

Jaroslav Bayer

O projektivních deformacích kongruencí rovin v  $n$ -rozměrném projektivním prostoru

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 97 (1972), No. 2, 113--130

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/117754>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1972

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

## O PROJEKTIVNÍCH DEFORMACÍCH KONGRUENCÍ ROVIN V $n$ -ROZMĚRNÉM PROJEKTIVNÍM PROSTORU

JAROSLAV BAYER, BRNO

(Došlo dne 27. května 1970)

V této práci je zkoumána existence projektivní deformace 2. řádu kongruencí rovin projektivního prostoru  $P_n$  (pro  $n > 5$ ) v souvislosti s deformacemi 1. řádu jiných objektů a v jednotlivých případech je prokázána existence dvojic  $(C, \tilde{L})$ .

Podnětem k této práci byl seminář prof. K. SVOBODY o soustavách Pfaffových rovnic.

1. Je zde provedena částečná specializace průvodního reperu kongruence rovin v  $P_n$  tím, že vrcholy  $A_1, A_2, A_3$  reperu jsou umístěny v ohniscích běžné roviny kongruence. Při pohybu roviny bude každé ze tří ohnisek opisovat fokální plochu dané kongruence rovin. Ve specializaci je pokračováno dalším zjednodušením až do tvaru vhodného pro naše použití.

2. Jsou zde uvedeny nutné a postačující podmínky existence projektivních deformací 1. a 2. řádu kongruencí rovin v projektivních prostorech  $P_n$  a  $\tilde{P}_n$ .

3. Pomocí tečné kolineace je realizována korespondence mezi fokálními plochami, která je deformací 1. řádu. Je ukázáno, že její existence je nutnou a postačující podmínkou k existenci projektivní deformace 2. řádu kongruence rovin v  $P_n$  pro  $n \geq 8$  a dokázána existenční věta pro dvojici  $(C, \tilde{L})$ .

4. Zavedená korespondence  $C^* : [E^7 E^8] \mapsto [E^7 E^8]$  současně s korespondencemi  $C_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) jsou deformacemi 1. řádu a jejich existence je nutnou a postačující podmínkou k existenci projektivní deformace 2. řádu kongruencí rovin v  $P_7$ . Je zde dokázána existence dvojice  $(C, \tilde{L})$ .

5. Konečně existence korespondence  $C^x : E^7 \mapsto \tilde{E}^7$  a korespondencí  $C_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), které jsou deformacemi 1. řádu, jsou nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby existovala projektivní deformace 2. řádu kongruencí rovin v  $P_6$  a existence dvojice  $(C, \tilde{L})$  je zde dokázána.

## 1. SPECIALIZACE REPERU KONGRUENCE

V projektivním  $n$ -rozměrném prostoru  $P_n$  ( $n > 5$ ) provedeme částečnou specializaci průvodního reperu. O funkcích vyskytujících se v dalším budeme vždy předpokládat, že jsou spojitě diferencovatelné až do potřebného řádu, resp. že jsou analytické. Reperem projektivního prostoru  $P_n$  ( $n > 5$ ) budeme rozumět kteroukoliv uspořádanou  $(n + 1)$ -tici lineárně nezávislých aritmetických bodů  $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ , pro něž

$$(1,1) \quad [A_1 A_2 \dots A_{n+1}] = 1.$$

V dalším budou sčítací indexy nabývat vždy hodnot:

$$\begin{aligned} m &= 1, 2, \dots, n + 1, & i &= 1, 2, 3, \\ u &= 1, 2, \dots, n + 1, & j &= 1, 2, 3, \\ v &= 1, 2, \dots, n + 1, & I &= 4, 5, 6, \\ M &= 4, 5, \dots, n + 1, & k &= 7, 8, 9, \dots, n + 1, \\ N &= 4, 5, \dots, n + 1, & l &= 7, 8, 9, \dots, n + 1. \end{aligned}$$

Obecný pohyblivý reper závisí na  $(n + 1)^2 - 1$  parametrech a relativní komponenty  $\omega_u^m$  jsou pak určeny na základě

$$(1,2) \quad dA_u = \sum_m \omega_u^m A_m,$$

kde

$$(1,3) \quad D\omega_u^m = \sum_v \omega_u^v \wedge \omega_v^m.$$

Diferencováním (1,1) dostaneme

$$(1,4) \quad \sum_u \omega_u^u = 0.$$

Nyní zvolíme vrcholy  $A_1, A_2, A_3$  reperu vždy v rovině kongruence  $L$ . Diferencováním dostaneme

$$(1,5) \quad \begin{aligned} d[A_1 A_2 A_3] &= \omega_1^1 [A_1 A_2 A_3] + \sum_M \omega_1^M [A_M A_2 A_3] + \\ &+ \omega_2^2 [A_1 A_2 A_3] + \sum_M \omega_2^M [A_1 A_M A_3] + \omega_3^3 [A_1 A_2 A_3] + \sum_M \omega_3^M [A_1 A_2 A_M], \end{aligned}$$

V dalším se omezíme na studium kongruencí charakteru 5. Budeme předpokládat, že v každé běžné rovině kongruence existují tři ohniska neležící na jedné přímce.

