ξ) et (ξ') donnée par des relations

$$\xi_i = \Sigma_i\, a'_{i'i} \xi'_i\,, \quad i = i_1, \ldots, i_h\,,$$

est régulière. Si alors l'ensemble (ξ) est de la dimension h-1 au dessus du corps $T(a_{ij})$, l'ensemble (ξ') est de la même dimension au dessus du même corps et aussi au dessus du corps $T(a'_{i'j})$ (voir le théorème 4.2.4). Dans ces conditions nous avons

$$y_j = \Sigma_i\, a_{ij} \xi_i = \Sigma_i a_{ij} \Sigma_{i'} a'_{i'i} \xi'_{i'} = \Sigma_{i'} \xi'_{i'} \Sigma_i a_{ij} a'_{i'j} =$$
$$= \frac{1}{|a_{ii'}|} \sum_i a'_{i'j} \xi'_{i'} = \frac{1}{|a_{ii'}|} \,.\, y'_j\,, \quad 0 \leqq j \leqq n\,. \tag{4.2.3}$$

Cette relation démontre notre théorème et encore plus. On en déduit, que les coordonnées (homogènes) du point (y) ne dépendent pas du choix du déterminant Δ dans la matrice $H_1(x)$.

Nous essayons à trouver des valeurs extrèmes de la dimension homologue. Parce que l'ensemble (ξ) est de la dimension h-1 au dessus de $T(a_{ij})$, il est certainement $p \geqq h$-1 et aussi $p \geqq r$-s. La dimension homologue peut acquérir la valeur zéro — et elle l'acquiert, comme nous le verrons aux exemples — si les deux conditions sont satisfaites simultanément: 1°. Il est $h = 1$, ce qui ne peut arriver que dans le cas, où la variété de base possède au moins une condition de contact du 1[er] ordre; 2°. La dimension de fixation est égale à la dimension de la variété. D'autre part, il est clair, que $p \leqq \dim_T (a_{ij}) + h-1 = r-s + h-1$. En utilisant la relation $h = n-r-q$ nous obtenons l'inégalité $p \leqq n-s-q-1$. On en déduit, que la dimension homologue peut atteindre au plus la valeur $n-1$ et cela arrive pour les composantes de la base ordinaires, dont la dimension de fixation est zéro. Particulièrement, nous avons un théorème:

Théorème 4.2.8. *La dimension homologue d'un point de base isolé est* $p = n-1$.

4.3. Les objets géométriques, correspondants en première approximation aux variétés de base. — D'après le théorème 3.1.2., ce sont les points de base et seulement ces points, auxquels aucun homologue n'est coordonné dans l'autre espace. Néanmoins, si une variété quelconque, dans l' S_n, qui n'appartient pas à la base, passe par un point de base on voit, que la variété correspondante dans l' S'_n est soumise à certaines conditions exprimantes, comment elle se comporte par rapport à une hypersurface fondamentale bien déterminée. Maintenant, nous voulons nous occuper plus en détail du rapport, qui existe, au sens expliqué tout à l'heure, entre les points de base dans un espace et certains points des variétés fondamentales dans l'autre espace.

Soit V une variété simple dans la base, qui est de la dimension r, et soit (x) son point général au dessus de T. Désignons par h le rang $h_1(x)$ de la matrice $H_1(x)$ pour le point (x). Nous avons déjà montré en 4.1., que les hyperplans tangents de tous les homaloides dans le point (x) — tant qu'ils existent — passent par une variété linéaire à $n-h$ dimensions, que nous désignons par M.

Définition 4.3.1. *Les variétés linéaires à $n - h + 1$ dimensions, qui contiennent la variété M, s' appellent les directions tangentes dans le point (x).*

Les directions tangentes peuvent être projectivement coordonnées aux points d'un espace linéaire à h-1 dimensions.

Ci-dessous nous suivrons, par le procédé analytique, l'idée, que nous voulons maintenant expliquer sous une forme approximative. Nous fixons une direction tangente K dans le point (x) et considérons tous homaloides, chez lesquels l'hyperplan tangent dans le point (x) contient la direction tangente K. Par cette demande, on impose aux coordonnées (λ) de l'homalo de général une seule condition linéaire et alors, les hyperplans correspondants dans l'espace S'_n passent par un point fixe K'. Nous définissons: *Le point K' correspond à la direction tangente K.*

Puis nous étendons l'idée de la direction tangente à un point quelconque — soit $(\bar{x})$ — de la variété de base et nous considérons l'ensemble de toutes les directions tangentes dans tous les points de cette variété. L'ensemble de points dans l'espace S'_n, qui correspondent — au sens justement défini — à cet ensemble de directions tangentes de la variété V dans S'_n, s'appelle *un objet géometrique correspondant à la variété de base V en première approximation.*

La formulation précise aussi que le complétement de ces considérations et de ces résultats est contenu en théorème suivant, qui est par cela le résultat principal de nos recherches.

Théorème 4.3.2. *Soit V une variété à r dimensions, simple dans la base dans S_n, et soit (x) son point général au dessus de T; supposons que les nombres h, s, p et les symboles Δ, Δ_{ij}, a_{ij} aient la même signification comme auparavant. Dans ces conditions, à un point $(\bar{x})$, qui est une spécialisation régulière du point (x) au dessus de T, il correspond dans S'_n en première approximation une variété linéaire $\pi(x)$ à $h-1$ dimensions, qui est définie au dessus de $T[a_{ij}(\bar{x})]$. La correspondance est de la manière, que les points de la variété $\pi(x)$ sont projectivement coordonnés aux directions tangentes dans le point (x). De plus, les variétés π engendrent un système à $r-s$ dimensions et l'union de tous leurs points est une variété ω à p dimensions, définie au dessus de T, qui correspond à la variété V en première approximation.*

