Viktor Aleksandrovich Pliss

О гиперболичности гладких коциклов над потоками с инвариантной эргодической мерой

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 111 (1986), No. 2, 146--155

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/118273`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 111 (1986), Praha

О ГИПЕРБОЛИЧНОСТИ ГЛАДКИХ КОЦИКЛОВ НАД ПОТОКАМИ С ИНВАРИАНТНОЙ ЭРГОДИЧЕСКОЙ МЕРОЙ

ВИКТОР АЛЕКСАНДРОВИЧ ПЛИСС, Ленинград

Посвящается профессору Ярославу Курцвеилу по случаю его шестидесятилетия

(Поступило в редакцию 26/VIII. 1985 г.)

В 1968 г. В. М. Миллионщиков [1] и В. И. Оселедец [2] исследовали поведение коциклов над потоками с инвариантной мерой. Они показали, что такие коциклы правильны почти везде, а в эргодическом случае характеристические показатели сохраняют также почти везде постоянное значение. Впоследствии в работах [3, 4, 5] были даны другие доказательства теорем Миллионщикова и Оселедеца. Сравнительно недавно Р. А. Джонсон, К. Дж. Палмер и Д. Р. Селл [6] опубликовали интересный обзор результатов по указанной тематике, при этом им удалось упростить, а в некоторых местах и уточнить, отдельные детали доказательств предыдущих авторов.

Здесь будет показано, что существует множество с мерой, близкой к единице, на котором коцикл обладает определенным свойством гиперболичности. При доказательстве этого факта существенно используются идеи и методы из [1], [2] и [6].

1. Пусть $\varphi(p, t)$ – поток, определенный на компактном метрическом пространстве M, т.е. $\varphi(p, t)$ есть отображение $M \times R$, где R – действительная ось, на M, непрерывное и удовлетворяющее условиям $\varphi(p, 0) = p \in M$ и

$$\varphi(p, t + s) = \varphi(\varphi(p, s), t) . \tag{1.1}$$

Будем предполагать, что на M задана нормированная, инвариантная эргодическая мера μ, т.е. мера μ такова, что $\mu M = 1$; если M_1 – измеримое подмножество M, то $\mu\varphi(M_1, t) = \mu M_1$ при всех t, и если M_2 измеримое инвариатнное подмножество M такое, что $\mu M_2 > 0$, то $\mu(M \setminus M_2) = 0$.

Квадратная матрица $\Phi(p, t)$ порядка n называется гладким коциклом над φ, если она непрерывна, непрерывно дифференцируема по t при $p \in M$, $t \in R$, и удовретворяет условию

$$\Phi(p, t + s) = \Phi(\varphi(p, s), t)\, \Phi(p, s) . \tag{1.2}$$

Известно (и легко проверяется), что $\Phi(p, t)$ есть гладкий коцикл над φ тогда и только тогда, когда существует непрерывная на M квадратная матрица $P(p)$ порядка n такая, что $\Phi(p, t)$ есть фундаментальная матрица решений системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dz}{dt} = P(\varphi(p, t))\, z\,, \tag{1.3}$$

нормированная в нуле: $\Phi(p, 0) = E$.

В работах [1] и [2] доказано, что характеристические показатели коцикла $\Phi(p, t)$ почти везде на M сохраняют постоянные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Во всём дальнейшем мы будем предполагать, что

$$\lambda_i \neq 0\,, \quad i = 1, \ldots, n\,. \tag{1.4}$$

Теорема 1. *Предположим, что среди чисел λ_i имеется равно k отрицательных, а остальные $(n - k)$ — положительны. Тогда по любому $\varepsilon > 0$ можно указать измеримое множество $M_\varepsilon \subset M$ и число $a > 0$ такие, что $\mu M_\varepsilon > 1 - \varepsilon$ и что для любого $p \in M_\varepsilon$ существует k-мерное линейное пространство $L^+(p)$ такое, что для любого вектора $z_0 \in L^+(p)$ и любого $t \geqq 0$ выполняется неравенство*