Symbolem  $\delta$  označíme variaci (diferencování pouze podle vedlejších parametrů) a položíme

$$\omega_u^m(\delta) = e_u^m.$$

Variací (1,5) obdržíme

$$\delta[A_1 A_2 A_3] = (e_1^1 + e_2^2 + e_3^3) \cdot [A_1 A_2 A_3],$$

takže formy

$$(1,6) \quad \omega_i^M$$

jsou hlavní.

Protože hlavní formy závisí pouze na dvou hlavních parametrech, jsou mezi nimi pouze dvě nezávislé, dejme tomu

$$(1,7) \quad \omega_1^4 \equiv \omega_1 ; \quad \omega_2^5 \equiv \omega_2$$

a necht'

$$\omega_3^6 \equiv \omega_3 = a_3^6(\omega_1 + r\omega_2), \quad \text{kde } a_3^6 \neq 0, \quad r \neq 0, \quad r \neq \infty.$$

Zbývající hlavní formy (1,6) vyjádříme jako lineární kombinace forem (1,7).

Všechny koeficienty hlavních forem (1,6) závisí obecně na hlavních a vedlejších parametrech.

Bod  $F = \sum_i x^i A_i$  se nazývá ohniskem příslušným k fokálnímu směru  $p_1\omega_1 + p_2\omega_2 = 0$ , jestliže při pohybu roviny v tomto fokálním směru je  $[A_1 A_2 A_3 dF] = 0$ .

Nyní provedeme specializaci reperu tak, aby vrchol  $A_i$  byl ohniskem příslušným ke směru  $\omega_i = 0$ , což vyjádříme rovnicí

$$(1,8) \quad [A_1 A_2 A_3 dA_i]_{\omega_i=0} = 0.$$

Z (1,2<sub>1,2,3</sub>) užitím (1,8) plyne

$$(1,9) \quad \omega_i \wedge \omega_i^M = 0, \quad \text{pro } i = 1, 2 \text{ je } M \neq i + 3.$$

Z předcházejících vztahů (1,9), aplikací Cartanova lemmatu plyne dále:

$$(1,10) \quad \omega_i^M = a_i^M \omega_i, \quad \text{rovněž pro } i = 1, 2 \text{ je } M \neq i + 3.$$

Při další specializaci reperu se podle předcházejícího omezujeme na případ, že každé ze tří ohnisek při pohybu roviny opisuje regulární plochu (nazveme ji plochou fokální).

Po dosazení (1,10) do (1,2) je z prvních tří rovnic vidět, že tečné roviny fokálních ploch ( $A_i$ ), v příslušných bodech  $A_i$ , leží v prostorech

$$(1,11) \quad [A_1 A_2 A_3 \sum_M a_i^M A_M], \quad \text{kde } a_1^4 = a_2^5 = 1.$$

Zvolíme reper tak, aby uvedené tečné prostory (1,11) byly

$$[A_1 A_2 A_3 a_i^{i+3} A_{i+3}], \quad \text{kde } a_1^4 = a_2^5 = 1, \quad \text{tj. } a_i^M = 0 \quad \text{pro } M \neq i + 3.$$

Odtud podle (1,10) plyne

$$(1,12) \quad \omega_i^M = 0 \quad \text{pro } M \neq i + 3.$$

Všimněme si nyní podrobněji hlavní formy

$$\omega_3 \equiv \omega_3^6 = a_3^6(\omega_1 + r\omega_2).$$

Vnějšíším diferencováním dostaneme

$$\begin{aligned} & \omega_1 \wedge \{da_3^6 + a_3^6(\omega_1^1 + \omega_6^6 - \omega_3^3 - \omega_4^4)\} + \\ & + \omega_2 \wedge \{d(a_3^6 r) + a_3^6 r(\omega_2^2 + \omega_6^6 - \omega_3^3 - \omega_5^5)\} = 0. \end{aligned}$$

V dalším se omezíme na případ  $a_3^6 \neq 0$  a bez újmy na obecnosti zvolíme  $a_3^6 = 1$ . V tomto případě je  $r$  relativním invariantem a

$$(1,13) \quad \omega_3^6 = \omega_1 + r\omega_2 \equiv \omega_3.$$

Ze tří hlavních forem  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  jsou každé dvě navzájem nezávislé, neboť platí

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0; \quad \omega_1 \wedge \omega_3 \neq 0; \quad \omega_2 \wedge \omega_3 \neq 0.$$

Vypočtěme jejich vnější diferenciály

$$\begin{aligned} D\omega_1 &= \omega_1 \wedge (\omega_4^4 - \omega_1^1); \quad D\omega_2 = \omega_2 \wedge (\omega_5^5 - \omega_2^2); \\ D(\omega_1 + r\omega_2) &= (\omega_1 + r\omega_2) \wedge (\omega_6^6 - \omega_3^3). \end{aligned}$$