Démonstration: Comme nous l'avons trouvé déjà plus haut (4.2.2), on peut écrire, sous les hypothèses faites sur le point $(\bar{x})$,

$$\frac{\partial\varphi_j(\bar{x})}{\partial x_k} = \sum_i a_{ij} \frac{\partial\varphi_i(\bar{x})}{\partial x_k}, \quad 0 \leqq j \leqq n, \quad 0 \leqq k \leqq n,$$

où l'indice de summation parcourt des valeurs $i_1, \ldots, i_h$. Dans ce cas l'hyperplan tangent

$$\sum_{j=0}^{n} \lambda_j \sum_{k=0}^{n} X_k \frac{\partial\varphi_j(\bar{x})}{\partial x_k}$$

de l'homaloide général dans le point $(\bar{x})$ peut être écrit en forme

$$\sum_{k=0}^{n} X_k \sum_i \mu_i \frac{\partial \varphi_i(\bar{x})}{\partial x_k},$$

où $\mu_i = \Sigma a_{ij} \varphi_j$, $i = i_1, \ldots, i_h$. Les éléments (μ) sont les coordonnées duales dans l'espace projectif à $h-1$ dimensions, qui est formé par les directions tangentes dans le point $(\bar{x})$. Ainsi, ξ_i, $i = i_1, \ldots, i_h$ étant les coordonnées homogènes d'une direction tangente, la condition pour cela, que l'homaloïde soit tangent à cette direction, s'exprime par la relation

$$\sum_i \xi_i \sum_{j=0}^{n} a_{ij} \lambda_{ij} = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \sum_i a_{ij} \xi_i = 0 .$$

Dans l'espace S'_n à ces homaloïdes correspond un ensemble d'hyperplans, dont les coordonnées sont soumises à la même condition

$$\sum_{j=0}^{n} \lambda_j \sum_i a_{ij} \xi_i = 0 .$$

Par cet équation, un point aux coordonnées $y'_j = \Sigma_i a_{ij} \xi_i$, $0 \leqq j \leqq n$, est determiné. On en voit, qu'à l'ensemble de directions tangentes dans le point (x), il correspond une variété linéaire à $h-1$ dimensions, dont le point général au dessus de $T[a_{ij}(\bar{x})]$ est donné par les égalités

$$y'_j = \Sigma_i a_{ij} \xi_j , \tag{4.3.1}$$

où (ξ) sont des variables au dessus de $T(a_{ij})$. En effet, il est clair, que le rang de la matrice $\|a_{ij}\|$ est justement h, comme nous l'avons trouvé déjà plus haut (voir la démonstration du théorème 4.2.4; la matrice maintenant considérée contient la matrice carrée $\|a_{ii'}\|$). Cela démontre notre assertion sur la dimension de la variété et par conséquence la première partie du théorème concernant les variétés π et la manière, comment leurs points correspondent aux directions tangentes.

Retournons maintenant au point général (x) de la variété V au dessus de T et désignons par $\pi(x)$ la variété linéaire, qui lui correspond en première approximation. Les relations 4.3.1., où l'on a substitué $(\bar{x})$ par (x), donnent le point général au dessus de $T(a_{ij})$ de la variété $\pi(x)$. En effectuant les specialisations régulières $(x) \to (\bar{x})$ au dessus de T, on obtient en relations 4.3.1. toujours les $r-s$ éléments indépendants au dessus de T, tandisque les autres dépendent algébriquement des précédents. Il en suit l'assertion concernant la dimension du système des variétés π. Bien entendu, le système n'est pas nécessairement linéaire. Enfin, la dernière assertion est une conséquence immédiate du fait, que chaque ensemble définit une variété au dessus du corps algebriquement fermé et alors aussi l'ensemble (y') des relations 4.3.1. définit une variété ω qui a p dimensions et qui correspond en première approximation à la variété V. Par cela, le théorème énoncé est completement démontré.

À présent, nous sommes capables de fournir une explication et des motifs pour le choix des noms pour la dimension de fixation et pour la dimension homologue. À un point de la variété de base, tant qu'il est une spécialisation régulière du point général, il correspond en première approximation une variété linéaire. Si l'on passe, sur la variété de base, d'un point à l'autre, la variété correspondante varie dans un système (pas nécessairement linéaire), dont la dimension ne peut pas surpasser la dimension de la variété de base. La dimension de fixation indique, jusqu'à quel degré la dimension du système est diminuée par rapport à la dimension de la variété de base, cela veut dire elle indique la mésure pour la „fixation" des variétés linéaires dans le système.

La dimension homologue est tout simplement la dimension de la variété, qui correspond (est homologue) en première approximation à la variété de base.

Théorème 4.3.3. *Soit $(\bar{x})$ une spécialisation régulière au dessus de T d'un point général (x) de la variété simple dans la base dans S_n. Le point général au dessus de $T(\bar{x})$ de la variété linéaire dans S'_n, qui correspond en première approximation au point $(\bar{x})$, peut s'écrire sous la forme*

$$y'_j = \sum_{k=0}^{n} \eta_k \frac{\partial \varphi_j(\bar{x})}{\partial x_k}, \quad 0 \leq j \leq n, \tag{4.3.2}$$

où (η) est un point général de l'espace S_n au dessus de $T(\bar{x})$.

Démonstration: Le point général au dessus de $T[a_{ij}(\bar{x})]$ de la variété en question est donné par les relations (4.3.1), où (ξ) sont variables au dessus de $T(a_{ij})$. On peut choisir comme ces variables des éléments

$$\xi_i = \sum_{k=0}^{n} \eta_k \frac{\partial \varphi_i(\bar{x})}{\partial x_k}, \quad i = i, \ldots, i_h,$$

où (η) est un point général de l'espace S_n au dessus de $T(\bar{x})$. Dans ces conditions nous avons

$$y'_j = \sum_i a_{ij} \sum_{k=0}^{n} \eta_k \frac{\partial \varphi_i(\bar{x})}{\partial x_k} = \sum_{k=0}^{n} \eta_k \frac{\partial \varphi_j(\bar{x})}{\partial x_k}.$$

Mais, c'est l'assertion de notre théorème, parce qu'il suit de l'observation du rang de la matrice $\left\| \frac{\partial \varphi_j(\bar{x})}{\partial x_k} \right\|$, que le point (y') est de la dimension $h-1$ au dessus de $T(\bar{x})$ et alors qu'il est un point général de la variété en question au dessus du corps $T(\bar{x})$.

La forme (4.3.2) du point général de la variété homologue est plus convenable, s'il n'importe pas aux différentes directions de contact, et au contraire la forme (4.3.1) indique en détail, comment les points de la variété homologue correspondent aux directions tangentes dans le point $(\bar{x})$.

Nous terminerons cette partie par un théorème, qui est une conséquence immédiate des théorèmes 4.2.8; 4.3.3 et 3.2.4.

Théorème 4.3.4. *À un point isolé de base correspond en première approximation un hyperplan de l'autre espace.*

4.4. Les objets géometriques, correspondants en approximations ultérieures. — On pouvait déduire la forme (4.3.2) du point général de la variété homologue aussi par un autre procédé, qui nous montrerait la voie aux recherches suivantes.

