Časopis pro pěstování matematiky

Zdeněk Vančura

Differentialgeometrie der Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten im dreidimensionalen euklidischen Raum

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 108 (1983), No. 4, 342--352

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/118181`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 108 (1983), Praha

DIFFERENTIALGEOMETRIE DER KUGEL- UND LINIENMANNIGFALTIGKEITEN IM DREIDIMENSIONALEN EUKLIDISCHEN RAUM

ZDENĚK VANČURA, Praha

(Eingegangen 6. September 1982)

Von meinen publizierten Arbeiten [10] bis [14] ausgehend, habe ich zwei umfassende Arbeiten geschrieben: die erste von ihnen behandelt die Differentialgeometrie der dreidimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten, die zweite die Differentialgeometrie der vierdimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten im dreidimensionalen euklidischen Raum. Der vorgelegte Artikel versucht die Konzeption, den Inhalt, die Form dieser zwei umfassenden Arbeiten und die Synthese der Hauptergebnisse von allen meinen oben erwähnten Arbeiten nach Möglichkeit aufs kürzeste auseinanderzusetzen.

Wegen der Konzeptionspriorität behandelt man zuerst die Differentialgeometrie der *n-dimensionalen Kugelmannigfaltigkeiten* im dreidimensionalen euklidischen Raum (d.h. für $n = 3$ der sog. *Kugelkomplexe*, für $n = 4$ des sog. *Kugelraums*) bei beliebigen (zweckmässig bezeichneten) Parametern $u_1, \ldots, u_n$ $(n = 3, 4)$. (Die zweidimensionale Kugelmannigfaltigkeit ist da zur Kugelkongruenz aus [10] bis [14] äquivalent.)

Es sei ein Kugelkomplex ein einparametriges System der von Kugeln mit konstantem Halbmesser gebildeten Kugelkongruenzen

$$\Omega(u_1, u_2, u_3) = c_3\,, \quad \Omega_3 \neq 0\,. \tag{1}$$

Dann wollen wir die Kugelkongruenzen (1) bzw. den h-ten Brennpunkt $(h = 1, 2)$ der Kugel der Kugelkongruenz (1) als *die Ω-Brennkongruenzen* bzw. *den Ωh-ten Brennpunkt der Kugel des Kugelkomplexes* (bei beliebiger zugehöriger Funktion auf der linken Seite der Gleichung (1)) bezeichnen.

Es sei der Kugelraum das einparametrige System der von Kugeln mit konstantem Halbmesser gebildeten Kugelkomplexe

$$r(u_1, u_2, u_3, u_4) \equiv {}^4r(u_1, u_2, u_3, u_4) = c_4\,, \quad r_4 \neq 0 \tag{2}$$

mit Ω-Brennkongruenzen

$$\Omega(u_1, u_2, u_3, u_4) = c_3\,, \quad r(u_1, u_2, u_3, u_4) = c_4\,, \quad \Omega_3 r_4 - \Omega_4 r_3 \neq 0\,. \tag{2'}$$

Dann wollen wir die Kugelkomplexe (2) bzw. den Ωh-ten Brennpunkt ($h = 1, 2$) der Kugel des Kugelkomplexes (2) als *die Ω-Brennkomplexe* bzw. *den Ωh-ten Brennpunkt der Kugel des Kugelraums* bezeichnen.

Die Menge von Ωh-ten Brennpunkten der Kugeln der n-dimensionalen Kugelmannigfaltigkeit bzw. die Vereinigungsmenge von Ωh-ten Charakteristiken der Ω-Brennmannigfaltigkeiten der n-dimensionalen Kugelmannigfaltigkeit ($n = 3, 4$, $h = 1, 2$; die Ωh-te Charakteristik der Kugelkongruenz ist zu ihrer h-ten Charakteristik äquivalent) wollen wir als *die Ωh-te Brennhülle* bzw. *die Ωh-te Charakteristik der n-dimensionalen Kugelmannigfaltigkeit* bezeichnen.

Den ersten bzw. *den zweiten Grundtensor* ${}^{n\Omega h}a_{ij}$ bzw. ${}^{n\Omega h}b_{ij}$ ($h = 1, 2$, $n = 3, 4$) *der Ωh-ten Brennhülle der n-dimensionalen Kugelmannigfaltigkeit* definiert man durch die Gleichung

$$(3)\qquad {}^{n\Omega h}a_{ij} = {}^{nss}_{\varphi_3\varphi_4}T_{ij} + {}^{n}r^2\, {}^{ndd}_{\varphi_3\varphi_4}T_{ij} + {}^{n}r_i\, {}^{n}r_j + (-1)^h \left[{}^{n}r\left({}^{nds}_{\varphi_3\varphi_4}T_{ij} + {}^{nds}_{\varphi_3\varphi_4}T_{ji}\right) + {}^{n}r_i\, {}^{nds}_{\varphi_3\varphi_4}T_j + {}^{n}r_j\, {}^{nds}_{\varphi_3\varphi_4}T_i\right] \quad i, j = 1, \ldots, n\,,$$

bzv. durch die Gleichung

$$(4)\qquad {}^{n\Omega h}b_{ij} = {}^{n}r\, {}^{ndd}_{\varphi_3\varphi_4}T_{ij} + (-1)^h\, {}^{nds}_{\varphi_3\varphi_4}T_{ij} \quad i, j = 1, \ldots, n\,,$$

wo ${}^{n}r$, ${}^{nss}_{\varphi_3\varphi_4}T_{ij}$, ${}^{nds}_{\varphi_3\varphi_4}T_{ij}$ durch [12] (Gleichungen (2) bis (8) für $n = 3$ bei $\varphi_3 = \Omega$, $\varphi_4 = u_4$, für $n = 4$ bei $\varphi_3 = \Omega$, $\varphi_4 = r$) und ${}^{nds}_{\varphi_3\varphi_4}T_i$, ${}^{ndd}_{\varphi_3\varphi_4}T_{ij}$ durch die Gleichungen

$$(3')\qquad {}^{nds}_{\varphi_3\varphi_4}T_i = {}^{n}_{\varphi_3\varphi_4}\varepsilon_{12}\, {}^{n}d\,.\, {}^{n}s_i\,, \qquad {}^{ndd}_{\varphi_3\varphi_4}T_{ij} = {}^{n}_{\varphi_3\varphi_4}d_i\,.\, {}^{n}_{\varphi_3\varphi_4}d_j$$

gegeben werden.

