Časopis pro pěstování matematiky

Pavla Vrbová; Antonín Vrba

M. Fiedler a V. Pták laureáty Národní ceny

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 103 (1978), No. 4, 424--426

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117990`

M. FIEDLER A V. PTÁK LAUREÁTY NÁRODNÍ CENY

21. dubna 1978 převzali vedoucí vědečtí pracovníci Matematického ústavu ČSAV prof. RNDr. MIROSLAV FIEDLER, DrSc., a prof. RNDr. VLASTIMIL PTÁK, DrSc., z rukou předsedy České národní rady Národní cenu, která jim byla společně udělena za soubor prací z teorie matic.

Oba studovali matematiku na Karlově universitě hned po válce. Dále se vzdělávali jako aspiranti tehdejšího Ústředního ústavu matematického. V Matematickém ústavu ČSAV, který z této instituce později vznikl, působí dodnes. Prof. Fiedler zde vede oddělení numerických metod, teorie grafů a matematické logiky a prof. Pták oddělení funkcionální analýzy.

Prof. Fiedler začal publikovat počátkem padesátých let. Jeho první práce jsou věnovány studiu algebraických křivek a geometrii simplexu. K druhému tématu se později ještě několikrát vrátil. Mezi pracemi z druhé poloviny padesátých let převládají numerické metody řešení algebraických rovnic a soustav lineárních rovnic. O numerické metody se prof. Fiedler stále zajímá a patří v tomto oboru k našim předním znalcům. Koncem padesátých let vycházejí také první jeho práce z teorie grafů, zaměřené tehdy zejména na aplikace v ekonomii. Hlavní oblastí činnosti prof. Fiedlera je už přes dvacet let teorie matic, ve které patří ke světové špičce. Různým aspektům lineární algebry je věnováno na šedesát z více než osmdesáti jeho dosud uveřejněných článků. Jsou v nich kombinovány algebraické, kombinatorické i geometrické ideje a výsledků bylo zpravidla dosaženo důmyslným využitím poměrně elementárních prostředků. Jde o vysokou matematiku, která koření v praktické realitě a svými důsledky se do ní zase vrací.

Prof. Pták se zabývá především funkcionální analýzou. První své práce o pologrupách uveřejnil kolem r. 1950. Potom následovala série článků o topologických lineárních prostorech a od poloviny padesátých let pak vycházejí jeho příspěvky k nejrůznějším oborům funkcionální analýzy i k sousedním disciplínám (topologie, teorie matic, analýza). Dosud publikoval více než sto prací. Jsou v nich obsaženy i výsledky, které mají základní význam pro příslušné partie (např. topologické lineární prostory, hermitovské algebry, kritické exponenty operátorů, věty o uzavřeném grafu) a za některé z nich byl r. 1966 prof. Pták odměněn Státní cenou Klementa Gottwalda. Pro jeho styl je příznačná přirozená motivace zkoumaných otázek a jejich elegantní výklad v širokých souvislostech. Prof. Pták už mnoho let vede pravidelný seminář, který se stal Mekkou českých i slovenských odborníků i zahraničních hostů. Účastníci semináře dobře znají jeho zájem o matice — při referování bývají v nejabstraktnějších místech přerušováni dotazem ohledně významu pro konečnou dimenzi.

Jak je vidět, průnikem zájmů prof. Fiedlera a prof. Ptáka je právě teorie matic. Není divu, že za dlouholetého pobytu ve společné pracovně došlo k syntéze diskrétního, geometrického, algebraického i funkcionálně analytického přístupu k této problematice a vzniklo tak 16 společných prací. Jejich vynikající výsledky jsou zařazeny do všech hlavních monografií, které v posledních letech vyšly (Faddějev-Faddějeva, Gantmacher, Householder, Marcus-Minc, Seneta, Todd, Varga), a jsou citovány snad ve stovkách časopiseckých článků.

Pokusme se několika slovy naznačit, v čem je hlavní přínos prací zařazených do oceněného souboru, i když je těžké vytrhnout je z kontextu ostatních prací obou autorů. Zejména prof. Fiedler se zabýval některými dále uvedenými otázkami i v řadě svých samostatných prací.

Nejprve si všimněme prací, věnovaných hlavně numerické matematice. V práci [4] byl poprvé ve světové literatuře vyšetřován vliv štěpení symetrické matice na rychlost konvergence příslušné iterační metody Gaussova-Seidelova typu. V práci [5] je k dané symetrické matici A konstruována posloupnost unitárních matic U_k taková, že matice $U_k A U_k^*$ za určitých předpokladů kvadraticky konvergují k diagonální matici, a je tak vlastně navržena iterační metoda pro výpočet kompletního spektra symetrické matice. Numerické aplikace má i práce [10], která se v podstatě zabývá otázkou, jak převést invertování velké matice na invertování matic menších. To lze využít zejména při invertování špatně podmíněných leontěvovských matic. I ve většině ostatních prací však najdeme numerické důsledky.