Vnějšíším diferencováním rovnic (1,12) a užitím Cartanova lemmatu určíme další hlavní formy a zapíšeme je jako lineární kombinace příslušných dvou nezávislých hlavních forem (1,13) ve tvaru

$$(1,14) \quad \begin{array}{ll} \omega_1^2 = a_1^2 \omega_1 + \alpha_1^2 \omega_2, & \omega_6^k = \beta_3^{k-3}(\omega_1 + r\omega_2) \\ \omega_1^3 = a_1^3 \omega_1 + \alpha_1^3(\omega_1 + r\omega_2), & \omega_4^5 = \beta_1^2 \omega_1 - a_1^2 \omega_2, \\ \omega_4^k = \beta_1^{k-3} \omega_1, & \omega_4^6 = \beta_1^3 \omega_1 - a_1^3(\omega_1 + r\omega_2), \\ \omega_2^1 = \alpha_2^1 \omega_1 + a_2^1 \omega_2, & \omega_5^4 = -a_2^1 \omega_1 + \beta_2^1 \omega_2, \\ \omega_2^3 = a_2^3 \omega_2 + \alpha_2^3(\omega_1 + r\omega_2), & \omega_5^6 = \beta_2^3 \omega_2 - a_2^3(\omega_1 + r\omega_2), \\ \omega_5^k = \beta_2^{k-3} \omega_2, & \omega_6^4 = -a_3^1 \omega_1 + \beta_3^1(\omega_1 + r\omega_2), \\ \omega_3^1 = \alpha_3^1 \omega_1 + a_3^1(\omega_1 + r\omega_2), & \omega_6^5 = -a_3^2 \omega_2 + \beta_3^2(\omega_1 + r\omega_2). \\ \omega_3^2 = \alpha_3^2 \omega_2 + a_3^2(\omega_1 + r\omega_2). & \end{array}$$

Vnějšíším derivováním hlavních forem (1,14) obdržíme

$$(1,15) \quad \begin{aligned} & \omega_1 \wedge \{da_1^2 + a_1^2(\omega_2^2 - \omega_4^4) + \omega_4^2\} + \\ & + \omega_2 \wedge \{d\alpha_1^2 + \alpha_1^2(2\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_5^5)\} + \omega_1^3 \wedge \omega_3^2 = 0, \\ & \omega_1 \wedge \{da_1^3 + a_1^3(\omega_3^3 - \omega_4^4) + \omega_4^3\} + \\ & + (\omega_1 + r\omega_2) \wedge \{d\alpha_1^3 + \alpha_1^3(2\omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_6^6)\} + \omega_1^2 \wedge \omega_2^3 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \omega_1 \wedge \{d\alpha_2^1 + \alpha_2^1(2\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_4^4)\} + \\
& + \omega_2 \wedge \{da_2^1 + a_2^1(\omega_1^1 - \omega_5^5) + \omega_5^1\} + \omega_2^3 \wedge \omega_3^1 = 0, \\
& \omega_2 \wedge \{d\alpha_2^3 + a_2^3(\omega_3^3 - \omega_5^5) + \omega_5^3\} + \\
& + (\omega_1 + r\omega_2) \wedge \{d\alpha_2^3 + \alpha_2^3(2\omega_3^3 - \omega_2^2 - \omega_6^6)\} + \omega_2^1 \wedge \omega_1^3 = 0, \\
& \omega_1 \wedge \{d\alpha_3^1 + \alpha_3^1(2\omega_1^1 - \omega_3^3 - \omega_4^4)\} + \\
& + (\omega_1 + r\omega_2) \wedge \{da_3^1 + a_3^1(\omega_1^1 - \omega_6^6) + \omega_6^1\} + \omega_3^2 \wedge \omega_2^1 = 0, \\
& \omega_2 \wedge \{d\alpha_3^2 + \alpha_3^2(2\omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_5^5)\} + \\
& + (\omega_1 + r\omega_2) \wedge \{da_3^2 + a_3^2(\omega_2^2 - \omega_6^6) + \omega_6^2\} + \omega_3^1 \wedge \omega_1^2 = 0, \\
& \omega_1 \wedge \{d\beta_1^2 + \beta_1^2(\omega_1^1 + \omega_5^5 - 2\omega_4^4) + \sum_k \beta_1^{k-3} \omega_k^5\} - \\
& - \omega_2 \wedge \{da_1^2 + a_1^2(\omega_2^2 - \omega_4^4) + \omega_4^2\} + \omega_4^6 \wedge \omega_6^5 = 0, \\
& \omega_1 \wedge \{d\beta_1^3 + \beta_1^3(\omega_1^1 + \omega_6^6 - 2\omega_4^4) + \sum_k \beta_1^{k-3} \omega_k^6\} - \\
& - (\omega_1 + r\omega_2) \wedge \{da_1^3 + a_1^3(\omega_3^3 - \omega_4^4) + \omega_4^3\} + \omega_4^5 \wedge \omega_5^6 = 0, \\
& -\omega_1 \wedge \{da_2^1 + a_2^1(\omega_1^1 - \omega_5^5) + \omega_5^1\} + \\
& + \omega_2 \wedge \{d\beta_2^1 + \beta_2^1(\omega_2^2 + \omega_4^4 - 2\omega_5^5) + \sum_k \beta_2^{k-3} \omega_k^4\} + \omega_5^6 \wedge \omega_6^4 = 0, \\
& \omega_2 \wedge \{d\beta_2^3 + \beta_2^3(\omega_2^2 + \omega_6^6 - 2\omega_5^5) + \sum_k \beta_2^{k-3} \omega_k^6\} - \\
& - (\omega_1 + r\omega_2) \wedge \{da_2^3 + a_2^3(\omega_3^3 - \omega_5^5) + \omega_5^3\} + \omega_5^4 \wedge \omega_4^6 = 0, \\
& -\omega_1 \wedge \{da_3^1 + a_3^1(\omega_1^1 - \omega_6^6) + \omega_6^1\} + \\
& + (\omega_1 + r\omega_2) \wedge \{d\beta_3^1 + \beta_3^1(\omega_3^3 + \omega_4^4 - 2\omega_6^6) + \sum_k \beta_3^{k-3} \omega_k^4\} + \omega_6^5 \wedge \omega_5^4 = 0, \\
& -\omega_2 \wedge \{da_3^2 + a_3^2(\omega_2^2 - \omega_6^6) + \omega_6^2\} + \\
& + (\omega_1 + r\omega_2) \wedge \{d\beta_3^2 + \beta_3^2(\omega_3^3 + \omega_5^5 - 2\omega_6^6) + \sum_k \beta_3^{k-3} \omega_k^5\} + \omega_6^4 \wedge \omega_4^5 = 0, \\
& \omega_1 \wedge \{d\beta_1^{k-3} + \beta_1^{k-3}(\omega_1^1 - 2\omega_4^4 + \omega_k^k) + \sum_{i=1}^{n-5} \beta_1^{3+i} \omega_{6+i}^k\} + \Theta_1 = 0, \\
& \omega_2 \wedge \{d\beta_2^{k-3} + \beta_2^{k-3}(\omega_2^2 - 2\omega_5^5 + \omega_k^k) + \sum_{i=1}^{n-5} \beta_2^{3+i} \omega_{6+i}^k\} + \Theta_2 = 0, \\
& (\omega_1 + r\omega_2) \wedge \{d\beta_3^{k-3} + \beta_3^{k-3}(\omega_3^3 - 2\omega_6^6 + \omega_k^k) + \sum_{i=1}^{n-5} \beta_3^{3+i} \omega_{6+i}^k\} + \Theta_3 = 0,
\end{aligned}$$