Die erste Krümmung ${}^{n\Omega h}K^1$und *die zweite Krümmung* ${}^{n\Omega h}K^2$ *der Ωh-ten Brennhülle der n-dimensionalen Kugelmannigfaltigkeit* definiert man bei $\det |{}^{n\Omega h}a_{ij} + \delta^n_4\, {}^{n}r_i\, {}^{n}r_j| \neq 0$, ${}^{n\Omega h}a^{ij}({}^{n\Omega h}a_{ik} + \delta^n_4\, {}^{n}r_i\, {}^{n}r_k) = \delta^j_k$ ($i, j\, k = 1, \ldots, n$; $n = 3, 4$), durch die Gleichungen

$$(5)\qquad {}^{n\Omega h}K^1 = (\det |{}^{n\Omega h}b_{ij}|)(\det |{}^{n\Omega h}a_{ij} + \delta^n_4\, {}^{n}r_i\, {}^{n}r_j|)^{-1}\,,$$
$$\qquad {}^{n\Omega h}K^2 = {}^{n\Omega h}a^{ij}\, {}^{n\Omega h}b_{ij}\,.$$

Unter Anwendung der Tensoren (3), (4) und der Skalare (5), d.h. der Tensoren auf der rechten Seite der Gleichung (3), untersuchen wir dann durch die definierte Begriffe erzeugte Problematik, die wir kurz als „Brennproblematik" der n-dimensionalen Kugelmannigfaltigkeiten bezeichnen wollen. Die Hauptergebnisse dieser Untersuchungen betreffen vor allem ($n = 3, 4$):

die Dimension der Ωh-ten Brennhüllen der n-dimensionalen Kugelmannigfaltigkeit und ihrer ($n - 1$)-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten (die Ωh-te Brennhülle der Kugelkongruenz ist zur h-ten Brennfläche der Kugelkongruenz äquivalent),

die Beziehungen zwischen den Grundtensoren bzw. *den Krümmungen der n-dimensionalen Kugelmannigfaltigkeit und den Grundtensoren* bzw. *den Krümmungen ihrer Ω-Brennmannigfaltigkeiten* (für $n = 4$ auch *der Ω-Brennmannigfaltigkeiten ihrer Ω-Brennmannigfaltigkeiten*), *die geometrische Charakteristik des Kugelraums mit* ${}^{4\Omega h}K^1 = 0$, ${}^{4\Omega h}K^2 = 1$, *die metrische Differentialgeometrie der Ωh-ten Brennhüllen* (als $(n-2)$-parametrische Systeme von Flächen) bzw. *der Ωh-ten Charakteristiken* (als $(n-3)$-parametrische Systeme von Flächen) *der n-dimensionalen Kugelmannigfaltigkeiten.*

Den Tensor ${}^{n\Omega}a_{ij}$ bzw. ${}^{n\Omega}b_{ij}$ $(n = 3, 4)$ aus der Gleichung

$$(6) \qquad {}^{n\Omega}a_{ij} = \tfrac{1}{2}\left[{}^{n\Omega 1}a_{ij} + {}^{n\Omega 2}a_{ij} - {}^{n}r\left({}^{n\Omega 1}b_{ij} + {}^{n\Omega 2}b_{ij}\right)\right] = {}^{nss}_{\varphi_3\varphi_4}T_{ij} + {}^{n}r_i\,{}^{n}r_j \qquad i, j = 1, \ldots, n$$

bzw. aus der Gleichung

$$(7) \qquad {}^{n\Omega}b_{ij} = \tfrac{1}{2}\left[{}^{n\Omega 2}a_{ij} - {}^{n\Omega 1}a_{ij} - {}^{n}r\left({}^{n\Omega 2}b_{ij} - {}^{n\Omega 1}b_{ij}\right)\right] = \\ = {}^{n}r\,{}^{nds}_{\varphi_3\varphi_4}T_{ji} + {}^{n}r_i\,{}^{nds}_{\varphi_3\varphi_4}T_j + {}^{n}r_j\,{}^{nds}_{\varphi_3\varphi_4}T_i \qquad i, j = 1, \ldots, n$$

wollen wir als *den ersten* bzw. *den zweiten Ω-Tensor der n-dimensionalen Kugelmannigfaltigkeit* bezeichnen.

Den Skalar ${}^{n\Omega}K^1$ bzw. ${}^{n\Omega}K^2$ $(n = 3, 4;\ i, j, k = 1, \ldots, n)$ aus der Gleichung

$$(8) \qquad {}^{n\Omega}K^1 = \left(\det\left|{}^{n\Omega}b_{ij}\right|\right)\left(\det\left|{}^{n\Omega}a_{ij}\right|\right)^{-1},$$

bzw. aus der Gleichung

$$(9) \qquad {}^{n\Omega}K^2 = {}^{n\Omega}a^{ij}\,{}^{n\Omega}b_{ij}, \quad {}^{n\Omega}a^{ij}\,{}^{n\Omega}a_{ik} = \delta^j_k$$

wollen wir als *die erste* bzw. *die zweite Ω-Krümmung der n-dimensionalen Kugelmannigfaltigkeit* bezeichnen.

Unter Anwendung der Tensoren (6) *bis* (9), *d.h. der Tensoren auf der rechten Seite der Gleichung* (3), *untersuchen wir dann die durch definierte Begriffe erzeugte Problematik,* die wir kurz als „Kugelproblematik" von n-dimensionalen Kugelmannigfaltigkeiten bezeichnen wollen. Einige von den ausgeprägt geometrisch interpretierbaren Hauptergebnissen dieser Untersuchungen kann man zur Ansicht zitieren:

${}^{3\Omega}b_{ij} = 0$ $(i, j = 1, 2, 3)$ *gilt genau dann, wenn für den Kugelkomplex einer der folgenden Fälle eintritt:* 1) *Der Halbmesser seiner Kugeln ist konstant und die Mittelpunktflächen seiner Ω-Brennkongruenzen sind parallele Ebenen.* 2) *Seine Kugeln haben keinen konstanten Halbmesser und seine Ω-Brennkongruenzen haben eine gemeinsame Mittelpunktfläche in einer Ebene.*

${}^{3\Omega}K^1 = 0$ *gilt genau dann, wenn für den Kugelkomplex einer der folgenden Fälle eintritt:* 1) *Seine Kugeln haben einen konstanten Halbmesser.* 2) *Seine Kugeln haben keinen konstanten Halbmesser und seine Ω-Brennkongruenzen haben entweder eine gemeinsame Mittelpunktfläche oder abwickelbare Mittelpunktflächen.*

