Časopis pro pěstování matematiky, roč. 97 (1972), Praha

GRUPY BODŮ PŘÍMKY A ROVINNÉ KONFIGURACE

JAROMÍR KRYS, Hradec Králové

(Došlo dne 11. 6. 1970, přepracované dne 16. 9. 1971)

Všechny problémy tohoto článku budeme řešit v euklidovské rovině, rozšířené o nevlastní a komplexní elementy. V literatuře [1] str. 88–89 je definována grupa regulárních bodů rovinné ireducibilní kubiky.

Definice I. Nechť O je regulární bod rovinné ireducibilní kubiky C. Dva regulární body P, Q kubiky C sečteme tak, že třetí průsečík R' jejich spojnice s kubikou C spojíme s O a třetí průsečík R této přímky s kubikou C je součtem daných bodů. Budeme značit $P + Q = R$.

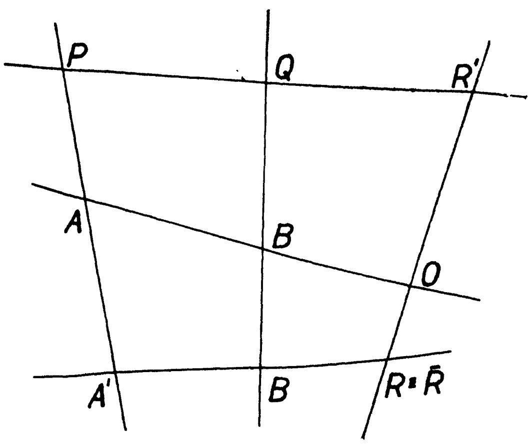
Uvažujme kubiku složenou z jednoduché kuželosečky k a přímky p. Předchozí operace sčítání se dá aplikovat jenom na body kuželosečky k, jestliže $O \in k$, $O \notin p$. V literatuře [2] je dokázáno:

Nechť kubika C je složena z jednoduché kuželosečky k a přímky p. Potom množina bodů kuželosečky k, které jsou regulárními body kubiky C tvoří vzhledem k uvažovanému sčítání komutativní grupu H.

V tomto článku zavedeme jinou definici sčítání bodů kubiky, která se však dá aplikovat na body přímky.

Definice II. Nechť A, B, P a Q jsou regulární body rovinné ireducibilní kubiky C. Označme A' třetí průsečík přímky AP s kubikou C a dále označme B' třetí průsečík přímky BQ s kubikou C. Třetí průsečík R přímky $A'B'$ s kubikou je součtem bodů P a Q. Budeme značit $P + Q = R$.

Dokažme pro ireducibilní kubiku ekvivalenci definic I a II za předpokladu, že třetí průsečík přímky AB z definice II s kubikou je bod O z definice I. (viz obr.).



Obr. 1.

V literatuře [3] str. 423–424 je dokázána věta:

Věta 1. *Tři spojnice všech šesti průsečíku kubiky a dvou přímek protnou kubiku v dalších třech bodech, jež leží rovněž v přímce.*

K této větě a předchozím definicím dodejme, že v případě splynutí některých dvojic bodů, je jejich spojnicí tečna ke křivce.

Nechť $P + Q = R$ podle definice I a $P + Q = \bar{R}$ podle definice II. Uvažujme přímky PQ, AB a $A'B'$. Všechny tyto body P, Q, A, B, A', B' leží na dvou přímkách a tedy podle věty 1 třetí průsečíky přímek PQ, AB a $A'B'$ s kubikou leží v přímce. Tyto body jsou však R', O a $\bar{R}$ a tedy $\bar{R}$ je třetí průsečík přímky $R'O$ s kubikou. Tento bod je však jednoznačně určen a proto musí být $R \equiv \bar{R}$.

Uvažujeme-li nyní kubiku složenou z jednoduché kuželosečky k a přímky p, potom můžeme aplikovat definici II a zavést sčítání bodů přímky p. Abychom konstrukci zjednodušili, vezmeme případ $A \equiv B$.

Definice III. Nechť $E \in k$, $E \notin p$. $P + Q = R$, kde R je průsečík přímky p s přímkou $P'Q'$, P' je druhý průsečík přímky PE s kuželosečkou k a Q' je druhý průsečík přímky QE s kuželosečkou k.