L'hyperplan tangent dans le point $(\bar{x})$ à l'homaloïde général est donné par un seul polynôme

$$\sum_{j=0}^{n} \lambda_j \sum_{k=0}^{n} X_k \frac{\partial \varphi_j(\bar{x})}{\partial x_k}. \qquad (4.4.1)$$

Soit (η) le point général de l'espace S_n au dessus de $T(\bar{x})$; considérons une droite donnée par les points $(\bar{x})$ et (η), dont le point géneral a des coordonnées $(\mu_0 x_k + \mu_1 \eta_k)$. Si l'hyperplan 4.4.1 doit contenir la droite en question, il faut, qu'il y ait

$$\sum_{j=0}^{n} \lambda_j \sum_{k=0}^{n} \eta_k \frac{\partial \varphi_j(\bar{x})}{\partial x_k} = 0\,, \qquad (4.4.2)$$

on obtient cette relation après la substitution et l'application du théorème d'Euler sur les fonctions homogènes. On trouve (4.4.2) une condition linéaire pour les homaloïdes qui sont tangents dans le point $(\bar{x})$ à la droite considérée. Les hyperplans, qui correspondent aux homaloïdes satisfaisants à cette condition, forment, dans l' S'_n, une gerbe au sommet

$$y'_j = \sum_{k=0}^{n} \eta_k \frac{\partial \varphi_j(\bar{x})}{\partial x_k}\,, \quad 0 \leqq j \leqq n\,. \qquad (4.4.3)$$

En nous rendrant compte de cela, que (η) était un point général dans l'espace S_n, nous voyons, que la forme (4.4.3) donne le point général au dessus de $T(\bar{x})$ de la variété linéaire, qui correspond, en première approximation, au point $(\bar{x})$. Cette forme est identique avec la forme (4.3.2).

Nous voulons étudier le procédé décrit tout à l'heure plus en détail.

La variété linéaire, homologue à un point isolé de la base est complètement décrite par le théorème 4.3.4. Ce cas n'étant pas trop intéressant, nous le voulons considérer comme accompli.

Si le point $(\bar{x})$ n'est pas un point isolé de la base et s'il est — comme nous le voulons supposer constamment — une spécialisation régulière au dessus de T d'un point général de la variété de base, deux cas peuvent se présenter: 1°, le point $(\bar{x})$ est un point simple d'une variété de base à la dimension égale au moins à l'unité; 2°, le point $(\bar{x})$ représente une variété de base à la dimenson zéro, qui est munie des conditions de contact (dans ce cas, la spécialisation est évidement un isomorphisme). Dans tous les deux cas, il existe une variété tangente linéaire L, qui est touchée dans le point $(\bar{x})$ par tous les homaloïdes. Si l'on choisit pour (η) au lieu du point général de l'espace le point général de la variété L, les relations (4.4.3) cessent de valoir, parce qu'il y a, pour chaque j, $\sum \eta_k \frac{\partial \varphi_j(\bar{x})}{\partial x_k} = 0$. Cela signifie géométriquement, que l' exigence imposée à l'hyperplan tangent de l'homaloïde de contenir la droite $\mu_0 \bar{x}_k + \mu_1 \eta_k$ ne représente aucune condition pour les homaloïdes. Dans ce cas, on peut imposer aux homaloïdes des conditions supplémentaires.

Désignons par (y) le point général au dessus de $T(x)$ de la variété tangente L dans le point $(\bar{x})$ et conservons au symbole (η) sa signification précédente du point général au dessus de T de l'espace S_n. Par les points (x), (y) et (η), un plan ϱ est determiné, dont le point général au dessus de $T(\bar{x}, y, \eta)$ s'écrit

$$y_i = \mu_0 \bar{x}_i + \mu_1 y_i + \mu_2 \eta_i \,, \quad 0 \leqq i \leqq n \,. \tag{4.4.4}$$

Le plan ϱ coupe la variété linéaire tangente L suivant une droite $(\bar{x}, y)$; on obtient les points de cette droite en effectuant la spécialisation $\mu_2 \to 0$.

La polaire quadratique d'un homaloïde général par rapport du point $(\bar{x})$ est donnée par le polynôme

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \sum_{j,k} X_j X_k \frac{\partial^2 \varphi_i(\bar{x})}{\partial x_j \partial x_k} \,. \tag{4.4.5}$$

Le plan ϱ coupe la polaire quadratique (4.4.5) suivant une conique, qui touche la droite $(\bar{x}, y)$. On obtient l'expression pour cette conique dans le plan ϱ, c.-à-d. un polynôme exprimé dans les indéterminées μ_0, μ_1, μ_2, en substituant dans (4.4.5) pour les X_j, X_k les relations (4.4.4):

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \sum_{j,k} (\mu_0 \bar{x}_j + \mu_1 y_j + \mu_2 \eta_j)(\mu_0 \bar{x}_k + \mu_1 y_k + \mu_2 \eta_k) \frac{\partial^2 \varphi_i(\bar{x})}{\partial x_j \partial x_k} \,.$$

Il en suit

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \sum_{j,k} \frac{\partial^2 \varphi_i(\bar{x})}{\partial x_j \partial x_k} [\mu_0^2 \bar{x}_j \bar{x}_k + \mu_0 \mu_1 (\bar{x}_j y_k + \bar{x}_k y_j) + \mu_0 \mu_2 (\bar{x}_j \eta_k + \bar{x}_k \eta_j) +$$
$$+ \mu_1^2 y_j y_k + \mu_1 \mu_2 (y_j \eta_k + y_k \eta_j) + \mu_2^2 \eta_j \eta_k].$$

Eu égard aux égalités

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j,k} \bar{x}_j \bar{x}_k \frac{\partial^2 \varphi_i(\bar{x})}{\partial x_j \partial x_k} = r_1(r_1 - 1)\, \varphi_i(\bar{x}) = 0 \,, \\ &\sum_{j,k} (\bar{x}_j y_k + \bar{x}_k y_j) \frac{\partial^2 \varphi_i(\bar{x})}{\partial x_j \partial x_k} = 2(r_1 - 1) \sum_{k=0}^{n} y_k \frac{\partial \varphi_i(\bar{x})}{\partial x_k} = 0 \,, \end{aligned}\right\} 0 \leqq i \leqq n \,,$$

nous pouvons donner à l'expression précédente la forme plus convenable

$$2(r_1 - 1)\mu_0 \mu_2 \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \sum_{k=0}^{n} \eta_k \frac{\partial \varphi_i(\bar{x})}{\partial x_k} + \mu_1^2 \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \sum_{j,k} y_j y_k \frac{\partial^2 \varphi_i(\bar{x})}{\partial x_j \partial x_k} +$$
$$+ \mu_1 \mu_2 \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \sum_{j,k} (y_j \eta_k + y_k \eta_j) \frac{\partial^2 \varphi_i(\bar{x})}{\partial x_j \partial x_k} + \mu_2^2 \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \sum_{j,k} \eta_j \eta_k \frac{\partial^2 \varphi_i(\bar{x})}{\partial x_j \partial x_k} \,. \tag{4.4.6}$$