Es gilt ${}^{3\Omega}K^2 = 0$, *wenn der Kugelkomplex von Kugeln mit konstantem Halbmesser und die Mittelpunktflächen von seinen Ω-Brennkongruenzen von parallelen Ebenen gebildet werden.*

${}^{4\Omega}K^1 = 0$ *gilt genau dann, wenn die Mittelpunktflächen der Ω-Brennkongruenzen von Ω-Brennkomplexen des Kugelraums abwickelbare Flächen sind.*

Es gilt ${}^{4\Omega}K^2 = 0$, *wenn die Mittelpunktflächen der Ω-Brennkongruenzen von Ω-Brennkomplexen des Kugelraums ein gemeinsames einparametriges System von parallelen Ebenen bilden.*

Es sei ${}^{4\Omega}K^i$ bzw. ${}^{3\Omega}K^i$ $(i = 1, 2)$ die i-te Ω-Krümmung des Kugelraums bzw. seiner Ω-Komplexe. Dann gilt:

${}^{3\Omega}K^1 = {}^{4\Omega}K^1 = 0$ *gilt genau dann, wenn die Mittelpunktflächen der Ω-Brennkongruenzen von Ω-Brennkomplexen des Kugelraums abwickelbare Flächen sind.*

Es gilt ${}^{3\Omega}K^2 = {}^{4\Omega}K^2 = 0$, *wenn die Mittelpunktflächen der Ω-Brennkongruenzen von Ω-Brennkomplexen des Kugelraums ein gemeinsames einparametriges System von parallelen Ebenen bilden.*

Die Menge der Kugeln der n-dimensionalen Kugelmannigfaltigkeit, auf denen mindestens eine (nicht identisch gleich Null) der Krümmungen der Kugelmannigfaltigkeit gleich Null ist, wollen wir als *die Ω-Approximation der n-dimensionalen Kugelmannigfaltigkeit* $(n = 3, 4)$ bezeichnen. Die Ω-Approximation der Ω-Approximation des Kugelraums wollen wir als *die $\Omega\Omega$-Approximation des Kugelraums* bezeichnen.

Die n-dimensionale Kugelmannigfaltigkeit wollen wir als *die Ω-approximationsfähige n-dimensionale Kugelmannigfaltigkeit* bezeichnen, wenn ihre Ω-Approximation eine $(n - 1)$-dimensionale Kugelmannigfaltigkeit bildet.

Den Ω-approximationsfähigen Kugelkomplex wollen wir als *den Ω-brennapproximationsfähigen Kugelkomplex* bezeichnen, wenn die Brennflächen sowohl von seinen Ω-Brennkongruenzen als auch von seiner Ω-Approximation die Brennabbildung besitzen.

Den Ω-approximationsfähigen Kugelraum wollen wir als *den Ω-brennapproximationsfähigen Kugelraum* bezeichnen, wenn die Brennflächen der Ω-Brennkongruenzen sowohl von seinen Ω-Brennkomplexen als auch von seiner Ω-Approximation die Brennabbildung besitzen. Den Ω-approximationsfähigen Kugelraum wollen wir als *den $\Omega\Omega$-approximationsfähigen Kugelraum* bezeichnen, wenn seine $\Omega\Omega$-Approximation eine Kugelkongruenz bildet. Den Ω-brennapproximationsfähigen und $\Omega\Omega$-approximationsfähigen Kugelraum wollen wir als *den $\Omega\Omega$-brennapproximationsfähigen Kugelraum* bezeichnen, wenn die Brennflächen sowohl wie von seiner $\Omega\Omega$-Approximation als auch von den Kugelkongruenzen

$$(10)\quad \Omega(u_1, u_2, u_3, u_4) = c_3\,, \quad {}^{\Omega}\varkappa(u_1, u_2, u_3, u_4) = c_4\,, \quad \Omega_3\,{}^{\Omega}\varkappa_4 - \Omega_4\,{}^{\Omega}\varkappa_3 \neq 0\,,$$

die den Kugelraum bilden und wo ${}^{\Omega}\varkappa \equiv {}^{4\Omega}K^1\,{}^{4\Omega}K^2$ bzw. ${}^{\Omega}\varkappa \equiv {}^{4\Omega}K^i$ im Fall ${}^{4\Omega}K^i \not\equiv 0$ $(i = 1, 2)$ bzw. im Fall ${}^{4\Omega}K^i \not\equiv 0$, ${}^{4\Omega}K^{i+(-1)^{i+1}} \equiv 0$ (i ist einer der Werte 1, 2) gilt, die Brennabbildung besitzen.

Als *die Ω-Brennabbildung der Ω-Brennhüllen des Kugelkomplexes aus seiner Kugel* wollen wir die Brennabbildung der Brennflächen der Ω-Brennkongruenz des Kugelkomplexes, welche durch diese Kugel geht, bezeichnen.

Als *die Ω-Brennabbildung der Ω-Brennhüllen des Kugelraums aus seiner Kugel* wollen wir die Ω-Brennabbildung der Ω-Brennhüllen des Ω-Brennkomplexes des Kugelraums, welcher durch diese Kugel geht, bezeichnen. Als *die ΩΩ-Brennabbildung der Ω-Brennhüllen des Kugelraums aus seiner Kugel* $(\overset{\circ}{u}_1, \overset{\circ}{u}_2, \overset{\circ}{u}_3, \overset{\circ}{u}_4)$ wollen wir die Brennabbildung der Brennflächen der Kugelkongruenz

$$(11) \qquad \Omega(u_1, u_2, u_3, u_4) - \Omega(\overset{\circ}{u}_1, \overset{\circ}{u}_2, \overset{\circ}{u}_3, \overset{\circ}{u}_4) = 0\,,$$
$$^{\Omega}\varkappa(u_1, u_2, u_3, u_4) - {}^{\Omega}\varkappa(\overset{\circ}{u}_1, \overset{\circ}{u}_2, \overset{\circ}{u}_3, \overset{\circ}{u}_4) = 0\,, \quad \Omega_3\,{}^{\Omega}\varkappa_4 - \Omega_4\,{}^{\Omega}\varkappa_3 \neq 0$$

bezeichnen.