Věta 2. *Nechť kubika C je složena z jednoduché kuželosečky k a přímky p. Množina bodů přímky p, které jsou regulární body kubiky C tvoří vzhledem k definovanému sčítání komutativní grupu H.*

Důkaz. Zřejmě existuje kolineace K, která převádí kuželosečku k v kuželosečku $\bar{k}$ a přímku p v nevlastní přímku $\bar{p}$ roviny. Bod E nechť přejde v bod $O \in \bar{k}$. Potom přiřazení i, které bodu $A \in \bar{p}$ (A je regulární bod kubiky $\bar{C}$) přiřazuje bod $A' =$ p$= (AO \cap \bar{k}) \setminus \{O\}$, určuje na k sčítání $A' + B' = (A + B)'$, které bylo zavedeno v [2] před větou 20. Přiřazení i je zřejmě isomorfismus a uvažovaná grupa H je v tomto isomorfismu i isomorfní s grupou z věty 20 v [2].

Vezmeme-li speciálně K takovou, že reálné body $\bar{k}$ tvoří jednotkovou kružnici se středem v průsečíku S immaginární a reálné osy Gaussovy roviny a O bude totožný s obrazem čísla jedna, pak je zřejmé, že reálné body nevlastní přímky p tvoří vzhledem k uvažovanému sčítání grupu isomorfní multiplikativní grupě komplexních jednotek. Obsahuje tedy H cyklické podgrupy libovolného konečného řádu n. Prvky těchto cyklických grup tvoří na $\bar{k}$ pravidelný n-úhelník s vrcholem v O. Platí tedy:

Věta 3. *Nevlastní body určené uhlopříčkami a stranami pravidelného n-úhelníka tvoří vzhledem k uvažovanému sčítání bodů přímky, grupu G řádu n.*

Věta 4. *Nechť p je přímka komplexně projektivní roviny. Potom můžeme určit takové sčítání bodů přímky p, že vzhledem k tomuto sčítání tvoří body přímky p grupu H a tato grupa má podgrupy všech konečných řádů.*

Nyní odvodíme na základě předcházejících výsledků, celkem šest typů rovinných konfigurací.

Věta 5. *V rovině existují konfigurace typu* $(3n_{n-1}\ n(n-1)_3)$, *ke n je přirozené číslo větší než tři.*

Důkaz. Uvažujme kubiku složenou z kružnice k a nevlastní přímky. Pro dané n sestrojíme na kružnici k dva pravidelné n-úhelníky $(A'_1, \ldots, A'_n)$ a $(A''_1, \ldots, A''_n)$ z nichž jeden je vzhledem k druhému pootočen kolem středu kružnice k o úhel π/n. Zřejmě spojnice $A'_iA'_j$ a $A''_iA''_j$ $(i \neq j$ a $i, j = 1, \ldots, n)$ mají n nevlastních bodů $A_1, \ldots, A_n$. Na nevlastní přímce pak $A_1, \ldots, A_n$ tvoří grupu při sčítání definovaném pomocí k a A'_1 a zároveň (jinou) grupu při sčítání pomocí k a A''_1. Nyní dokážeme, že body $A_1, \ldots$ $\ldots, A_n$, $A'_1, \ldots, A'_n$, $A''_1, \ldots, A''_n$ v počtu $3n$ jsou body hledané konfigurace. Přímky konfigurace jsou přímky $A'_iA'_j$ a $A''_iA''_j$, kde $i \neq j$ a těchto přímek je zřejmě $n(n-1)$ a na každé z nich leží právě tři body konfigurace. Každým bodem A'_i a A''_i prochází právě $n-1$ těchto přímek. Zbývá dokázat, že také body A_i prochází právě $n-1$ těchto přímek. Tečny v bodech A'_i a A''_i musí procházet některým z bodů A_i (protože body A_i tvoří grupu). Bodem, který neleží na kružnici procházejí nejvýše dvě její tečny a proto každým bodem A_i prochází právě dvě uvažované tečny. Každým bodem A_i prochází tedy nejvýše $n-1$ přímek uvažované konfigurace. Protože těchto přímek je právě $n(n-1)$, musí procházet každým bodem A_i právě $n-1$ těchto přímek.