kde  $\Theta_i$  označuje vnější součin příslušných hlavních forem. Z (1,15) je vidět, že  $\alpha_i^j$  ( $i \neq j$ ) jsou relativní invarianty, takže je možno specializovat reper volbou  $a_i^j = 0$  pro  $i \neq j$ .

Při této volbě reperu je podle (1,14)

$$(1,16) \quad \begin{aligned} \omega_i^j &= \alpha_i^j \omega_j & \text{pro } i \neq j, \\ \omega_{i+3}^M &= \beta_i^{M-3} \omega_i & \text{pro } M \neq i+3. \end{aligned}$$

Další úvahy budou se vztahovat na právě sestrojený reper.

## 2. PROJEKTIVNÍ DEFORMACE

Budiž dána kongruence  $L$  rovin v  $P_n$  ( $n > 5$ ) s reperem specializovaným podle předchozího paragrafu a kongruence  $\tilde{L}$  rovin v projektivním prostoru  $\tilde{P}_n$ , s obdobně specializovaným reperem. Reper, Pfaffovy formy a všechny relace patřící ke kongruenci  $\tilde{L}$  budeme označovat vlnovkou. Necht' mezi kongruencemi existuje rozvinutelná korespondence  $C: L \rightarrow \tilde{L}$ , určená analyticky rovnicemi

$$(2,1) \quad \begin{aligned} \tilde{\omega}_u^v &= \omega_u^v + \tau_u^v; \\ \text{pro } \tau_1^4 = \tau_2^5 = 0 & \text{ je } \tilde{\omega}_1 = \omega_1 \text{ a } \tilde{\omega}_2 = \omega_2. \end{aligned}$$

Korespondence  $C$  mezi rovinami  $\sigma$  a  $\tilde{\sigma}$  nazývá se projektivní deformací řádu  $k = 1, 2$ , když ke každé dvojici odpovídajících si rovin  $\sigma, \tilde{\sigma}$  existuje kolíneace  $K: P_n \rightarrow \tilde{P}_n$ , která realizuje analytický styk řádu  $k$  mezi kongruencemi  $\tilde{L}$  a  $KL$  rovin, v rovině  $\tilde{\sigma} = K\sigma = C\sigma$ .