Unter Anwendung der Tensoren auf der rechten Seite der Gleichung (3) für zugehörige φ_3, φ_4 untersuchen wir dann die durch definierte Begriffe erzeugte Problematik, die wir kurz als „Kugel-Brennproblematik" von n-dimensionalen Kugelmannigfaltigkeiten bezeichnen wollen. Die Hauptergebnisse dieser Untersuchungen betreffen vor allem ($n = 3, 4$):

die Differentialgeometrie der Ω-Approximation der n-dimensionalen Kugelmannigfaltigkeit, bzw. *der ΩΩ-Approximation des Kugelraums*,

notwendige und hinreichende Bedingungen für die Ω-Approximationsfähigkeit und für die Ω-Brennapproximationsfähigkeit der n-dimensionalen Kugelmannigfaltigkeit bzw. *für die ΩΩ-Approximationsfähigkeit und für die ΩΩ-Brennapproximationsfähigkeit des Kugelraums*,

notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, durch die Bewegung (speziell durch die Identität) die Ω-Brennabbildung von Ω-Brennhüllen

der Ω-brennapproximationsfähigen n-dimensionalen Kugelmannigfaltigkeit aus der Kugel ihrer Ω-Approximation in die Ω-Brennabbildung von Ω-Brennhüllen ihrer Ω-Approximation (die Ω-Brennabbildung von Ω-Brennhüllen der Ω-brennapproximationsfähigen Kugelkongruenz ist zur Brennabbildung von Brennflächen der brennapproximationsfähigen Kugelkongruenz äquivalent)

bzw. *des ΩΩ-brennapproximationsfähigen Kugelraums aus der Kugel seiner ΩΩ-Approximation in die Brennabbildung von Brennflächen seiner ΩΩ-Approximation*

und die ΩΩ-Brennabbildung von Ω-Brennhüllen des ΩΩ-brennapproximationsfähigen Kugelraums aus der Kugel seiner Ω-Approximation in die Ω-Brennabbildung von Ω-Brennhüllen seiner Ω-Approximation bzw. *aus der Kugel seiner ΩΩ-Approximation in die Brennabbildung von Brennflächen seiner ΩΩ-Approximation*

übertragen zu können.

Einige von den ausgeprägt geometrisch darstellbaren Hauptergebnissen dieser Untersuchungen kann man der Anschaulichkeit wegen zitieren:

Die Ω-Brennabbildung von Ω-Brennhüllen des Ω-brennapproximationsfähigen von Kugeln mit nicht konstantem Halbmesser gebildeten Kugelkomplexes aus der

Kugel seiner Ω-Approximation ist genau dann mit der Brennabbildung von Brennflächen der Ω-Approximation identisch, wenn die Ω-Approximation von Kugeln mit konstantem Halbmesser gebildet wird.

Im Fall, dass die Ω-Approximation des Ω-brennapproximationsfähigen Kugelraums sein Ω-Brennkomplex bildet, gibt es immer eine Ω-Brennabbildung von Ω-Brennhüllen der Ω-Approximation die mit der Ω-Brennabbildung von Ω-Brennhüllen des Kugelraums identisch ist.

Im Fall, dass die Ω-Approximation des ΩΩ-brennapproximationsfähigen Kugelraums sein Ω-Brennkomplex bildet, existiert immer eine ΩΩ-Brennabbildung von Ω-Brennhüllen des Kugelraums aus der Kugel seiner Ω-Approximation, die mit der Ω-Brennabbildung von Ω-Brennhüllen der Ω-Approximation bzw. mit der Ω-Brennabbildung von Ω-Brennhüllen der Ω-Approximation und zugleich mit der Ω-Brennabbildung von Ω-Brennhüllen des Kugelraums identisch ist.

Im Fall, dass die Ω-Approximation des ΩΩ-brennapproximationsfähigen Kugelraums sein Ω-Brennkomplex bildet, existiert immer eine ΩΩ-Brennabbildung von Ω-Brennhüllen des Kugelraums aus der Kugel seiner ΩΩ-Approximation, die mit der Brennabbildung von Brennflächen der ΩΩ-Approximation identisch ist.

Nachdem dieser abgeschlossene Teil des Artikels die Konzeption, den Inhalt und die Form des ganzen Artikels vorzeichnet, kann sich der nachfolgende Teil des Artikels auf die spezifischen Züge der Differentialgeometrie der n-dimensionalen Linienmannigfaltigkeiten im dreidimensionalen euklidischen Raum $(n = 3, 4)$ konzentrieren.

Den Linienkomplex $^3\mathbf{p} = {}^3\mathbf{p}(p^1, \dots, p^6)$, $\sum_{i=1}^{3} (p^i)^2 = 1$, $p^3 \neq 0$ *kann man als das einparametrige System von Flächennormalenkongruenzen*

$$\omega(u_1, u_2, u_3) = c_3\,, \quad \omega_3 \neq 0 \tag{12}$$

auffassen genau dann, wenn (bei der bestimmten Voraussetzung)

$$\sum_{ijk} (-1)^{\mathrm{inv}\,ijk} [((p^3)^{-1}\, p^5)_i\, p_j^1 - ((p^3)^{-1}\, p^4)_i\, p_j^2]\, \omega_k = 0\,, \tag{13}$$

$$i \neq j \neq k \neq i\,, \quad i, j, k = 1, 2, 3$$

gilt.

Wir wollen die Linienkongruenzen (12), (13) bzw. den h-ten Brennpunkt $(h = 1, 2)$ der Linie der Linienkongruenz (12), (13) als *die ω-Brennkongruenzen* bzw. *den ωh-ten Brennpunkt der Linie des Linienkomplexes* $^3\mathbf{p}$ bezeichnen.