$$|\Phi(p, t)\, z_0| \leqq a|z_0|\, e^{-\lambda t}\,, \tag{1.5}$$

где $\lambda = \frac{1}{2} \min\limits_{i=1,\ldots,n} |\lambda_i|$, и $(n - k)$-мерное линейное пространство $L^-(p)$ такое, что для любого вектора $z_0 \in L^-(p)$ и любого $t \leqq 0$ выполняются неравенство

$$|\Phi(p, t)\, z_0| \leqq a|z_0|\, e^{\lambda t}\,. \tag{1.6}$$

2. Доказательство теоремы 1 приведём сначала в частном случае треугольного коцикла. Пусть $\Psi(p, t)$ есть верхний треугольный коцикл с положительными диагональными элементами, тогда $\Psi(p, t)$ есть фундаментальная матрица решений системы уравнений

$$\frac{dz}{dt} = Q(\varphi(p, t))\, z\,, \tag{2.1}$$

нормированная в нуле. Таким образом,

$$\frac{d}{dt}\Psi(p, t) = Q(\varphi(p, t))\, \Psi(p, t)\,,$$

отсюда следует, что Q — верхняя треугольная матрица:

$$Q(p) = \begin{pmatrix} q_{11}(p) & q_{12}(p) & \ldots & q_{1n}(p) \\ 0 & q_{22}(p) & \ldots & q_{2n}(p) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & q_{nn}(p) \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

с непрерывными на M элементами $q_{ij}(p)$.

По теореме Биркгофа существует такое множество $\hat{M} \subset M$, $\mu\hat{M} = 1$, что для всех $p \in \hat{M}$ существуют пределы

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t q_{ii}(\varphi(p,\tau))\,\mathrm{d}\tau = \lambda_i \quad (i = 1, \ldots, n)\,. \tag{2.3}$$

Эти пределы не зависят от $p \in \hat{M}$ и по теореме Ляпунова представляют собой характеристические показатели коцикла $\Psi(p, t)$.

По теореме Лебега пределы (2.3) достигаются равномерно на множестве, мера которого сколь угодно близка к единице. Иными словами, по любому $\varepsilon > 0$ можно указать множество $M_\varepsilon \subset \hat{M}$ и число T такие, что $\mu M_\varepsilon > 1 - \varepsilon$, и, если $p \in M_\varepsilon$, то при всех $|t| > T$ выполняются неравенства

$$\left|\frac{1}{t}\int_0^t q_{ii}(\varphi(p,\tau))\,\mathrm{d}\tau - \lambda_i\right| < \varepsilon \quad (i = 1, \ldots, n)\,. \tag{2.4}$$

Запишем систему (2.1) в скалярной форме:

$$\dot{z}_i = q_{ii}z_i + q_{ii+1}z_{i+1} + \ldots + q_{in}z_n\,, \quad (i = 1, \ldots, n)\,. \tag{2.5}$$

Пусть $y_j = (y_{1j}, \ldots, y_{jj}, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}$ есть вектор, определяемый следующими формулами:

$$y_{jj} = \exp\left[\int_0^t q_{jj}(\varphi(p,\tau))\,\mathrm{d}\tau\right], \tag{2.6}$$

$$y_{ij} = \exp\left[\int_0^t q_{ii}(\varphi(p,\tau))\,\mathrm{d}\tau\right] \times \tag{2.7}$$

$$\times \sum_{l=i+1}^{j}\int_{\theta_{ij}}^{t}\exp\left[-\int_0^\tau q_{ii}(\varphi(p,\tau))\,\mathrm{d}\tau\right] q_{il}(\varphi(p,\tau))\, y_{lj}(p,\tau)\,\mathrm{d}\tau\,,$$

где

$$\theta_{ij} = \begin{cases} +\infty\,, & \text{если} \quad \lambda_i > \lambda_j\,, \\ 0\,, & \text{если} \quad \lambda_i = \lambda_j\,, \\ -\infty\,, & \text{если} \quad \lambda_i < \lambda_j\,. \end{cases}$$

Ясно, что если интегралы, стоящие справа в (2.7) сходятся, то y_j есть решение системы (2.1).