S'il y a maintenant

$$2(r_1 - 1) a_1 \mu_0 \mu_2 + a_2 \mu_1^2 + a_3 \mu_1 \mu_2 + a_4 \mu_2^2 \tag{4.4.7}$$

une conique quelconque dans le plan ϱ, qui touche la droite $(\bar{x}, y)$ dans le point $(\bar{x})$, nous pouvons chercher l'ensemble des homaloïdes, dont la polaire quadratique oscule la conique (4.4.7) dans le point (x). Nous constaterons, qu'aux homaloïdes de cet ensemble une seule condition linéaire pour λ est préscrite, ce qui veut dire que, dans l'espace S_n', des objets homologues à ces homaloïdes sont les hyperplans passants par un point fixe. Si la conique et le plan lui même varient, le point trouvé ci-haut parcourt un ensemble de points dans l' S_n' et cet ensemble est une variété, comme nous le démontrerons plus bas. Nous voulons nommer cette variété *une variété correspondant au point* $(\bar{x})$ *en seconde approximation.*

Nous pouvons aussi demander, que la polaire quadratique des homaloïdes ait dans le point $(\bar{x})$ le contact d'ordre trois avec la conique considérée. De cela on déduit deux conditions pour λ. Nous pourrons démontrer, que ce procédé mène, sous quelques conditions supplémentaires, à une variété réglée dans l' S_n' et nous dirons que *cette variété corresponde au point* $(\bar{x})$ *en seconde approximation ultérieure.*

Maintenant, nous voulons exposer nos idées sous une forme précise.

Théorème 4.4.1. *La signification des symboles* $(\bar{x})$, (y), (η) *étant la même comme auparavant, nous avons: Aux homaloïdes, dont les polaires quadratiques osculent dans le point* $(\bar{x})$ *la conique* (4.4.7), *correspondent, dans l'* S_n', *des hyperplans passants par le point aux coordonnées*

$$x_i' = a_2 \sum_{k=0}^{n} \eta_k \frac{\partial \varphi_i(\bar{x})}{\partial x_k} - a_1 \sum_{j,k} y_j y_k \frac{\partial^2 \varphi_i(\bar{x})}{\partial x_j \partial x_k}, \qquad 0 \leq i \leq n, \tag{4.4.8}$$

Si, en outre, la conique (4.4.7) *et la polaire quadratique des homaloïdes doivent avoir le contact d'ordre trois dans le point* (x), *l'hyperplan homologue dans l'* S_n' *est obligé passer aussi par le point* (4.4.8) *et au surplus encore par un second point aux coordonnées*

$$y_i' = a_3 \sum_{k=0}^{n} \eta_k \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_k} - a_1 \sum_{j,k} (\eta_k y_j + \eta_j y_k) \frac{\partial^2 \varphi_i(\bar{x})}{\partial x_j \partial x_k}, \; 0 \leq i \leq n. \tag{4.4.9}$$

Démonstration: Si les deux coniques (4.4.6) et (4.4.7) doivent avoir, dans le point (x), une intersection au moins triple respectivement au moins quadruple, il est nécessaire et il suffit, que le polynôme quadratique, résultat de l'élimination de la coordonnée μ_0 des expressions (4.4.6) et (4.4.7), soit divisible par μ_2 respectivement par μ_2^2. Cela signifie en premier cas la condition

$$a_2 \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \sum_{k=0}^{n} \eta_k \frac{\partial \varphi_i(\bar{x})}{\partial x_k} - a_1 \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \sum_{j,k} y_j y_k \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_j \partial x_k} = 0 \tag{4.4.10}$$

en seconde cas la même condition et encore une autre

$$a_3 \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \sum_{k=0}^{n} \eta_k \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_k} - a_1 \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \sum_{j,k} (\eta_k y_j + \eta_j y_k) \frac{\partial^2 \varphi_i(\bar{x})}{\partial x_j \partial x_k} = 0. \tag{4.4.11}$$

Ainsi nous avons obtenu des conditions linéaires pour λ. Aux homaloïdes satisfaisants des hypothèses du théorème correspondent, dans l' S_n', des hyperplans, les coordonnées de lesquels sont soumises à la même condition (4.4.10) respectivement aux deux conditions (4.4.10) et (4.4.11), c'est à dire, les hyperplans passent par le point aux coordonnées (4.4.8) respectivement par ce point et encore par le point aux coordonnées (4.4.9). C'est ce que nous voulions démontrer.

L'osculation d'une conique quelconque dans le point (x) s'obtient par spécialisation des points (η) et (y) et de la proportion $a_2 : a_1$, dans la condition (4.4.9). A cette spécialisation, le point (4.4.8) parcourt une variété, ce qui suit immédiatement du fait, que les coordonnées x_i' dépendent rationnellement de (η), de (y) et de $a_2 : a_1$. On en voit, que le point (4.4.8) est un point général au dessus de $T(x)$ d'une variété, qui correspond au point $(\bar{x})$ en seconde approximation. Nous ne voulons y aller plus en détails; nous prions le lecteur de vérifier lui même, que le point général au dessus de $T(\bar{x})$ d'une variété, qui correspond au point (x) en seconde approximation ultérieure est donné par les expressions

$$z_i' = a_2 a_3 \sum_{=0}^{n} \eta_k \frac{\partial \varphi_i(\bar{x})}{\partial x_k} - a_1 \sum_{j,k} [a_3 y_j y_k + a_2(\eta_k y_j - \eta_j y_k)] \frac{\partial^2 \varphi_i(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_k}, \quad 0 \leqq i \leqq n,$$

et que cette variété est reglée, si deux au moins points des trois cités ci-bas sont différents:

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \eta_k \frac{\partial \varphi_i(\bar{x})}{\partial x_k}\right); \left(\sum_{j,k} y_j y_k \frac{\partial^2 \varphi_i(\bar{x})}{\partial x_j \partial x_k}\right); \left(\sum_{j,k} (\eta_k y_j - \eta_j y_k) \frac{\partial^2 \varphi_i(\bar{x})}{\partial x_j \partial x_k}\right), \quad 0 \leqq i \leqq n .$$

On peut, par un procédé analogue, introduire la troisième approximation ou même les approximations d'ordres encore plus élevés, s'il en est besoin. Néanmoins, nous ne déduirons pas des formules générales, car on choisit toujours des méthodes spéciales pour réaliser les approximations plus élevées d'après la nature des conditions préscrites aux homaloïdes dans le point donné.