Tyto požadavky jsou analyticky vyjádřeny rovnicemi:

$$(2,2) \quad K[A_1 A_2 A_3] = [\tilde{A}_1 \tilde{A}_2 \tilde{A}_3],$$

$$(2,3) \quad K d[A_1 A_2 A_3] = d[\tilde{A}_1 \tilde{A}_2 \tilde{A}_3] + \vartheta_1[\tilde{A}_1 \tilde{A}_2 \tilde{A}_3],$$

$$(2,4) \quad K d^2[A_1 A_2 A_3] = d^2[\tilde{A}_1 \tilde{A}_2 \tilde{A}_3] + 2\vartheta_1 d[\tilde{A}_1 \tilde{A}_2 \tilde{A}_3] + \vartheta_2[\tilde{A}_1 \tilde{A}_2 \tilde{A}_3]$$

pro  $k = 2$ , kde  $\vartheta_{1,2}$  je jakási Pfaffova forma. Pro jednoduchost budeme předpokládat existenci regulární kolíneace  $K$ , realizující projektivní deformaci 2. řádu ve tvaru

$$(2,5) \quad KA_i = c_i^i \tilde{A}_i, \quad KA_M = \sum_u c_M^u \tilde{A}_u.$$

Protože kolíneace  $K$  je regulární, platí

$$c_1^1 c_2^2 c_3^3 |c_M^N| \neq 0,$$

přičemž  $|c_M^N|$  je determinant o prvcích  $c_M^N$ .

Vyšetřujme nyní projektivní deformaci 1. řádu. Podle (2,2) z (2,5) vyplývá

$$(2,6) \quad c_1^1 c_2^2 c_3^3 = 1.$$

Pomocí zkonstruovaného reperu stanovíme diferenciál roviny  $[A_1A_2A_3]$  ve tvaru

$$(2,7) \quad d[A_1A_2A_3] = [A_1A_2A_3](\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3) - [A_1A_3A_5]\omega_2 + \\ + [A_2A_3A_4]\omega_1 + [A_1A_2A_6](\omega_1 + r\omega_2).$$

Dosazením (2,7) do rovnice (2,3) s využitím (2,5) a s přihlédnutím k (2,6) dostaneme

$$(2,8) \quad [\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_3] \cdot \{(\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3) + \omega_2c_1^1c_3^3c_5^2 + (\omega_1 + r\omega_2)c_1^1c_2^2c_6^3 + \\ + \omega_1c_2^2c_3^3c_4^1\} + \sum_M [\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_M](\omega_1 + r\omega_2)c_1^1c_2^2c_6^M + \sum_M [\tilde{A}_1\tilde{A}_3\tilde{A}_M](-\omega_2)c_1^1c_3^3c_5^M + \\ + \sum_M [\tilde{A}_2\tilde{A}_3\tilde{A}_M]\omega_1c_2^2c_3^3c_4^M = [\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_3](\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \tau_1^1 + \tau_2^2 + \tau_3^3 + \vartheta_1) + \\ + [\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_6](\omega_1 + r\omega_2) + [\tilde{A}_1\tilde{A}_3\tilde{A}_5](-\omega_2) + [\tilde{A}_2\tilde{A}_3\tilde{A}_4]\omega_1.$$

Ze srovnání koeficientů v rovnici (2,8) plyne

$$(2,9) \quad c_j^M = 0 \quad \text{pro } I \neq M; \\ c_i^i = c_{i+3}^{i+3}; \quad \tilde{r} = r;$$

$$\vartheta_1 = (c_2^2c_3^3c_4^1 + c_1^1c_2^2c_6^3)\omega_1 + (c_1^1c_3^3c_5^2 + c_1^1c_2^2c_6^3r)\omega_2 - (\tau_1^1 + \tau_2^2 + \tau_3^3).$$

Zavedením jednoduššího označení  $c_i^i = q_i$  se původní rovnice (2,5) kolineace  $K$  redukuje na tvar

$$(2,10) \quad KA_i = q_i\tilde{A}_i, \quad KA_{i+3} = \sum_i c_{i+3}^i\tilde{A}_i + q_i\tilde{A}_{i+3}, \quad KA_k = \sum_m c_k^m\tilde{A}_m.$$

Při vyšetřování projektivní deformace 2. řádu budeme potřebovat řadu pomocných vypočtů, které nyní přehledně uvedeme. Z diferenciálních rovnic zkonstruovaného reperu dostaneme:

$$(2,11) \quad d^2[A_1A_2A_3] = (\cdot)[A_1A_2A_3] + \{\beta_3^1(\omega_1 + r\omega_2)^2 - \alpha_3^1(\omega_1)^2\}[A_1A_2A_4] + \\ + \{\beta_3^2(\omega_1 + r\omega_2)^2 - \alpha_3^2(\omega_2)^2\}[A_1A_2A_5] + \\ + \{(2\omega_1^1 + 2\omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_6^6)(\omega_1 + r\omega_2) + d\omega_1 + d\omega_2 \cdot r + \omega_2 dr\}[A_1A_2A_6] + \\ + \sum_k (\omega_1 + r\omega_2)^2 \beta_3^{k-3}[A_1A_2A_k] + \{\alpha_2^1(\omega_1)^2 - \beta_2^1(\omega_2)^2\}[A_1A_3A_4] + \\ + \{(2\omega_1^1 + \omega_2^2 + 2\omega_3^3 + \omega_5^5)(-\omega_2) - d\omega_2\}[A_1A_3A_5] + \\ + \{\alpha_2^2(\omega_1 + r\omega_2)^2 - \beta_2^2(\omega_2)^2\}[A_1A_3A_6] + \\ - \sum_k \beta_2^{k-3}(\omega_2)^2 [A_1A_3A_k] + 2\omega_2(\omega_1 + r\omega_2)[A_1A_5A_6] + \\ + \{\omega_1(\omega_1^1 + 2\omega_2^2 + 2\omega_3^3 + \omega_4^4) + d\omega_1\}[A_2A_3A_4] + \\ + \{\beta_1^2(\omega_1)^2 - \alpha_1^2(\omega_2)^2\}[A_2A_3A_5] + \\ + \{\beta_1^3(\omega_1)^2 - \alpha_1^3(\omega_1 + r\omega_2)^2\}[A_2A_3A_6] + \\ + \sum_k \beta_1^{k-3}(\omega_1)^2 [A_2A_3A_k] + \\ - 2\omega_1(\omega_1 + r\omega_2)[A_2A_4A_6] + 2\omega_1\omega_2[A_3A_4A_5].$$



Porovnáním vnějších diferenciálů hlavních forem a užitím Cartanova lemmatu vyjádříme nové hlavní formy

$$(2,12) \quad \tau_i^i - \tau_{i+3}^{i+3} = f_i \omega_i.$$

Nyní máme již vše potřebné k vyšetření projektivní deformace 2. řádu. Z relace (2,4) stanovíme

$$(2,13) \quad K d^2[A_1 A_2 A_3] = \{q_1 q_3^{-1} [\beta_3^1(\omega_1 + r\omega_2) - \alpha_3^1(\omega_1)^2] - 2q_3^{-1} c_6^1 \omega_1(\omega_1 + r\omega_2) + \\ + \sum_k q_3^{-1} c_k^4 \beta_3^{k-3}(\omega_1 + r\omega_2)\} [\tilde{A}_1 \tilde{A}_2 \tilde{A}_4] + \\ + \{q_2 q_3^{-1} [\beta_3^2(\omega_1 + r\omega_2)^2 - \alpha_3^2(\omega_2)^2] - 2q_3^{-1} c_6^2 \omega_2(\omega_1 + r\omega_2) + \\ + \sum_k q_3^{-1} c_k^5 \beta_3^{k-3}(\omega_1 + r\omega_2)\} [\tilde{A}_1 \tilde{A}_2 \tilde{A}_5] + \\ + \{d(\omega_1 + r\omega_2) + (\omega_1 + r\omega_2)(2\omega_1^1 + 2\omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_6^6) + 2q_2^{-1} c_5^2 \omega_2(\omega_1 + r\omega_2) + \\ + 2q_1^{-1} c_4^1 \omega_1(\omega_1 + r\omega_2) + \sum_k q_3^{-1} c_k^6 \beta_3^{k-3}(\omega_1 + r\omega_2)^2\} [\tilde{A}_1 \tilde{A}_2 \tilde{A}_6] + \\ + \sum_j \sum_k q_3^{-1} c_k^j \beta_3^{k-3}(\omega_1 + r\omega_2)^2 [\tilde{A}_1 \tilde{A}_2 \tilde{A}_j] + \\ + \{q_1 q_2^{-1} [\alpha_2^1(\omega_1)^2 - \beta_2^1(\omega_2)^2] + 2q_2^{-1} c_5^1 \omega_1 \omega_2 + \\ + \sum_k q_2^{-1} c_k^4 (-\beta_2^{k-3})(\omega_2)^2\} [\tilde{A}_1 \tilde{A}_3 \tilde{A}_4] + \\ - \{d\omega_2 + \omega_2(2\omega_1^1 + \omega_2^2 + 2\omega_3^3 + \omega_5^5) + (\omega_1 + r\omega_2) 2q_3^{-1} c_6^3 \omega_2 + 2q_1^{-1} c_4^1 \omega_1 \omega_2 + \\ + \sum_k q_2^{-1} c_k^5 \beta_2^{k-3}(\omega_2)^2\} [\tilde{A}_1 \tilde{A}_3 \tilde{A}_5] + \\ + q_3 q_2^{-1} [\alpha_2^3(\omega_1 + r\omega_2)^2 - \beta_2^3(\omega_2)^2] + 2q_2^{-1} c_5^3 \omega_2(\omega_1 + r\omega_2) - \\ - \sum_k q_2^{-1} c_k^6 \beta_2^{k-3}(\omega_2)^2\} [\tilde{A}_1 \tilde{A}_3 \tilde{A}_6] + \\ + \sum_j \sum_k q_2^{-1} c_k^j (-\beta_2^{k-3})(\omega_2)^2 [\tilde{A}_1 \tilde{A}_3 \tilde{A}_j] + \\ + 2\omega_2(\omega_1 + r\omega_2) [\tilde{A}_1 \tilde{A}_5 \tilde{A}_6] + \\ + \{d\omega_1 + \omega_1(\omega_1^1 + 2\omega_2^2 + 2\omega_3^3 + \omega_4^4) + 2q_3^{-1} c_6^3 \omega_1(\omega_1 + r\omega_2) + \\ + 2q_2^{-1} c_5^2 \omega_1 \omega_2 + \sum_k q_1^{-1} c_k^4 \beta_1^{k-3}(\omega_1)^2\} [\tilde{A}_2 \tilde{A}_3 \tilde{A}_4] + \\ + \{q_1^{-1} q_2 [\beta_1^2(\omega_1)^2 - \alpha_1^2(\omega_2)^2] - 2q_1^{-1} c_4^2 \omega_1 \omega_2 + \sum_k q_1^{-1} c_k^5 \beta_1^{k-3}(\omega_1)^2\} [\tilde{A}_2 \tilde{A}_3 \tilde{A}_5] + \\ + \{q_1^{-1} q_3 [\beta_1^3(\omega_1)^2 - \alpha_1^3(\omega_1 + r\omega_2)^2] - 2q_1^{-1} c_4^3 \omega_1(\omega_1 + r\omega_2) + \\ + \sum_k q_1^{-1} c_k^6 \beta_1^{k-3}(\omega_1)^2\} [\tilde{A}_2 \tilde{A}_3 \tilde{A}_6] + \sum_j \sum_k q_1^{-1} c_k^j \beta_1^{k-3}(\omega_1)^2 [\tilde{A}_2 \tilde{A}_3 \tilde{A}_j] + \\ - 2\omega_1(\omega_1 + r\omega_2) [\tilde{A}_2 \tilde{A}_4 \tilde{A}_6] + 2\omega_1 \omega_2 [\tilde{A}_3 \tilde{A}_4 \tilde{A}_5]; \quad \text{mod } [\tilde{A}_1 \tilde{A}_2 \tilde{A}_3].$$