Оценим компоненты y_{ij} вектора y_j. По условию $q_{ij}(p)$ непрерывны на M, следовательно, существует $h > 0$ такое, что $|q_{ij}(p)| < h$ при $p \in M$, $i, j = 1, \ldots, n$. Отсюда следует, что при $|t| \leqq T$ выполняются неравенства

$$\exp\left[\int_0^t q_{ii}(\varphi(p,\tau))\,\mathrm{d}\tau\right] \leqq \exp Th \quad (i = 1, \ldots, n)\,. \tag{2.8}$$

Положим $a_0 = \exp 3Th$, тогда из неравенств (2.4) и (2.8) следуют неравенства

$$(2.9) \qquad \exp\left[\int_0^t q_{ii}(\varphi(p,\tau))\,\mathrm{d}\tau\right] \leqq a_0 \exp\left[(\lambda_i + \varepsilon)\,t\right],$$

$$\exp\left[-\int_0^t q_{ii}(\varphi(p,\tau))\,\mathrm{d}\tau\right] \leqq a_0 \exp\left[-(\lambda_i - \varepsilon)\,t\right] \quad \text{при} \quad t \geqq 0,$$

и

$$(2.10) \qquad \exp\left[\int_0^t q_{ii}(\varphi(p,\tau))\,\mathrm{d}\tau\right] \leqq a_0 \exp\left[(\lambda_i - \varepsilon)\,t\right],$$

$$\exp\left[-\int_0^t q_{ii}(\varphi(p,\tau))\,\mathrm{d}\tau\right] \leqq a_0 \exp\left[-(\lambda_i + \varepsilon)\,t\right] \quad \text{при} \quad t \leqq 0.$$

Докажем, что при $\lambda_j < 0$ для любого $\alpha = 1, \ldots, j - 1$ существует число $a_\alpha > 0$ такое, что при $t \geqq 0$ выполняется неравенство

$$(2.11) \qquad |y_{j-\alpha j}| \leqq a_\alpha \exp\left[(\lambda_j + (\alpha + 1)\,\varepsilon)\,t\right].$$

Доказательство проведём по индукции. При $\alpha = 0$ неравенство (2.11) вытекает из формулы (2.6) и первого из неравенств (2.9). Предположим, что (2.11) выполнено при всех $\alpha = 0, 1, \ldots, \beta - 1$. Оценим y_{ij}, положив $i = j - \beta$. Рассмотрим случай, когда $\lambda_i > \lambda_j$. Из формулы (2.7), принимая во внимание неравенства (2.4) и (2.9), неравенство $|q_{ij}| < h$ и индукционное предположение (2.11), получаем, что для $t \geqq 0$ справедливо неравенство

$$|y_{ij}| \leqq a_0 \exp\left[(\lambda_i + \varepsilon)\,t\right] \sum_{l=i+1}^{j} \int_t^\infty a_0 \exp\left[-(\lambda_i - \varepsilon)\,\tau\right] .$$

$$. \, h a_{j-l} \exp\left[(\lambda_j + (j - l + 1)\,\varepsilon)\,\tau\right] \mathrm{d}\tau .$$

Из этого неравенства следует, что

$$|y_{ij}| \leqq a_0^2 h \exp\left[(\lambda_i + \varepsilon)\,t\right] \sum_{l=i+1}^{j} a_{j-l} \int_t^\infty \exp\left[(\lambda_j - \lambda_i + \beta\varepsilon)\,\tau\right] \mathrm{d}\tau .$$

Если ε выбрано достаточно малым, то в силу условия $\lambda_i > \lambda_j$ выполняется неравенство $\lambda_j - \lambda_i + \beta\varepsilon < 0$. Отсюда следует сходимость интеграла, стоящего в правой части последнего неравенства, а также неравенство

$$(2.12) \qquad |y_{j-\beta j}| \leqq a_\beta \exp\left[(\lambda_j + (\beta + 1)\,\varepsilon)\,t\right],$$

где

$$a_\beta = \frac{a_0^2 h}{\lambda_i - \lambda_j - \beta\varepsilon} \sum_{l=i+1}^{j} a_{j-l} .$$

Неравенство (2.12) доказывает, что (2.11) выполнено при всех $\alpha = 0, 1, \ldots$ $\ldots, j - 1$.

Аналогично исчепрываются случаи, когда $\lambda_i \leqq \lambda_j$.