Wenn *die (mittels der Ω-Brennkongruenzen) den Ω-Brennkomplexen des Kugelraums adjungierten Linienkomplexe den Linienraum, d.h. den Linienraum*

$$\mathbf{p} \equiv {}^4\mathbf{p} = (d_{32}^2 + d_{13}^2 + d_{21}^2)^{-1/2}\,. \tag{14}$$

$$.\,(d_{32}, d_{13}, d_{21}, p_3 d_{13} + p_2 d_{12}, p_1 d_{21} + p_3 d_{23}, p_2 d_{32} + p_1 d_{31})\,,$$

$$d_{kl} = 2\det \left| \frac{\partial p_k}{\partial u_m} + (\Lambda_{34}^{\Omega r})^{-1} \left(\Lambda_{4m}^{\Omega r} \frac{\partial p_k}{\partial u_3} + \Lambda_{m3}^{\Omega r} \frac{\partial p_k}{\partial u_4} \right), \frac{\partial p_l}{\partial u_m} + (\Lambda_{34}^{\Omega r})^{-1} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left(\Lambda_{4m}^{\Omega r} \frac{\partial p_l}{\partial u_3} + \Lambda_{m3}^{\Omega r} \frac{\partial p_l}{\partial u_4} \right) \right|,$$

$$\Lambda_{kl}^{\Omega r} = \Omega_k r_l - \Omega_l r_k, \quad \Lambda_{34}^{\Omega r} \neq 0, \quad d_{12} \neq 0, \quad \varepsilon_{12} = \operatorname{sgn} d_{12},$$

$$k, l = 1, 2, 3, \quad m = 1, 2$$

bilden, werden wir (bei $\omega \equiv \Omega$) diese Linienkomplexe als *die ω-Brennkomplexe des Linienraums* und den ωh-ten Brennpunkt ($h = 1, 2$) der Linie des ω-Brennkomplexes des Linienraums als *den ωh-ten Brennpunkt der Linie des Linienraums* bezeichnen.

Die Menge der ωh-ten Brennpunkten der Geraden der n-dimensionalen Linienmannigfaltigkeit bzw. die Vereinigungsmenge der ωh-ten Charakteristiken der ω-Brennmannigfaltigkeiten der n-dimensionalen Linienmannigfaltigkeit ($n = 3, 4$, $h = 1, 2$) wollen wir als *die ωh-te Brennhülle* bzw. *die ωh-te Charakteristik der n-dimensionalen Linienmannigfaltigkeit* bezeichnen.

Den ersten Grundtensor ${}^{n\omega h}_{\alpha}a_{ij}$ und *den zweiten Grundtensor* ${}^{n\omega h}_{\alpha}b_{ij}$ ($n = 3, 4$, $h = 1, 2$, $\alpha = \mathrm{I, II}$) *der ωh-ten Brennhülle der n-dimensionalen Linienmannigfaltigkeit* definieren wir durch die Gleichungen

$$(15) \qquad {}^{n\omega h}_{\alpha}a_{ij} = {}^{nss}_{\varphi_3\varphi_4}T_{ij} + {}^{nh}_{\alpha}w^2 \, {}^{ndd}_{\varphi_3\varphi_4}T_{ij} + {}^{nh}_{\alpha}w_i \, {}^{nh}_{\alpha}w_j + {}^{nh}_{\alpha}w \left({}^{nds}_{\varphi_3\varphi_4}T_{ij} + {}^{nds}_{\varphi_3\varphi_4}T_{ji} \right) +$$
$$+ {}^{nh}_{\alpha}w_i \, {}^{nds}_{\varphi_3\varphi_4}T_j + {}^{nh}_{\alpha}w_j \, {}^{nds}_{\varphi_3\varphi_4}T_i$$
$$i, j = 1, \ldots, n,$$

$$(16) \qquad {}^{n\omega h}_{\alpha}b_{ij} = {}^{nds}_{\varphi_3\varphi_4}T_{ij} + {}^{nh}_{\alpha}w \, {}^{ndd}_{\varphi_3\varphi_4}T_{ij}$$
$$i, j = 1, \ldots, n,$$

wo ${}^{nh}_{\alpha}w$ durch [11] Satz 5.12 für $l = s$ und durch die Gleichungen (5,33), (5.34) für ${}^{nss}_{\varphi_3\varphi_4}T^{A}_{ij}$ (aus (17)) bzw. ${}^{n\varphi_3\varphi_4}\varepsilon_{12} \, {}^{nds}_{\varphi_3\varphi_4}T^{A}_{ij}$ (aus (14), (18)) anstatt ${}^{ls}T_{ij}$ bzw. ${}^{ds}T_{ij}$,

(17)
$${}^{nss}_{\varphi_3\varphi_4}T^{A}_{ij} = {}^{nss}_{\varphi_3\varphi_4}T_{ij} + (\Lambda_{34}^{\varphi_3\varphi_4})^{-1} \left({}^{nss}_{\varphi_3\varphi_4}T_{i3} \, \Lambda_{4j}^{\varphi_3\varphi_4} + {}^{nss}_{\varphi_3\varphi_4}T_{i4} \, \Lambda_{j3}^{\varphi_3\varphi_4} + {}^{nss}_{\varphi_3\varphi_4}T_{j3} \, \Lambda_{4i}^{\varphi_3\varphi_4} + \right.$$
$$\left. + {}^{nss}_{\varphi_3\varphi_4}T_{j4} \, \Lambda_{i3}^{\varphi_3\varphi_4} \right) + (\Lambda_{34}^{\varphi_3\varphi_4})^{-2} \left[\Lambda_{4i}^{\varphi_3\varphi_4} \Lambda_{4j}^{\varphi_3\varphi_4} \, {}^{nss}_{\varphi_3\varphi_4}T_{33} + \left(\Lambda_{i3}^{\varphi_3\varphi_4} \Lambda_{4j}^{\varphi_3\varphi_4} + \right. \right.$$
$$\left. \left. + \Lambda_{4i}^{\varphi_3\varphi_4} \Lambda_{j3}^{\varphi_3\varphi_4} \right) {}^{nss}_{\varphi_3\varphi_4}T_{34} + \Lambda_{i3}^{\varphi_3\varphi_4} \Lambda_{j3}^{\varphi_3\varphi_4} \, {}^{nss}_{\varphi_3\varphi_4}T_{44} \right] \quad i, j = 1, 2,$$