5. Quelques exemples.

5.1. La transformation monoïdale cubique dans l' S_3. — Nous nous proposons d'étudier une transformation monoidale cubique dans l'S_3, qui est donnée par les relations

$$\begin{aligned}
\varrho X_0' &= X_0(X_0^2 - X_0 X_1 + 2X_1 X_3), & \sigma X_0 &= X_0'(X_0' X_2' + X_3'^2 - 2X_2' X_3'),\\
\varrho X_1' &= X_0^2(X_2 - X_3), & \sigma X_1 &= X_0'^2(X_2' - X_3'),\\
\varrho X_2' &= X_3(X_0^2 + X_1 X_3), & \sigma X_2 &= X_3'(X_3'^2 - 2X_2' X_3' + X_0' X_1' -\\
& & &\quad - X_1' X_3' + X_0' X_2'),\\
\varrho X_3' &= X_3(X_0^2 - X_0 X_1 + 2X_1 X_3), & \sigma X_3 &= X_3'(X_0' X_2' + X_3'^2 - 2X_2' X_3').
\end{aligned}$$

La base dans l'S_3 est formée par deux droites (X_0, X_1); (X_0, X_3) et par deux points (1, 1, 0, 0) et (1, −1, 1, 1), dans l'S_3' par trois droites (X_0', X_3'); (X_2', X_3'); $(X_0' - X_3', X_2' - X_3')$ et par un point (0, 0, 1, 2).

Nous construirons la matrice $H_1(X)$

$$\begin{pmatrix} 3X_0^2 - 2X_0X_1 + 2X_1X_3, & -X_0^2 + 2X_0X_3, & 0, & 2X_0X_1 \\ 2X_0X_2 - 2X_0X_3, & 0, & X_0^2, & -X_0^2 \\ 2X_0X_3, & X_3^2, & 0, & X_0^2 + 2X_1X_3 \\ 2X_0X_3 - X_1X_3, & -X_0X_3 + 2X_3^2, & 0, & X_0^2 - X_0X_1 + 4X_1X_3 \end{pmatrix}$$

L'union des hypersurfaces fondamentales dans l'espace S_n est composé des plans X_0; X_3; $X_0 - X_3$, dont le premier est quadruple dans la Jacobienne, et d'un cône quadratique au sommet en point O_2: $X_0^2 - X_0X_1 + 2X_1X_3$. La matrice $H_1(X)$ possède le rang zéro pour le point général $(0, x_1, x_2, 0)$ de la droite (X_0, X_3), de sorte que la droite est au moins double dans la base (voir définitions **3.3.1**; **3.3.2**). On pourrait se persuader, qu'elle est justement double, si l'on examinait la matrice $H_2(X)$ pour le point $(0, x_1, x_2, 0)$. La duplicité de la droite de base dans l'S_3 est une propriété caractéristique de la transformation monoïdale cubique (voir [**12**]).

En ce qui concerne des points de base (1, 1, 0, 0) et (1, −1, 1, 1), on trouve $h_1 = 3$, ce qui signifie, que les deux points sont les points isolés de base (définition **4.1.4**) et suivant le théorème 4.3.4 il leur corresponde en première approximation un plan fondamentale. On voit aisément, que c'est le plan X_3', s'il s'agit du point (1, 1, 0, 0) et le plan $X_0' - X_3'$, s'il s'agit de l'autre point.

Les circonstances beaucoup plus intéressantes ont lieu pour la droite (X_0, X_1). Le point général $(0, 0, x_2, x_3)$ de cette droite au dessus de T donne

$$H_1(0, 0, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2x_3^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de sorte que $h_1 = 1$ et la droite est une variété de base avec une condition de contact de 1[er] ordre (définition **4.1.2**), qui consiste dans le fait, que le plan tangent de tous les homaloides lelong de la droite (à l'exception du point O_2) est fixe et qu'il coïncide avec le plan X_1. Le point O_2 est une spécialisation irrégulière du point général $(0, 0, x_2, x_3)$ au dessus de T (définition **3.3.7**), il est double dans la base et simultanément un point double uniplanaire pour l'homaloïde général.

Retournons au point général de la droite. Nous prenons comme déterminant à une colonne Δ l'élement x_3^2 de la troisième ligne. Évidement, ils n'existent que deux proportions différentes de zéro, à savoir $a_{22} = 1$, $a_{23} = 2$. Il en suit, que la dimension de fixation (voir définition **4.2.1**) est égale à l'unité et que la dimension homologue (définition **4.2.5**) $p = 0$. Suivant le théorème 4.3.2. nous constatons, qu' à chaque point de la droite (à l'exception du point O_2) aussi qu'à la droite même, il corresponde en première approximation toujours le même point (0, 0, 1, 2). On obtient les coordonnées de ce point conformément des formules (4.3.1) et (4.3.2).

Maintenant nous allons exécuter des recherches analogues dans l'espace S_3'. Le lecteur veuille vérifier lui même, que, dans ce cas, la Jacobienne exprime une union des surfaces, composée des plans fondamentaux X_0'; X_3'; $X_0' - X_3'$, dont chacun est compté deux fois, et d'un cône quadratique au sommet O_1': $X_3'^2 + X_0'X_2' - 2X_2'X_3'$.

La droite (X_0', X_3') — en analogie avec le cas précédent — se présente comme une droite double dans la base dans l'S_3'. C'est nécessaire, parce qu'une transformation monoïdale doit être monoïdale dans tous les deux espaces ambients. **[12]**.

Pour le point général $(x_0', x_1', 0, 0)$ de la droite (X_2', X_3') on a:

$$H_1'(x_0', x_1', 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_0'^2 & 0 \\ 0 & 0 & x_0'^2 & -x_0'^2 \\ 0 & 0 & 0 & x_0'x_1' \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il y a $h = 2$ et la droite est une variété ordinaire de la base. En prenant $\Delta = -x_0'^4$, nous avons $s = 0$ et $p = 2$. La spécialisation irrégulière est le point $(0, 1, 0, 0)$, c'est à dire le point d'intersection de la droite considérée avec la droite (X_0', X_3'); le point est double, biplanaire dans la base. Ainsi, toutes les conclusions, qui suivront, perdent leur valeur pour ce point exclusif. D'autre part, pour tout autre point $(x_0', x_1', 0, 0)$, $x_0' \neq 0$, de la droite, notre théorie dit, que l'homologue est une droite dans le plan X_3, passant par le point $(1, 1, 0, 0)$. À la droite (X_2', X_3') en entier correspond en première approximation le plan fondamental X_3.