Prozkoumejme nyní podrobněji konfiguraci z věty 5 pro sudé n. Každým bodem A_i prochází buď právě $n/2$ přímek $A'_iA'_j$ a $(n-2)/2$ přímek $A''_iA''_j$, nebo $n/2$ přímek $A''_iA''_j$ a $(n-2)/2$ přímek $A'_iA'_j$. Vynechme v dané konfiguraci $n(n-2)/2$ přímek a to takových, že v bodě A_i, kterým prochází právě $n/2$ přímek $A'_iA'_j$ vynecháme $(n-2)/2$ přímek $A''_iA''_j$ a v bodě A_i, kterým prochází právě $n/2$ přímek $A''_iA''_j$ vynecháme $(n-2)/2$ přímek $A'_iA'_j$. Zřejmě vynecháme ty přímky $A'_iA'_jA_i(A''_iA''_jA_i)$, které jsou rovnoběžné s tečnami uvažované kružnice v bodech $A'_i(A''_i)$. Každým bodem A_i prochází nyní právě $n/2$ přímek. Bodem $A'_i(A''_i)$ prochází však také $n/2$ přímek, neboť každým tímto bodem prochází právě $n/2$ přímek konfigurace rovnoběžných se stranami daného n-úhelníka a právě $(n-2)/2$ přímek rovnoběžných s tečnami ve vrcholech daného n-úhelníka k opsané kružnici. Tím jsme dokázali:

Věta 6. *V rovině existují konfigurace typu* $(3n_{n/2}\ n \cdot n/2_3)$, *kde n je sudé přirozené číslo větší než čtyři.*

Vynecháme nyní v konfiguraci uvažované ve větě 5 pro n sudé $n \cdot n/2$ přímek a to takových, že v bodě A_i, kterým prochází právě $(n-2)/2$ přímek $A'_iA'_j$ vynecháme $n/2$ přímek $A''_iA''_j$ a v bodě A_i, kterým prochází právě $(n-2)/2$ přímek $A''_iA''_j$ vynecháme $n/2$ přímek $A'_jA'_i$. Zcela obdobnou úvahou, která předcházela větě 6, dokážeme, že nyní každým bodem A_i, A'_i a A''_i prochází právě $(n-2)/2$ přímek $A_iA'_iA'_j$ resp. $A_iA''_iA''_j$. Platí tedy:

Věta 7. *V rovině existují konfigurace typu* $(3n_{(n-2)/2}\ n\,.\,(n-2)/2_3)$, *kde n je sudé přirozené číslo větší než šest.*

Všechny vlastnosti, které jsme uvažovali při odvozování vět 5, 6 a 7 se dají zdualisovat. Proto platí:

Věta 8. *V rovině existují konfigurace typu* $(n(n-1)_3\ 3n_{n-1})$, $(n\,.\,n/2_3\ 3n_{n/2})$ a $(n\,.\,(n-2)/2_3\ 3n_{(n-2)/2})$, *kde n je pro prvý typ přirozené číslo větší než tři, pro druhý typ přirozené sudé číslo větší než čtyři a pro třetí typ je n přirozené číslo sudé větší než šest.*

Poznámka. Uvažujme body A'_i, A''_i a nevlastní body přímek $A'_iA''_j$, potom tyto body v počtu $3n$ a všechny přímky na kterých leží právě jeden bod A'_i a právě jeden bod A''_i tvoří konfiguraci typu $(3n_n\ n_3^2)$. Podrobný důkaz tohoto tvrzení a další výsledky jsou uvedeny v literatuře [4].

Literatura

[1] *B. L. van der Waerden:* Einführung in die algebraiche Geometrie. Berlin 1939 str. 88—91.

[2] *J. Krys:* Konfigurace bodů rovinné kubiky. Časopis pro pěstování matematiky. *94* (1969), 282—289.

[3] *B. Bydžovský:* Úvod do algebraické geometrie. Praha 1948 str. 423—424.

[4] *J. Krys:* Rovinné konfigurace typu $(3n_n\ n_3^2)$. Časopis pro pěstování matematiky. *95* (1970), 66—70.

Adresa autora: Hradec Králové, Leninovo nám. 301 (Pedagogická fakulta).

Zusammenfassung

GRUPPEN VON PUNKTEN EINER GERADEN UND EBENE KONFIGURATIONEN

JAROMÍR KRYS, Hradec Králové

Bei der Untersuchung von ebenen Kubiken benützt man die bekannte Konstruktion für die Addierung von Punkten auf einer irreduziblen Kubik, welche die regulären Punkte dieser Kurve mit der Struktur einer Abelschen Gruppe versieht. In diesem Artikel ändert der Verfasser diese Konstruktion sodass man diese auch für soeine Kubik benützen kann, welche in einen Kegelschnitt und eine Gerade zerfällt und dass diese Konstruktion die Addierung von Punkten auf dieser Geraden ermöglicht.