Точно так же в случае, когда $\lambda_j > 0$, доказывается, что для любого $\alpha = 0, 1, \dots, j - 1$ существует a_α такое, что при $t \leqq 0$ выполняется неравенство

$$(2.13) \qquad |y_{j-\alpha j}| \leqq a_\alpha \exp\left[(\lambda_j - (\alpha + 1)\varepsilon) t\right].$$

Обозначим через $L^+(p)$ k-мерное линейное пространство, натянутое на векторы $y_j(p, 0)$ с такими индексами j, что $\lambda_j < 0$, а через $L^-(p)$ – $(n - k)$-мерное линейное пространство, натянутое на векторы $y_j(p, 0)$, которым соотвествуют положительные λ_j.

Пусть $z_0 \in L^+$ и $|z_0| = 1$. Вектор z_0 есть линейная комбинация векторов $y_j(p, 0)$, т.е.

$$z_0 = c_1 y_{j1}(p, 0) + \dots + c_k y_{jk}(p, 0).$$

Из формулы (2.6) следует, что $y_{jj}(p, 0) = 1$. Отсюда, из вида вектора $y_j(p, 0)$ и неравенств (2.12) вытекает, что существует такое $b > 0$, что при всех $p \in M_\varepsilon$ и $z_0 \in L^+$, $|z_0| = 1$, $|c_i| < b$ $(i = 1, \dots, k)$.

Это в соединении с неравенствами (2.11) и (2.13) и доказывает, что для треугольного коцикла $\Psi(p, t)$ утверждение теоремы 1 выполнено.

3. Пусть тепер $\Phi(p, t)$ – произвольный гладкий коцикл над $\varphi(p, t)$. Следуя процедуре, описанной в [6], сведем дело к треугольному случаю.

Обозначим через O пространство всех ортогональных матриц порядка n с естественной метрикой и положим $H = M \times O$. Таким образом, если $p \in M$, а $U \in O$, то пара $q = (p, U)$ есть элемент пространства H.

Хорошо известно, что если A – неособая квадратная матрица порядка n, то существует единственное представление A в виде

$$A = G(A)\, T(A),$$

где $G(A)$ – ортогональная матрица, а $T(A)$ – верхне-треугольная матрица с положительными элементами на главной диагонали. Матрицы G и T вычисляются при помощи алгебраических операций через элементы A и потому гладко зависят от A.

Пусть A и B – любые матрицы, тогда

$$(3.2) \qquad G(AB) = G(A\, G(B)).$$

Действительно, по определению G и T имеем

$$A\, G(B) = G(A\, G(B))\, T(A\, G(B)),$$

отсюда следует, что

$$AB = G(A\, G(B))\, T(A\, G(B))\, T(B).$$

С другой стороны, $AB = G(AB)\, T(AB)$, следовательно,

$$G(AB)\, T(AB) = G(A\, G(B))\, T(A\, G(B))\, T(B)$$

или

$$G^{-1}(A\, G(B))\, G(AB) = T(A\, G(B))\, T(B)\, T^{-1}(AB).$$

Здесь слева стоит ортогональная матрица, значит, и матрица, стоящая справа ортогональна, но в то же время эта матрица — треугольная с положительными диагональнами элементами. Отсюда вытекает, что $G^{-1}(A\,G(B))\,G(AB)$ есть единичная матрица, что и влечёт за собой (3.2).

Введём на компактном метрическом пространстве H поток $\psi(q, t)$ по следующему правилу. Пусть $q = (p, U)$, тогда

$$\psi(q, t) = (\varphi(p, t)\,,\ G(\Phi(p, t)\,U))\,. \tag{3.3}$$

Покажем, что $\psi(q, t)$ действительно является потоком на H, т.е. проверим справедливость равенства

$$\psi(q, s + t) = \psi(\psi(q, s), t)\,. \tag{3.4}$$

По определению потока и коцикла (равенства (1.1) и (1.2)) из равенства (3.3) получаем

$$\begin{aligned}\psi(q, s + t) &= (\varphi(p, s + t), G(\Phi(p, s + t)\,U)) = \\ &= (\varphi(\varphi(p, s), t), G(\Phi(\varphi(p, s), t)\,\Phi(p, s)\,U))\,.\end{aligned} \tag{3.5}$$