On trouve des circonstances tout à fait analogues aussi pour la droite $(X_0' - X_3', X_2' - X_3')$. A un point, qui est une spécialisation régulière du point général, correspond une droite dans le plan $X_0 - X_3$, passant par le point $(1, -1, 1, 1)$; le plan $X_0 - X_3$ est l'homologue en première approximation de la droite en entier. Comme la spécialisation irrégulière on retrouve ici encore une fois le point double O_1.

Alors, c'est le point $(0, 0, 1, 2)$ seul, qui nous reste à étudier dans l'espace S_3'. À ce point nous avons

$$H_1'(0, 0, 1, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -8 & 4 \\ 2 & 0 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

de sorte qu'il y a $h_1 = 2$ et le point en question possède une condition de contact du 1er ordre. Cette condition consiste en fait, que l'homaloïde général touche dans le point $(0, 0, 1, 2)$ la droite donnée par les polynômes X_1', X_0', $-4X_2' + 2X_3'$. Des recherches plus approfondies on déduit, qu'il y a $s = 0$, $p = 1$ et que c'est la droite de base (X_0, X_1), qui correspond en première approximation au point $(0, 0, 1, 2)$.

En cherchant des objets homologues en seconde approximation aux variétés de base considérées ci-haut, on n'obtient de nouveaux résultats que pour la droite (X_0, X_1) dans l' S_3 et pour le point $(0, 0, 1, 2)$ dans l'S_3', alors pour les variétés, qui était munies des conditions de contact.

Le point général au dessus de T de la droite (X_0, X_1) soit $(0, 0, x_2, x_3)$, le point général au dessus de $T(x)$ du plan tangent soit $(y_0, 0, y_2, y_3)$ et enfin $(\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3)$ soit le point général au dessus de T de l'espace S_3. Suivant des formules (4.4.8) on a

$$\begin{aligned} x_0' &= 0, \\ x_1' &= -a_1 y_0^2 \, . \, (2x_2 - 2x_3), \\ x_2' &= a_2 \eta_1 x_3^2 - a_1 y_0^2 \, . \, 2x_3, \\ x_3' &= a_2 \eta_1 \, . \, 2x_3^2 - a_1 y_0^2 \, . \, 2x_3. \end{aligned}$$

Les expressions obtenues peuvent être simplifiées, si l'on substitue $a_2\eta_1 = \alpha$, $-2a_1y_0^2 = \beta$. Après cela on détermine aisément l'homologue du point général de la droite (X_0, X_1) en seconde approximation. L'homologue est une droite donné par deux point (0, 0, 1, 2) et $(0, x_2 - x_3, x_3, x_3)$. En effectuant toutes les spécialisations régulières du point $(0, 0, x_2, x_3)$, nous obtiendrons comme homologues en seconde approximation des droites d'un faisceau, qui est situé dans le plan X_0' et qui a pour son sommet le point de base (0, 0, 1, 2). Plus précisement, les points de la droite (X_0, X_1) et les droites correspondantes du faisceau en S_3' sont coordonnés projectivement. Finalement, à la droite en question en entier correspond en seconde approximation le plan X_0'.

Nous voulons montrer la seconde approximation encore pour le point (0, 0, 1, 2) dans l' S_3'. Ici il faut prendre pour (y) le point général de la droite $(X_1', X_0' - 4X_2' + 2X_3')$, c'est-à-dire le point $(4y_2 - 2y_3, 0, y_2, y_3)$ Ainsi nous obtenons dans l'espace S_3

$$x_0 = 0;\ x_1 = 8a_1(2y_2 - y_3)^2;\ x_2 = 2a_2(\eta_0 - 2\eta_1 - 4\eta_2 + 2\eta_3) - 4a_1(2y_2 - y_3)^2;$$
$$x_3 = 2a_2(\eta_0 - 4\eta_2 + 2\eta_3) - 4a_1(2y_2 - y_3)^2 .$$

Tout ce qui suit peut se simplier par introduction des paramètres nouveaux

$$-4a_1(2y_2 - y_3)^2 = \alpha; \quad 2a_2(\eta_0 - 4\eta_2 + 2\eta_3) = \beta; \quad -4a_2\eta_1 = \gamma .$$

par cela on a

$$x_0 = 0; \quad x_1 = -2\alpha; \quad x_2 = \alpha + \beta + \gamma; \quad x_3 = \alpha + \beta .$$

La seconde approximation donne alors le plan X_0 dans l'S_3 comme l'homologue du point (0, 0, 1, 2). La formule peut fournir des renseignements plus detaillés sur les objets homologues aux différentes coniques d'osculation, cependant nous ne voulons pas y entrer. Nous ne nous apercevrons que d'une seule circonstance.

Par l'introduction des paramètres nouveaux α, β, γ nous avons montré, que le point (y) n'a pas le rôle décisif en détermination du plan ϱ et de la conique. C'est naturel, car tous les plans considérés contiennent la droite tangente entière. La position du plan est déterminée déjà par le point (η), c'est-à-dire par la proportion $\beta : \gamma$. Cela veut dire, que, après l'élimination du paramètre α, nous devons obtenir le faisceau de droites dans l' S_3. En effet, la droite générale du faisceau est donné par des polynômes

$$X_0 \quad \text{et} \quad 2\beta(X_2 - X_3) - \gamma(2X_3 + X_1) . \tag{5.1.1.}$$

Les droites différentes du faisceau s'obtiennent par la spécialisation de la proportion $\beta : \gamma$ et on en déduit facilement, que chaque droite correspond à une position du plan ϱ et que chaque point d'une certaine droite correspond à l'osculation d'une conique dans le plan appartenant. Le sommet du faisceau (5.1.1), à savoir le point (0, —2, 1, 1), est l'homologue à la tangente fixe des homaloides dans le point (0, 0, 1, 2) dans l'S_3'. Il est intéressant, que le point (0, —2, 1, 1) n'est pas le point de base dans l' S_3', que c'est un point ordinaire du plan fondamental X_0. Le lecteur peut se persuader assez facilement lui même, que chaque droite dans l'espace S_3, qui passe par le point (0, —2, 1, 1) et qui n'a pas un point commun avec une variété quelconque de base dans l'S_3, est transformée en une courbe cubique dans l'S_3' ayant la droite $(X_1', X_0' - 4X_2' + 2X_3')$ pour sa tangente d'inflexion en point (0, 0, 1, 2).