Různé souvislosti (lokalizace vlastních čísel, konvergence iteračních metod, analýza elektrických obvodů) vedly ke zkoumání matic s nekladnými nediagonálními prvky (Fan, Kotěljanskij, Ostrowski). V práci [7], která patří k nejcitovanějším z celého souboru, byla provedena syntéza dosavadních výsledků a byly odvozeny významné nové výsledky i jejich význam pro spektrální teorii, konvergenci iteračních procesů lineární algebry a maticové nerovnosti. Matice, patřící do zde zavedené třídy K, tj. čtvercové reálné matice s nekladnými nediagonálními prvky a s kladnými hlavními minory, byly pak dále studovány v pracích [13], [14], [15] a [16]. V práci [13] jsou kvantitativně vylepšeny některé výsledky práce [7], zejména pokud jde o aplikace na spektrální otázky, a pak jsou zkoumány souvislosti s větami o konvergenci relaxačních metod. Výsledky práce [4] rozšířené později R. S. Vargou na nesymetrické matice jsou zde zobecněny na obecnější třídu procesů Gaussova-Seidelova typu. Práce [16] byla inspirována Kotěljanského větou o odhadu determinantu matice pomocí determinantu majorantní matice z třídy K. Ta je zde dokázána přirozeným způsobem a podstatně zesílena. Mezi vlastnostmi pozitivně definitních matic a matic třídy K lze pozorovat některé příbuzné rysy. Obě třídy jsou však na druhé straně natolik rozdílné, že se zdá, jako by některé podobnosti byly čistě náhodné. V práci [14] však byly příbuznosti vysvětleny — jejich příčinou jsou vlastnosti bilineárních forem. Jinou třídou související s maticemi třídy K jsou matice s dominatní diagonálou. V práci [15] je navázáno na Ostrowského studium tříd matic diagonálně podobných maticím s převládající diagonálou a jsou charakterizovány třídy matic diagonálně podobných maticím, u nichž diagonála dominuje ve slabším smyslu.

V další sérii prací jsou hledána kritéria regularity čtvercové matice. Aplikujeme-li je na matice $A - \lambda I$, dostaneme tak oblasti, v nichž leží vlastní čísla matice A. Tak např. klasická Hadamardova věta o regularitě matice s dominantní diagonálou dává klasické Geršgorinovy kruhy. O těchto otázkách je rozsáhlá literatura a v kritériích známých před uveřejněním práce [6] vesměs figurovaly hodnoty prvků matice. V práci [6] byly odvozeny daleko obecnější odhady, v nichž vystupuje jen norma nediagonální části matice, přičemž výsledky platí pro širokou třídu norem včetně norem nejfrekventovanějších. Formulují-li se výsledky pro matice rozdělené na bloky, vyjasňuje se odlišná role diagonálních a nediagonálních bloků. Kritéria jiného typu jsou odvozena v práci [8]. Konečně dimenzionální prostor je zde rozložen na direktní součet podprostorů, na každém z nichž je dána nějaká norma. Ty pak indukují operátorové normy bloků, na něž je příslušným způsobem rozložena daná matice. Kritérium spočívá v tom, že matice je regulární, pokud jistá matice sestavená z uvedených norem patří k třídě K. Variujeme-li různým způsobem rozklad prostoru a volby konkrétních parciálních norem, dostáváme rozmanitá speciální kritéria regularity a příslušné věty o lokalizaci vlastních čísel, zahrnující i předtím známé výsledky (Geršgorin, Ostrowski, Fan, Brauer). Také práce [1] se zabývá touto problematikou. V pracích [2], [11] a [12] jsou dále vylepšeny konkrétní odhady odvozené v [8]. První dvě z těchto prací též rozvíjejí následující ideu: Je-li čtvercová matice A rozdělena na bloky

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & a \\ b & B \end{pmatrix}$$

kde α je číslo, dá se čekat, že pokud budou vektory a, b malé, bude některé vlastní číslo matice A blízké číslu α. V práci [12] je problém zobecněn: matice je rozdělena na čtyři bloky a odhaduje se spektrum matice pomocí spektra čtvercových diagonálních polí. V této souvislosti se také navrhují iterační procesy pro výpočet vlastních čísel.