С другой стороны, из равенства (3.3) следует, что

$$\psi(\psi(q, s), t) = (\varphi(\varphi(p, s), t)\,,\ G(\Phi(\varphi(p, s), t)\,G(\Phi(p, s)\,U))\,. \tag{3.6}$$

В силу (3.2)

$$G(\Phi(\varphi(p, s), t)\,G(\Phi(\varphi(p, s)\,U)) = G(\Phi(\varphi(p, s), t)\,\Phi(p, s)\,U)\,,$$

отсюда и из (3.5) и (3.6) и следует (3.4).

Положим $\Psi(q, t) = G^{-1}(\Phi(p, t)\,U)\,\Phi(p, t)\,U$. По определению G матрица $\Psi(q, t)$ есть верхне-треугольная матрица с положительными диагональными элементами. Покажем, что она представляет собой гладкий коцикл над $\psi(q, t)$. Гладкость Ψ вытекает из гладкости G. Проверим равенство

$$\Psi(q, s + t) = \Psi(\psi(q, s), t)\,\Psi(q, s)\,. \tag{3.7}$$

По определению Ψ имеем

$$\Psi(q, s + t) = G^{-1}(\Phi(\varphi(p, s), t)\,\Phi(p, s)\,U)\,\Phi(\varphi(p, s), t)\,\Phi(p, s)\,U\,,$$

и в то же время,

$$\begin{aligned}\Psi(\psi(q, s), t)\,\Psi(q, s) = G^{-1}(\Phi(\varphi(p, s), t)\,G(\Phi(p, s)\,U)\,.\\ .\,\Phi(\varphi(p, s), t)\,G(\Phi(p, s)\,U)\,G^{-1}(\Phi(p, s)\,U)\,\Phi(p, s)\,U\,.\end{aligned}$$

Отсюда, благодаря (3.2), и вытекает (3.7).

Пусть l — произвольная нормированная мера на O. Определим на H меру $\mu \times l$, т.е. такую меру, что если $M_0 \subset M$, $O_0 \subset O$ и $H_0 = M_0 \times O_0$, то $(\mu \times l)\,H_0 = \mu H_0\,.\,\mu O_0$.

По теореме Рисса между линейными, ограниченными положительными функционалами F на $C(H)$, удовлетворяющими равенству $F(1) = 1$, и нормированными мерами на H существует изоморфизм. В связи с этим вместо $F(f(q))$, где $f \in C(H)$, будем писать просто νf, где ν — мера, соответствующая функционалу F.

Введём, следуя Крылову и Боголюбову, инвариантную меру на H. Положим

$$(3.8) \qquad (\mu \times l)_\tau\, g(q) = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau (\mu \times l)\, g(\psi(q, t))\, \mathrm{d}t\,.$$

Множество мер $(\mu \times l)_\tau$ компактно, поэтому существует последовательность $\tau_i \xrightarrow[i\to\infty]{} \infty$ такая, что последовательность мер $(\mu \times l)_{\tau_i}$ сходится при $i \to \infty$ к мере ν на пространстве H. Любая мера, построенная таким способлм, инвариантна относительно потока на $\psi(q, t)$.

Покажем, что любая мера ν накрывает μ, т.е. что если $g(q) = f(p)$, то $\nu g = \mu f$, или, что то же самое, если $H_0 = M_0 \times O$, где $M_0 \subset M$, то $\nu H_0 = \mu M_0$. Для этого достаточно показать, что при любом τ мера $(\mu \times l)_\tau$ накрывает меру μ. Пусть $g(q) = f(p)$, тогда

$$(\mu \times l)_\tau\, g = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau (\mu \times l)\, g(\psi(q, t))\, \mathrm{d}t = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau f(\varphi(p, t))\, \mathrm{d}t\,.$$

По инвариантности меры μ имеем $\mu f(\varphi(p, t)) = \mu f(p)$ при любом t, поэтому из последнего равенства следует, что $(\mu \times l)_\tau\, g = \mu f$ при любом τ.