5.2. L'involution simplexale dans l' S_n. La transformation à étudier soit donnée par les relations

$$X'_0 : X'_1 : \ldots : X'_n = \frac{1}{X_0} : \frac{1}{X_1} : \ldots : \frac{1}{X_n}$$

On voit tout de suite de la forme des équations, que la transformation est une involution. Nous l'appellons la transformation simplexale dans l' S_n, spécialement, pour $n = 3$, la transformation tétraèdrale (**11**). Le nom provient du rapport étroit de la transformation au simplex des coordonnées. Elle est un cas spécial de la transformation dite normale dans l' S_n, qui est une transformation de degré n ayant toutes les variétés de base simples et à $n - 2$ dimensions.

Dans notre cas, les hypersurfaces fondamentales sont des hyperplans du simplex des coordonnées, il existe en somme $\binom{n}{2}$ variétés de base qui sont linéaires, à $n - 2$ dimensions et simples dans la base. Nous voulons examiner qu'est-ce que correspond par exemple à la variété de base donnée par les polynômes homogènes X_0, X_1. Pour le point général de cette variété il y a

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & x_2x_3 \ldots x_n & 0 & \ldots & 0 \\ x_2x_3 \ldots x_n & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Le rang de la matrice est $h_1 = 2$, ce qui signifie, que la variété en question est une variété de base ordinaire. Chaque point qu'elle a commun avec une autre variété de base est une spécialisation irrégulière, car il est double au moins dans la base. Suivant les définitions du paragraphe 4.2., nous constatons, que la dimension de fixation est égale à $n - 2$ et la dimension homologue à $p = 1 = h_1 - 1$. Pour la dimension donnée de la variété nous y avons la plus grande fixation comme elle est possible et par suite aussi la plus petite dimension homologue. Nous avons alors le résultat: À chaque point da la variété, qui est une spécialisation régulière du point général, correspond toujours la même droite $0_0 0_1$ dans S'_n; cette droite est alors l'homologue en première approximation à la variété de base entière.

Dans ce cas, la seconde approximation de même que les approximations ultérieures ne peuvent donner rien de plus. Ici on le voit tout de suite, parce que la variété linéaire tangente L se confond avec la variété de base elle même.

5.3. La transformation quadratique specialisée du plan. Le dernier example soit une transformation quadratique déterminée dans le plan S_2 respectivement S'_2 par des relations

$$\begin{aligned} \varrho X'_0 &= X_0X_2 + kX_1^2 & \qquad \sigma X_0 &= X'_0X'_2 - kX'^2_1 \\ \varrho X'_1 &= X_1X_2 & \sigma X_1 &= X'_1X'_2 \\ \varrho X'_2 &= X_2^2 & \sigma X_2 &= X'^2_2 \end{aligned} \qquad (k \neq 0)$$

La base dans le plan S_2 est formée par le seul point O_0 et par analogie dans le plan S'_2 par le seul point O'_0. La Jacobienne

$$\begin{vmatrix} X_2 & 2kX_1 & X_0 \\ 0 & X_2 & X_1 \\ 0 & 0 & 2X_2 \end{vmatrix} = 2X_2^3$$

montre une seule hypersurface fondamentale, à savoir la droite O_0O_1, dans l' S_2 et le même résultat dans le plan S_2'. Nous voulons appliquer notre théorie au point O_0. Nous constatons qu'il y a $h_1 = 1$ ce qui veut dire que le point O_0 possède une condition de contact. La dimension de fixation — come toujours dans le cas du plan — est égale à zéro et alors la dimension homologue ne peut pas surpasser ce nombre. L'homologue en première approximation du point O_0 est le point O_0'.

Nous employons la seconde approximation et nous choisissons $(x_0, x_1, x_2) = (1,0,0); (y) = (y_0, y_1, 0)$. Après cela, nous avons

$$x_0' = a_2\eta_2 - a_1\, 2ky_1^2\eta_1; \quad x_1' = 0; \quad x_2' = 0\,, \tag{5.3.1}$$

c'est à dire encore une fois le point O_0'.

Alors, dans ce cas, on est obligé d'employer la seconde approximation ultérieure qui donne

$$y_0' = a_3\eta_2 - a_1\eta_2 y_0 - 4a_1k\eta_1y_1; y_1' - a_1y_1\eta_2; y_2' = 0 \tag{5.3.2}$$

c'est à dire la droite fondamentale $O_0'O_1'$. Des relations (5.3.1) et (5.3.2) il suit, que la proportion $a_2 : a_1$ n'a aucune importance pour la détermination de l'homologue au point O_0 et qu'il n'importe qu'à proportion $a_3 : a_1$. Le fait a cette signification géométrique: Si l'on préscrit aux homaloïdes — cela veut dire, dans notre cas, aux coniques — qu'elles doivent osculer au point O_0 une conique donné, on n'a formulé aucune condition pour eux. En effet, les homaloïdes ou bien ne peuvent pas satisfaire à cette condition et ils dégénèrent (deviennent une union de deux droites), ou bien ils la satisfont automatiquement. Pour cela il est nécessaire désirer le contact d'ordre trois avec une conique variable, pour qu'on obtienne une condition.

Bibliographie.

1. *B. Bydžovský:* Úvod do algebraické geometrie, Praha, 1948.
2. *L. Derwidué:* Sur les élements fondamentaux des transformations birationnelles de l'espace à quatre dimensions, Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, Cl. des Sc., tom 1938, p. 523.
3. *L. Derwidué:* Sur les surfaces fondamentales des transformations birationnelles de l'espace à quatre dimensions, Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, Cl. des. Sc., tom 1938. p. 566.
4. *L. Derwidué:* Sur les surfaces fondamentales de seconde espèce des transformations birationnelles de l'espace à quatre dimensions, ibidem, tom. 1938, p. 710.

5.—6. *L. Derwidué:* Sur les élements fondamentaux des transformations birationnelles hyperspatiales, Mém. de la Soc. roy. des Sc. Liége, série 4., tom III, No 4, 1939 et tom IV, No 1, 1940.