(18)
$${}^{nds}_{\varphi_3\varphi_4}T^{A}_{ij} = {}^{nds}_{\varphi_3\varphi_4}T_{ij} + (\Lambda_{34}^{\varphi_3\varphi_4})^{-1} \left({}^{nds}_{\varphi_3\varphi_4}T_{i3} \, \Lambda_{4j}^{\varphi_3\varphi_4} + {}^{nds}_{\varphi_3\varphi_4}T_{i4} \, \Lambda_{j3}^{\varphi_3\varphi_4} + {}^{nds}_{\varphi_3\varphi_4}T_{3j} \, \Lambda_{4i}^{\varphi_3\varphi_4} + \right.$$
$$\left. + {}^{nds}_{\varphi_3\varphi_4}T_{4j} \, \Lambda_{i3}^{\varphi_3\varphi_4} \right) + (\Lambda_{34}^{\varphi_3\varphi_4})^{-2} \left(\Lambda_{4i}^{\varphi_3\varphi_4} \Lambda_{4j}^{\varphi_3\varphi_4} \, {}^{nds}_{\varphi_3\varphi_4}T_{33} + \Lambda_{4i}^{\varphi_3\varphi_4} \Lambda_{j3}^{\varphi_3\varphi_4} \, {}^{nds}_{\varphi_3\varphi_4}T_{34} + \right.$$
$$\left. + \Lambda_{i3}^{\varphi_3\varphi_4} \Lambda_{4j}^{\varphi_3\varphi_4} \, {}^{nds}_{\varphi_3\varphi_4}T_{43} + \Lambda_{i3}^{\varphi_3\varphi_4} \Lambda_{j3}^{\varphi_3\varphi_4} \, {}^{nds}_{\varphi_3\varphi_4}T_{44} \right) \quad i, j = 1, 2,$$

für $n = 3$ bei $\mathbf{s}$ im zugehörigen Sinn aus [14] (Satz 3), $\varphi_3 = \omega$, $\varphi_4 = u_4$, für $n = 4$ bei $\mathbf{s}$ als Mittelpunktflächen der Ω-Brennkongruenzen von Ω-Brennkomplexen des Kugelraums, $\varphi_3 = \omega = \Omega$, $\varphi_4 = r$ gegeben werden.

Die erste Krümmung ${}^{n\omega h}_{\alpha}K^1$ und *die zweite Krümmung* ${}^{n\omega h}_{\alpha}K^2$ *der ωh-ten Brennhülle der n-dimensionalen Linienmannigfaltigkeit* definieren wir bei $\det |{}^{n\omega h}_{\alpha}a_{ij} + \delta^n_4\, {}^n r_i\, {}^n r_j| \neq 0$, ${}^{n\omega h}_{\alpha}a^{ij} ({}^{n\omega h}_{\alpha}a_{ik} + \delta^n_4\, {}^n r_i\, {}^n r_k) = \delta^j_k$ $(i, j, k = 1, \ldots, n)$ durch die Gleichungen

$$(19) \qquad \begin{aligned} {}^{n\omega h}_{\alpha}K^1 &= \left(\det |{}^{n\omega h}_{\alpha}b_{ij} + \delta^n_4\, {}^n r_i\, {}^n r_j|\right) \left(\det |{}^{\alpha}_{n\omega h}a_{ij} + \delta^n_4\, {}^n r_i\, {}^n r_j|\right)^{-1}, \\ {}^{n\omega h}_{\alpha}K^2 &= {}^{n\omega h}_{\alpha}a^{ij} ({}^{n\omega h}_{\alpha}b_{ij} + \delta^n_4\, {}^n r_i\, {}^n r_j). \end{aligned}$$

Die durch die definierten Begriffe erzeugte Problematik, welche durch die Tensoren (15), (16), (19) *untersucht wird, d.h. kurz „die Brennproblematik" der n-dimensionalen Linienmannigfaltigkeiten $(n = 3, 4)$, ist der näher beschriebenen „Brennproblematik" von n-dimensionalen Kugelmannigfaltigkeiten analog.*

Es sei bei $n = 3$ bzw. $n = 4$ für $\varphi_3 = \omega$, $\varphi_4 = u_4$ bzw. $\varphi_3 = \omega$, $\varphi_4 = r$

$$(20) \qquad \begin{aligned} {}^{n\omega}_{\varphi_3\varphi_4}K &= \left(\det |-{}^{n\varphi_3\varphi_4}\varepsilon_{12}\, {}^{nds}_{\varphi_3\varphi_4}T^{\Lambda}_{ij}|\right) \left(\det |{}^{nss}_{\varphi_3\varphi_4}T^{\Lambda}_{ij}|\right)^{-1}, \\ {}^{n\omega}_{\varphi_3\varphi_4}H &= -{}^{n\varphi_3\varphi_4}\varepsilon_{12}\, {}^{nss}_{\varphi_3\varphi_4}T^{\Lambda ij}\, {}^{nds}_{\varphi_3\varphi_4}T^{\Lambda}_{ij}, \\ {}^{nss}_{\varphi_3\varphi_4}T^{\Lambda ij}\, {}^{nss}_{\varphi_3\varphi_4}T^{\Lambda}_{ik} &= \delta^j_k, \quad i, j, k = 1, 2. \end{aligned}$$

Den ersten ω-Tensor ${}^{n\omega}_{\mathrm{I}}a_{ij}$ bzw. ${}^{n\omega}_{\mathrm{II}}a_{ij}$ und *den zweiten ω-Tensor* ${}^{n\omega}_{\mathrm{I}}b_{ij}$ bzw. ${}^{n\omega}_{\mathrm{II}}b_{ij}$ *der n-dimensionalen Linienmannigfaltigkeit* $(n = 3, 4)$ wollen wir im Fall ${}^{n\omega}_{\varphi_3\varphi_4}K \neq 0$ durch die Gleichungen

(21)

$$\begin{aligned} {}^{n\omega}_{\mathrm{I}}a_{ij} = {} & 2\, {}^{n\omega}_{\varphi_3\varphi_4}H\, {}^{nss}_{\varphi_3\varphi_4}T_{ij} + 2({}^{nds}_{\varphi_3\varphi_4}T_{ij} + {}^{nds}_{\varphi_3\varphi_4}T_{ji}) + {}^{n\omega}_{\varphi_3\varphi_4}H({}^{n\omega}_{\varphi_3\varphi_4}H\, {}^{n\omega}_{\varphi_3\varphi_4}K^{-1})_i\, {}^{nds}_{\varphi_3\varphi_4}T_j + \\ & + {}^{n\omega}_{\varphi_3\varphi_4}H({}^{n\omega}_{\varphi_3\varphi_4}H\, {}^{n\omega}_{\varphi_3\varphi_4}K^{-1})_j\, {}^{nds}_{\varphi_3\varphi_4}T_i \quad i, j = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