Některé vlastnosti matic souvisejí jen s rozložením nulových a nenulových prvků a lze je tedy studovat čistě kombinatorickými metodami. V práci [3] jsou tak z klasické Perronovy-Frobeniovy věty o vlastním čísle nezáporné matice odvozeny přes kombinatorickou strukturu mocnin matice další informace o rozložení spektra nezáporné matice v závislosti na jejím indexu imprimitivity. Perronova-Frobeniova věta inspirovala i práci [17]. Podle [3] z ní totiž plyne, že dvojitě stochastická matice má vlastní číslo -1, jen když má sudý index imprimitivity, tj. jen když má (až na stejnou permutaci řádků a sloupců) blokově diagonální tvar. V práci [17] je odhadnuta vzdálenost ostatních vlastních čísel dvojitě stochastické matice, která tuto vlastnost nemá, od čísla -1 pomocí její vzdálenosti od matic, které uvedenou vlastnost mají, a pomocí její míry ireducibility. Kombinatorické postupy můžeme často najít i v jiných pracích, o nichž jsme se zde zmínili. Se vzdáleností prostoru matic se setkáváme též v práci [9], kde se studuje aproximace lineárních transformací konečně dimensionálního prostoru singulárními transformacemi. Je zajímavé, že minimální vzdálenost dané matice A od matic hodnosti nejvýše r je rovna $(r + 1)$-vému (podle velikosti) vlastnímu číslu matice AA^*.

Poslední dvě práce přispívají k teorii kuželů v konečně rozměrných prostorech. V práci [18] je zaveden názorný pojem diagonály konvexní množiny a jsou studovány diagonály polyedrických kuželů, zejména pak jejich souvislost s lineární závislostí extremálních paprsků. Dosažených výsledků je pak v práci [19] využito ke studiu kuželů lineárních operátorů. Hlavní výsledek ukazuje, že v konečně rozměrném prostoru může mít extremální operátor jakoukoliv hodnost h s výjimkou $h = 2$.

Srdečně blahopřejeme laureátům a těšíme se na další pěkné práce z jejich dílny.

Pavla a Antonín Vrbovi, Praha

SEZNAM OCENĚNÝCH PRACÍ

[1] *M. Fiedler:* Some estimates of spectra of matrices, Symp. PICC, Roma (1960), 33—36.

[2] *M. Fiedler:* Some estimates of the proper values of matrices, J. SIAM, *13* (1965), 1—5.

[3] *V. Pták:* Ob odnoj kombinatornoj teoreme i jejo primenenii k něotricatelnym matricam, Czech. Math. J. *8* (1958), 487—495.

[4] *M. Fiedler, V. Pták:* Über die Konvergenz des verallgemeinerten Seidelschen Verfahrens zur Lösung von Systemen linearer Gleichungen, Math. Nachr. *15* (1956), 31—38.

[5] *M. Fiedler, V. Pták:* O jedné iterační metodě diagonalisace symetrických matic, Čas. pěst. mat. *85* (1960), 18—36.

[6] *M. Fiedler, V. Pták:* Some inequalities for the spectrum of a matrix, Mat.-fyz. čas. SAV *10* (1960), 148—166.

[7] *M. Fiedler, V. Pták:* On matrices with non-positive off-diagonal elements and positive principal minors, Czech. Math. J. *12* (1962), 382—400.

[8] *M. Fiedler, V. Pták:* Generalized norms of matrices and the location of the spectrum, Czech. Math. J. *12* (1962), 558—571.

[9] *M. Fiedler, V. Pták:* Sur la meilleure approximation des transformations linéaires par des transformations de rang préscrit, C. R. Acad. Sci. *254* (1962), 3805—3807.

[10] *M. Fiedler, V. Pták:* On aggregation in matrix theory and its application to numerical inverting of large matrices, Bull. Acad. Polon. *11* (1963), 757—759.

[11] *M. Fiedler, V. Pták:* Ocenki i iteracionnyje metody dlja nachožděnija prostogo sobstvennogo čisla počti rozložimoj matricy, DAN SSSR *151* (1963), 790—793.

[12] *M. Fiedler, V. Pták:* Estimates and iteration procedures for proper values of almost decomposable matrices, Czech. Math. J. *14* (1964), 593—608.

[13] *M. Fiedler, V. Pták:* Some results on matrices of class K and their application to the convergence rate of iteration procedures, Czech. Math. J. *16* (1966), 260—273.

[14] *M. Fiedler, V. Pták:* Some generalizations of positive definitness and monotonicity, Num. Math. *9* (1966), 163—172.

[15] *M. Fiedler, V. Pták:* Diagonally dominant matrices, Czech. Math. J. *17* (1967), 420—433.

[16] *M. Fiedler, V. Pták:* Cyclic products and an inequality for determinants, Czech. Math. J. *19* (1969), 428—451.

[17] *M. Fiedler, V. Pták:* A quantitative extension of the Perron-Frobenius theorem for doubly stochastic matrices, Czech. Math. J. *25* (1975), 339—353.

[18] *M. Fiedler, V. Pták:* Diagonals of convex sets, Czech. Math. J. *28* (1978), 25—44.

[19] *M. Fiedler, V. Pták:* The rank of extreme positive operators on polyhedral cones, Czech. Math. J. *28* (1978), 45—55.