7. *G. Dufrane:* Sur une transformation birationnelle de l'espace à quatre dimensions . . ., Bull. de l'Acad. roy. de Belg., Cl. des Sc., tom 1937, p. 364.
8. *L. Godeaux:* Les transformations birationnelles du plan, Paris, 1926.
9. *L. Godeaux*: Les transformations birationnelles de l'espace, Paris, 1931.
10. *W. Hodge et D. Pedoe:* Methods of algebraic geometry, Cambridge 1947, 1952. Dans notre article est citée la traduction russe: Metody algebraičeskoj geometrii, Moskva 1954, a) tom I; b) tom II., c) tom III.
11. *H. Hudson:* Cremona transformations in plane and space, Cambridge, 1927.
12. *J. Metelka:* Tři kapitoly o monoidálních transformacích v S_r, Rozpr. II. tř. Čes. ak., tom LVIII, No 10.
13. *B. L. v. d. Waerden:* Einführung in die algebraische Geometrie, Berlin, 1939.
14. *B. L. v. d. Waerden:* Moderne Algebra, Berlin 1931. a) tom I; b) tom II.
15. *B. L. v. d. Waerden:* Algebraische Korrespondenzen und rationale Abbildungen, Math. Anal., 110 (1934).
16. *A. Weil:* Foundations of algebraic Geometry, N. York, 1946.
17. *O. Zariski:* Algebraic surfaces, Berlin 1955 „Ergebnisse der Math."

РЕЗЮМЕ

О ПРОСТЫХ МНОГООБРАЗИЯХ БАЗИСА В КРЕМОНОВЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ

ИОСИФ МЕТЕЛКА

Первые две главы посвящены вводным предложениям и общей теории алгебраических преобразований, включая определение кремоновых преобразований в S_n (смотри 2.2.1 и 2.2.2.). В следующей главе припоминаются коротко главные свойства многообразий базиса и главных многообразий, определяется аналитически кратность многообразий базиса, используя ранг $h_m(x)$ матрицы $H_m(x), 1 \leq m \leq r_1$, с $h+1$ строками, которая составлена из частных производных $\frac{\partial^m \varphi_i(x)}{\partial x_0^{\alpha_0} \ldots \partial x_n^{\alpha n}}$.

Все остальное касается только простых многообразий, то есть таких, для которых $h_1(x) > 0$. При помощи ранга $h_1(x)$, определяется неотрицательное число $q = n - r - h_1(x)$, называмое числом условуй прикосновения первой степени. Означает ли $\Delta \neq 0$ определитель с h строками, выбранный из $H_1(x)$, и Δ_{ij} определитель, который получается из Δ заменой строки с индексом i строкой с индексом j, и, наконец означает ли $a_{ij} = \frac{\Delta ij}{\Delta}$, то можно определить еще два неотрицательных числа: $s = h - \dim_T (a_{ij})$, называемое размерностью прикрепления, и $p = \dim_T (\sum_i a_{ij} \xi_i)$($\xi_i$—однородные переменные) называемое гомологической размерностью. Числа q, s, p являются характеристическими инвариантами многообразия базиса.

Дальше доказывается теорема 4.3.2., в которой говорится, что образование соответствующее в первом приближении точке $(\bar{x})$ многообразия базиса, который является простим и имеет размер r, есть линейное многообразие (h-1)-размерное, общая точка которого определена 4.3.1.. Многообразия, таким образом полученные, образуют (r-s)-размерную систему (не всегда линейную) и p-размерное многообразие, соответствующее исследованному многообразию базиса.

В дальнейшем изучаются другие апроксимации, предпологая, что существуют условия прикосновения. Здесь имеет дело с соприкасающимся гомолоидом и с определенными коническими сечениями в точке $(\bar{x})$. Из исследования вытекают 4.4.8. и 4.4.9., которые определяют общую точку соответствующих многообразий.

Пятая глава посвящена нескольким примерам. Многообразия базиса, с которыми здесь встречаемся, удовлетворяют условиям прикосновения, у них положительный размер прикрепления, и могут поэтому хорошо иллюстрировать предыдущую теорию.

SHRNUTÍ

O JEDNODUCHÝCH VARIETÁCH BÁZE V CREMONOVÝCH TRANSFORMACÍCH

JOSEF METELKA

První dva paragrafy jsou věnovány úvodním poznámkám o obecné teorii algebraických transformací včetně definice Cremonovy transformace v S_n (viz rovnice 2.2.1. a 2.2.2.). V dalším paragrafu se krátce připomínají hlavní vlastnosti variet báze a hlavních variet, definuje se analyticky násobnost variet báze za použití hodnosti $h_m(x)$ matice $H_m(x)$, $1 \leqq m \leqq r_1$, o $n+1$ řádcích, která je sestavena z parciálních derivací $\dfrac{\partial^m \varphi_i(x)}{\partial x_0^{\alpha_0} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$.

Vše další se týká jen jednoduchých variet, tj. takových, pro něž $h_1(x) > 0$. Definuje se pomocí hodnosti $h_1(x)$ nezáporné číslo $q = n - r - h_1(x)$, nazvané počet podmínek dotyku prvního řádu. Je-li $\Delta \neq 0$ determinant o h řádcích vybraný z $H_1(x)$, Δ_{ij} determinant, který obdržíme z Δ nahrazením řádku o indexu i řádkem o indexu j, a je-li konečně $a_{ij} = \dfrac{\Delta_{ij}}{\Delta}$, můžeme definovat další dvě nezáporná čísla $s = r - \dim_T(a_{ij})$, nazvané rozměr upoutání, a $p = \dim_T (\Sigma\, a_{ij}\xi_i)$ (ξ_i jsou homogenní proměnné), tzv. homologický rozměr. Čísla q,s,p jsou invariantní charaktery variety báze.

Dále je dokázána věta 4.3.2., která říká, že útvar odpovídající v prvním přiblížení bodu (x) variety báze, jež je jednoduchá a má rozměr r, je lineární varieta $(h-1)$ rozměrná, jejíž obecný bod je dán vzorcem 4.3.1. Variety, které tak dostaneme, tvoří $(r-s)$- rozměrný systém (ne nutně lineární) a vytvářejí p-rozměrnou varietu odpovídající vyšetřované varietě báze.

V dalším se studují další aproximace za předpokladu, že existují podmínky dotyku. Jde o oskulaci homaloidu a jisté kuželosečky v bodě (x). Z tohoto vyšetřování plynou formule 4.4.8 a 4.4.9, jež dávají obecný bod odpovídajících variet.

Pátý paragraf je věnován několika příkladům. Variety báze, které tu přicházejí, mají jak podmínky dotyku tak kladný rozměr upoutání, takže mohou poskytnout dobrý pohled na předešlou teorii.