Таким образом, инвариантная мера ν накрывает μ.

Пусть $J(\mu)$ — множество инвариантных нормированных мер на H, накрывающих μ. Как было показано, множество $J(\mu)$ не пусто, кроме того, оно выпукло и компактно. Отсюда следует, что оно имеет экстремальные точки. Эти точки являются эргодическими мерами на H ввиду эргодичности μ.

Пусть ν — эргодическая инвариантная нормированная мера на H, накрывающая μ.

Коцикл $\Psi(q, t)$ треугольный, поэтому, как было показано в п. 2, для него справедливо утверждение теоремы 1, следовательно, по любому $\varepsilon > 0$ существуют множество $H_\varepsilon \subset H$, $\nu H_\varepsilon > 1 - \varepsilon$, и число $a > 0$ такие, что при $q \in H_\varepsilon$ для коцикла $\Psi(q, t)$ выполняются неравенства (1.5) и (1.6) при соответствующем подборе $L^+(q)$ и $L^-(q)$.

Пусть $q_1 = (p_1, U_1) \in H_\varepsilon$, тогда по определению

$$\Psi(q_1, t) = G^{-1}(\Phi(p_1, t)\, U_1)\, \Phi(p_1, t)\, U_1\,.$$

Из этого равентсва ввиду ортогональности матриц G^{-1} и U_1 следует, что для матрицы $\Phi(p_1, t)$ выполняются неравенства (1.5) и (1.6) с тем же a, и отсюда следует, что тогда и при любой $U \in O$ для матрицы $\Psi(\tilde{q}, t)$, где $\tilde{q} = (p_1, U)$ выполняются неравенства (1.5) и (1.6). Таким образом, мы можем считать, что $H_\varepsilon = M_\varepsilon \times O$. Так как мера ν накрывает меру μ, то $\mu M_\varepsilon = \nu H_\varepsilon > 1 - \varepsilon$, и при любом $p \in M_\varepsilon$ для коцикла $\Phi(p, t)$ выполняются неравенства (1.5) и (1.6).

Этим и завершается доказательство теоремы 1.

4. Воспользуемся теперь следующим определением гиперболичности коцикла на интервале. [7]

Определение. Будем говорить, что *коцикл* $\Phi(p, t)$ *гиперболичен на интервале* I_p с константами $a > 0$ и $\lambda > 0$, если существуют линейные пространства $L^+(t)$ и $L^-(t)$ размерностей k и $(n - k)$ соответственно, определенные при $t \in I_p$ и такие, что если $z_0 \in L^+(t_0)$, то

$$(4.1) \qquad |\Phi(p, t)\, \Phi^{-1}(p, t_0)\, z_0| \leqq a|z_0| \exp\left[-\lambda(t - t_0)\right]$$

$$\text{при } t, \quad t_0 \in I_p, \quad t \geqq t_0,$$

и если $z_0 \in L^-(t_0)$, то

$$(4.2) \qquad |\Phi(p, t)\, \Phi^{-1}(p, t_0)\, z_0| \leqq a|z_0| \exp\left[\lambda(t - t_0)\right]$$

$$\text{при } t, \quad t_0 \in I_p, \quad t \leqq t_0.$$

Теорема 1 позволяет сформулировать следующее утверждение о гиперболичности коцикла на интервалах.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1, *а* $\varepsilon > 0$ — *произвольное число, тогда если* $\varphi(p, t) \in M_\varepsilon$ *при* $t \in I_p$, *то коцикл* $\Phi(p, t)$ *гиперболичен на* I_p *с константами* a *и* λ, *фигурирующими в теореме* 1.

Доказательство. Положим $L^+(t) = L^+(\varphi(p, t))$ и $L^-(t) = L^-(\varphi(p, t))$, где $L^+(p)$ и $L^-(p)$ — линейные пространства из теоремы 1, и покажем, что для этих линейных пространств выполняются неравенства (4.1) и (4.2). Действительно, если точка $t_0 \in I_p$, то $\varphi(p, t_0) \in M_\varepsilon$ и по теореме 1 для вектора $z_0 \in L^+(pt_0)$ выполняется неравенство

$$(4.3) \qquad |\Phi(\varphi(p, t_0), t - t_0)\, z_0| \leqq a|z_0| \exp\left[-\lambda(t - t_0)\right].$$

С другой стороны, по определению коцикла (равенство (1.2)) имеем

$$\Phi(\varphi(p, t_0), t - t_0) = \Phi(p, t)\, \Phi^{-1}(p, t_0),$$

отсюда и из неравенства (4.3) и вытекает (4.1). Аналогично и для (4.2).