$$(22) \quad \begin{aligned} {}^{n\omega}_{\mathrm{I}}b_{ij} = {} & -({}^{n\omega}_{\varphi_3\varphi_4}H^2 - 4\, {}^{n\omega}_{\varphi_3\varphi_4}K)^{1/2}\, {}^{n\omega}_{\varphi_3\varphi_4}K^{-1}({}^{nds}_{\varphi_3\varphi_4}T_{ij} + {}^{nds}_{\varphi_3\varphi_4}T_{ji}) - (({}^{n\omega}_{\varphi_3\varphi_4}H^2 - \\ & - 4\, {}^{n\omega}_{\varphi_3\varphi_4}K)^{1/2}\, {}^{n\omega}_{\varphi_3\varphi_4}K^{-1})_i\, {}^{nds}_{\varphi_3\varphi_4}T_j - (({}^{n\omega}_{\varphi_3\varphi_4}H^2 - 4\, {}^{n\omega}_{\varphi_3\varphi_4}K)^{1/2}\, {}^{n\omega}_{\varphi_3\varphi_4}K^{-1})_j\, {}^{nds}_{\varphi_3\varphi_4}T_i \\ & i, j = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

im Fall ${}^{n\omega}_{\varphi_3\varphi_4}K = 0$, ${}^{n\omega}_{\varphi_3\varphi_4}H \neq 0$ durch die Gleichungen

$$(23) \qquad \begin{aligned} {}^{n\omega}_{\mathrm{II}}a_{ij} = {} & 2\, {}^{nss}_{\varphi_3\varphi_4}T_{ij} + {}^{n\omega}_{\varphi_3\varphi_4}H^{-1}({}^{nds}_{\varphi_3\varphi_4}T_{ij} + {}^{nds}_{\varphi_3\varphi_4}T_{ji}) + 2({}^{n\omega}_{\varphi_3\varphi_4}H^{-1})_i\, \cdot \\ & \cdot\, {}^{nds}_{\varphi_3\varphi_4}T_j + 2({}^{n\omega}_{\varphi_3\varphi_4}H^{-1})_j\, {}^{nds}_{\varphi_3\varphi_4}T_i \quad i, j = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

$$(24) \qquad {}^{n\omega}_{\mathrm{II}}b_{ij} = {}^{nds}_{\varphi_3\varphi_4}T_{ij} - {}^{nds}_{\varphi_3\varphi_4}T_{ji} \quad i, j = 1, \ldots, n$$

definieren.

Die erste ω-Krümmung ${}^{n\omega}_{\alpha}K^1$ und *die zweite ω-Krümmung* ${}^{n\omega}_{\alpha}K^2$ *der n-dimensionalen Linienmannigfaltigkeit* $(n = 3, 4,\ \alpha = \mathrm{I}, \mathrm{II})$ wollen wir bei $\det |{}^{n\omega}_{\alpha}a_{ij}| \neq 0$ durch die Gleichungen

(25) $$ {}^{n\omega}_{\alpha}K^1 = (\det |{}^{n\omega}_{\alpha}b_{ij}|)(\det |{}^{n\omega}_{\alpha}a_{ij}|)^{-1}, \quad {}^{n\omega}_{\alpha}K^2 = {}^{n\omega}_{\alpha}a^{ij}\, {}^{n\omega}_{\alpha}b_{ij}, $$
$$ {}^{n\omega}_{\alpha}a^{ij}\, {}^{n\omega}_{\alpha}a_{ik} = \delta^j_k, \quad i, j, k = 1, \ldots, n $$
definieren.

Unter Anwendung der Tensoren (21) *bis* (24) *und der Skalare* (25) *untersuchen wir dann die durch definierte Begriffe erzeugte Problematik*, die wir kurz als „Linienproblematik" der n-dimensionalen Linienmannigfaltigkeiten bezeichnen wollen. Einige der ausgeprägt geometrisch darstellbaren Hauptergebnisse dieser Untersuchungen kann man (die Mittelpunktfläche der Linienkongruenz ist dabei zur Mittelpunktfläche der adjungierten Kugelkongruenz äquivalent) der Anschaulichkeit wegen anführen:

${}^{3\omega}_{\mathrm{I}}b_{ij} = 0$ $(i, j = 1, 2, 3)$ *gilt genau dann, wenn die Mittelpunktflächen der ω-Brennkongruenzen des Linienkomplexes von Kugelflächen gebildet werden.*

Im Fall, dass die Mittelpunktflächen der ω-Brennkongruenzen des Linienkomplexes (mit ω-Krümmungen) die Minimalflächen mit gleichem konstantem Gaussschen Krümmungsmass ${}_{\varphi_3\varphi_4}^{3\omega}K \neq 0$ sind, so gilt

(26) $$ {}^{3\omega}_{\mathrm{I}}K^1 = {}^{3\omega}_{\mathrm{I}}K^2 = (-{}_{\varphi_3\varphi_4}^{3\omega}K)^{-1/2}. $$

${}^{4\omega}_{\mathrm{I}}b_{ij} = 0$ $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ *gilt genau dann, wenn die Mittelpunktflächen der ω-Brennkongruenzen der ω-Brennkomplexe des Linienraums von Kugelflächen gebildet werden.*

Im Fall, dass die Mittelpunktflächen der ω-Brennkongruenzen der ω-Brennkomplexe des Linienraums (mit ω-Krümmungen) die Minimalflächen mit gleichem konstantem Gaussschen Krümmungsmass ${}_{\varphi_3\varphi_4}^{4\omega}K \neq 0$ sind, so gilt

(27) $$ {}^{4\omega}_{\mathrm{I}}K^1 = {}^{4\omega}_{\mathrm{I}}K^2 = (-{}_{\varphi_3\varphi_4}^{4\omega}K)^{-1/2}. $$

Die erste bzw. zweite ω-Krümmung des Linienraums ist dann der ersten bzw. der zweiten ω-Krümmung von ω-Brennkomplexen des Linienraums gleich.