$$(2,14) \quad d^2[\tilde{A}_1 \tilde{A}_2 \tilde{A}_3] + 2\vartheta d[\tilde{A}_1 \tilde{A}_2 \tilde{A}_3] + (\cdot) [\tilde{A}_1 \tilde{A}_2 \tilde{A}_3] = \\ = \{\beta_3^1(\omega_1 + r\omega_2)^2 - \alpha_3^1(\omega_1)^2\} [\tilde{A}_1 \tilde{A}_2 \tilde{A}_4] +$$

$$\begin{aligned}
& + \{ \beta_3^2(\omega_1 + r\omega_2)^2 - \tilde{\alpha}_3^2(\omega_2)^2 \} [\tilde{A}_1 \tilde{A}_2 \tilde{A}_5] + \\
& + \{ d(\omega_1 + r\omega_2) + (\omega_1 + r\omega_2)(2\omega_1^1 + 2\omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_6^6 - \tau_7^7 + \tau_6^6) + \\
& + 2q_1^{-1}c_4^1\omega_1(\omega_1 + r\omega_2) + 2q_2^{-1}c_5^2\omega_2(\omega_1 + r\omega_2) + 2q_3^{-1}c_6^3(\omega_1 + r\omega_2)^2 \} [\tilde{A}_1 \tilde{A}_2 \tilde{A}_6] + \\
& + \sum_j \beta_3^{j-3}(\omega_1 + r\omega_2)^2 [\tilde{A}_1 \tilde{A}_2 \tilde{A}_j] + \{ \tilde{\alpha}_2^1(\omega_1)^2 - \beta_2^1(\omega_2)^2 \} [\tilde{A}_1 \tilde{A}_3 \tilde{A}_4] - \\
& - \{ d\omega_2 + \omega_2(2\omega_1^1 + \omega_2^2 + 2\omega_3^3 + \omega_5^5 - \tau_2^2 + \tau_5^5) + 2q_1^{-1}c_4^1\omega_1\omega_2 + \\
& + 2q_2^{-1}c_5^2(\omega_2)^2 - 2q_3^{-1}c_6^3\omega_2(\omega_1 + r\omega_2) \} [\tilde{A}_1 \tilde{A}_3 \tilde{A}_5] + \\
& + \{ \tilde{\alpha}_2^3(\omega_1 + r\omega_2)^2 - \beta_2^3(\omega_2)^2 \} [\tilde{A}_1 \tilde{A}_3 \tilde{A}_6] - \\
& - \sum_j \beta_2^{j-3}(\omega_2)^2 [\tilde{A}_1 \tilde{A}_3 \tilde{A}_j] + 2\omega_2(\omega_1 + r\omega_2) [\tilde{A}_1 \tilde{A}_5 \tilde{A}_6] + \\
& + \{ d\omega_1 + \omega_1(\omega_1^1 + 2\omega_2^2 + 2\omega_3^3 + \omega_4^4 - \tau_1^1 + \tau_4^4) + 2q_1^{-1}c_4^1(\omega_1)^2 + \\
& + 2q_2^{-1}c_5^2\omega_1\omega_2 + 2q_3^{-1}c_6^3\omega_1(\omega_1 + r\omega_2) \} [\tilde{A}_2 \tilde{A}_3 \tilde{A}_4] + \\
& + \{ \beta_1^2(\omega_1)^2 - \tilde{\alpha}_1^2(\omega_2)^2 \} [\tilde{A}_2 \tilde{A}_3 \tilde{A}_5] + \\
& + \{ \beta_1^3(\omega_1)^2 - \tilde{\alpha}_1^3(\omega_1 + r\omega_2) \} [\tilde{A}_2 \tilde{A}_3 \tilde{A}_6] + \\
& + \sum_j \beta_1^{j-3}(\omega_1)^2 [\tilde{A}_2 \tilde{A}_3 \tilde{A}_j] + \\
& - 2\omega_1(\omega_1 + r\omega_2) [\tilde{A}_2 \tilde{A}_4 \tilde{A}_6] + 2\omega_1\omega_2 [\tilde{A}_3 \tilde{A}_4 \tilde{A}_5]; \text{ mod } [\tilde{A}_1 \tilde{A}_2 \tilde{A}_3].
\end{aligned}$$