Рассмотрим в качестве примера периодическую систему дифференциальных уравнений

$$(4.4) \qquad \frac{dx}{dt} = X(x, t),$$

где x и X — n-мерные векторы. Относительно вектора X будем предполагать, что он непрерывен вместе со своей матрицей Якоби $\partial X/\partial x$ при $t \in (-\infty, +\infty)$ и $x \in \Gamma$, где Γ — замкнутая ограниченная область с гладкой границей $\partial\Gamma$, и $X(x, t + \omega) = X(x, t)$. При этом будем считать, что $\partial \Gamma$ целиком состоит из интегральных кривых системы (4.4).

Пусть C — окружность длины ω. Рассмотрим автономную систему

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = X(x, \mu), \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 1, \tag{4.5}$$

где $u \in C$. Таким образом, автономная системы (4.5) на многообразии $M = \Gamma \times C$ определяет поток $\varphi(p, t)$, где p — пара (x, u). Если $x = \xi(t, x_0, u_0)$ есть решение системы уравнений

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = X(x, u_0 + t) \tag{4.6}$$

с начальными данными $t = 0$, $x = x_0$, а $p_0 = (x_0, u_0)$, то $\varphi(p_0, t) = (\xi(t, x_0, u_0), u_0 + t)$. Пусть $\Phi(x_0, u_0, t)$ есть фундаментальная матрица решений линейной системы

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial X(\xi(t, x_0, u_0), u_0 + t)}{\partial x} \cdot z, \tag{4.7}$$

нормированная в нуле, тогда $\Phi(p, t)$ есть коцикл над потоком $\varphi(p, t)$. Предположим, что поток $\varphi(p, t)$ и коцикл $\Phi(p, t)$ удовлетворяют условиям теоремы 1, тогда по теореме 2 коцикл $\Phi(p, t)$ гиперболичен на интервале I_p с константами a и λ. Отсюда следует, что если $x(t, x_0, t_0)$ — решение системы (4.4), а $\Psi(t, t_0, x_0)$ — фундаментальная матрица решений системы в вариациях

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial X(x(t, x_0, t_0), t)}{\partial x} \cdot z, \tag{4.8}$$

то $\Psi(t, t_0, x_0)$ гиперболична с константами a и λ на интервале $I(x_0, t_0)$ таком, что $(x(t, x_0, t_0), t) \in M_\varepsilon$ при $t \in I(x_0, t_0)$.

Таким образом, на множестве M_ε система (4.4) обладает описанным свойством гиперболичности.

Литература

[1] *В. М. Миллионщиков:* Метрическая теория линейных систем дифференциальных уравнений. — Матем. сборник *6* (1986), 149—158.

[2] *В. И. Оселедец:* Мультпли кативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических ситем. — Труды Московского математического общества *19* (1968), 179—210.

[3] *M. Raghunatan:* A proof of Oseledec's multiplicative ergodic theorem. Israel J. Math. *32* (1979), 356—362.

[4] *D. Ruelle:* Ergodic theory of differentiable dynamical systems. — Publ. J.H.E.S. *50* (1979), 275—320.

[5] *H. Cruel:* Ergodentheorie linearer stochastischer Systeme. — Universität Bremnen, 1981, Report N 59.
[6] *R. A. Johnson, K. J. Palmer, G. R. Sell:* Ergodic properties of linear dynamical systems. — JMA Preprint Series, 1984, N 65.
[7] *В. А. Плисс:* Равномерно ограниченные решения линейных систем дифференциальных уравнений. — Дифференц. уравнения *13* (1977), 883—891.

Адрес автора: Мат.-мех. факультет ЛГУ им. А. А. Жданова, Старый Петергоф, 198904 Ленинград, СССР.