Wenn wir weiter unter der Linienkongruenz immer die adjunktionsfähige hyperbolische Linienkongruenz verstehen, bekommen wir die Definitionen der nachfolgenden Begriffe $(n = 3, 4)$ *die ω-Approximation der n-dimensionalen Linienmannigfaltigkeit, die $\omega\omega$-Approximation des Linienraums, die ω-approximationsfähige n-dimensionale Linienmannigfaltigkeit, der ω-brennapproximationsfähige Linienkomplex, der ω-brennapproximationsfähige Linienraum, der $\omega\omega$-approximationsfähige Linienraum, der $\omega\omega$-brennapproximationsfähige Linienraum, die ω-Brennabbildung der ω-Brennhüllen des Linienkomplexes aus seiner Linie, die ω-Brennabbildung der ω-Brennhüllen des Linienraums aus seiner Linie, die $\omega\omega$-Brennabbildung der ω-Brennhüllen des Linienraums aus seiner Linie* aus den in der Kugelgeometrie angeführt Definitionen von analogen Begriffen, wenn wir in den angeführten kugelgeometrischen Definitionen die Begriffe bzw. die Bezeichnungen die Kugel, die Kugelmannigfaltigkeit, Ω, ${}^{\Omega}\varkappa$, ${}^{4\Omega}K^1$, ${}^{4\Omega}K^2$ durch die Begriffe bzw. die Bezeichnungen die Linie, die Linienmannigfaltigkeit, ω, ${}^{\omega}_{\alpha}\varkappa$, ${}^{4\omega}_{\alpha}K^1$, ${}^{4\omega}_{\alpha}K^2$ ersetzen.

Die Struktur bzw. *das Studium der durch die angeführten Begriffe erzeugten Problematik,* die wir kurz als „Linien-Brennproblematik“ von n-dimensionalen Linienmannigfaltikeiten bezeichnen wollen, *ist der Struktur* bzw. *dem Studium* der „Kugel-Brennproblematik“ von n-dimensionalen Kugelmannigfaltigkeiten *analog*. Einige der asugeprägt geometrisch darstellbaren Ergebnisse dieses Studiums kann man der Anschaulichkeit wegen anführen:

Die ω-Brennabbildung von ω-Brennhüllen des ω-brennapproximationsfähigen in einparametriges System von Normallinienkongruenzen eindeutig zerlegbaren Linienkomplexes aus der Linie seiner ω-Approximation ist identisch mit der Brennabbildung von Brennflächen der ω-Approximation genau dann, wenn die ω-Approximation von Normallinienkongruenz gebildet wird.

Im Fall, dass die ω-Approximation des ω-brennapproximationsfähigen Linienraums sein ω-Brennkomplex bildet, existiert immer eine ω-Brennabbildung von ω-Brennhüllen der ω-Approximation, die mit der ω-Brennabbildung von ω-Brennhüllen des Linienraums identisch ist.

Im Fall, dass die ω-Approximation des $\omega\omega$-brennapproximationsfähigen Linienraums sein ω-Brennkomplex bildet, existiert immer eine $\omega\omega$-Brennabbildung von ω-Brennhüllen des Linienraums aus der Linie seiner ω-Approximation, die mit der ω-Brennabbildung von ω-Brennhüllen der ω-Approximation bzw. mit der ω-Brennabbildung von ω-Brennhüllen der ω-Approximation und zugleich mit der ω-Brennabbildung von ω-Brennhüllen des Linienraums identisch ist.

Im Fall, dass die ω-Approximation des $\omega\omega$-brennapproximationsfähigen Linienraums sein ω-Brennkomplex bildet, existiert immer eine $\omega\omega$-Brennabbildung von ω-Brennhüllen des Linienraums aus der Linie seiner $\omega\omega$-Approximation, die mit der Brennabbildung von Brennflächen der $\omega\omega$-Approximation identisch ist.

Unter Voraussetzung in den Tensoren auf der rechten Seite der Gleichung (3) n für $n = 4$ wegzulassen und die zugehörigen φ_3, φ_4 zu benützen, kann man die kürzeste Synthese der Hauptergebnisse von meinen Arbeiten [10] bis [14] und von dieser Arbeit auf folgende Weise erzeugen:

Im Sinn der Arbeiten [10] *bis* [14] *und der vorgelegten Arbeit kann man das Theorem formulieren*:

Die Differentialgeometrie der Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten im dreidimensionalen euklidischen Raum kann unter Anwendung der Tensoren

$$r,\ {}_{\varphi_3\varphi_4}^{ds}T_i,\ {}_{\varphi_3\varphi_4}^{ss}T_{ij},\ {}_{\varphi_3\varphi_4}^{ds}T_{ij},\ {}_{\varphi_3\varphi_4}^{dd}T_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3, 4 \tag{T}$$

untersucht werden.

Literatur

[1] *W. Blaschke:* Vorlesungen über Differentialgeometrie III. Berlin 1929.

[2] *S. P. Finikov:* Теория конгруэнции. Moskva—Leningrad 1950.

[3] *V. Hlavatý:* Zur Lie'schen Kugelgeometrie: I. Kanalflächen. Věstník Král. čes. společnosti nauk, Praha 1941.

[4] *V. Hlavatý:* Zur Lie'schen Kugelgeometrie: Kongruenzen (Elementare Eigenschaften). Rozpravy II. tř. České akademie, roč. *LI*, č. 33.
[5] *V. Hlavatý:* Differentialgeometrie der Linienmannigfaltigkeiten I, II. Rozpravy II. tř. České akademie, roč. *L*, č. 27.
[6] *V. Hlavatý:* Differentialgeometrie der Kurven und Flächen und Tensorrechnung. JČMF Praha 1937.
[7] *V. F. Kagan:* Основы теории поверхностей в тензорном изложении I, II. Moskva—Leningrad 1947, 1948.
[8] *V. I. Šulikovskij:* Классифическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении. Moskva 1963.
[9] *Z. Vančura:* Les congruences de Lie-sphères (L-sphères). Spisy přír. fak. UK, Praha 1950.
[10] *Z. Vančura:* Die Brennflächen der Kugelkongruenz. Čas. pěst. mat. *80* (1955).
[11] *Z. Vančura:* Kugelkongruenzen und ihre Brennflächen. Adjungierte Linienkongruenzen und ihre Brennflächen. Rozpravy ČSAV, *78*, Praha 1968.
[12] *Z. Vančura:* Differentialgeometrie der zweidimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten im dreidimensionalen euklidischen Raum I. Commentationes Mathemat. Univ. Carol. *16*, 2 (1975).
[13] *Z. Vančura:* Differentialgeometrie der zweidimensionalen Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten im dreidimensionalen euklidischen Raum II. Commentationes Mathemat. Univ. Carol. *16*, 3 (1975).
[14] *Z. Vančura:* Adjunktionsfähige zweidimensionale Kugel- und Linienmannigfaltigkeiten im dreidimensionalen euklidischen Raum. Čas. pěst. mat. *105* (1980).

Anschrift des Verfassers: 166 29 Praha 6 - Dejvice, Thákurova 7 (stavební fakulta ČVUT).