Srovnáním koeficientů pravých stran rovnic (2,13) a (2,14) vzhledem k (2,12) a vhodným uspořádáním dostaneme pro neznámé

$$q_i; \quad c_{i+3}^i; \quad c_k^M$$

rovnice:

$$(2,15) \quad q_i f_i = 2c_{i+3}^i - \sum_k c_k^{i+3} \beta_i^{k-3},$$

$$(2,16) \quad q_i \tilde{\alpha}_i^j = q_j \alpha_i^j \quad (i \neq j),$$

$$(2,17) \quad q_i \beta_i^j = q_j \beta_i^j + \sum_k c_k^{j+3} \beta_i^{k-3} \quad (i \neq j),$$

$$(2,18) \quad \sum_l q_l \beta_l^{i-3} = \sum_l \sum_k c_k^l \beta_l^{k-3},$$

$$(2,19) \quad c_{i+3}^j = 0 \quad (i \neq j).$$

Rovnice (2,15–19) udávají nutné podmínky pro existenci projektivní deformace 2. řádu kongruencí rovin. Snadno nahlédneme, že podmínky jsou i postačující.

V dalším provedeme zvlášť vyšetření pro  $n \geq 8$ ,  $n = 7$  a  $n = 6$ .

### 3. DEFORMACE KONGRUENCÍ ROVIN V $P_n$ , $n \geq 8$

Vyšetřujeme případ projektivní deformace 2. řádu kongruencí rovin, vnořených do  $n$ -rozměrného projektivního prostoru pro  $n \geq 8$ . Budeme předpokládat, že matice

$$(\beta_i^{k-3})$$

má hodnotu tři a pro určitost se omezíme na případ, že determinant utvořený z prvních tří sloupců je různý od nuly. V kapitole 1 zkonstruovaný reper přiřazený ke kongruenci  $L$  lze bez omezení obecnosti zvolit tak, že platí

$$(3,1) \quad \beta_i^{j+3} = \beta_i^k = 0 \quad (i \neq j).$$

Přitom se rovnice (2,15–2,19) zjednoduší na tvar

$$(3,2) \quad q_i f_i = 2c_{i+3}^i - c_{i+6}^{i+3} \beta_i^{i+3};$$

$$(3,3) \quad q_i \tilde{\alpha}_i^j = q_j \alpha_i^j \quad (i \neq j);$$

$$(3,4) \quad q_i \tilde{\beta}_i^j = q_j \beta_i^j + c_{i+6}^{i+3} \beta_i^{i+3} \quad (i \neq j);$$

$$(3,5) \quad q_i \tilde{\beta}_i^{i+3} = c_{i+6}^{i+6} \beta_i^{i+3};$$

$$(3,6) \quad c_k^l = 0 \quad (k \neq l).$$

Tedy platí:

**Věta 3.1.** *Korespondence  $C : L \rightarrow \tilde{L}$  je projektivní deformací 2. řádu právě tehdy, má-li soustava (3,3) řešení  $q_i \neq 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ).*

Zkoumejme nyní, zda existuje tečná kolineace  $K$ , ke korespondenci  $C$ , která současně realizuje deformaci 1. řádu mezi fokálními plochami  $(A_i)$  a  $(\tilde{A}_i)$ .

Aby korespondence  $C_i : (A_i) \rightarrow (\tilde{A}_i)$  byla deformací 1. řádu, musí platit

$$(3,7) \quad KA_i = q_i \tilde{A}_i$$

$$(3,8) \quad K(dA_i) = d(q_i \tilde{A}_i) + (\cdot) \tilde{A}_i.$$

Kolineace  $K$  nechť je pro jednoduchost určena rovnicemi (2,10). Z prvních tří rovnic zkonstruovaného reperu na základě relace (3,8) vzhledem k (2,14) plyne

$$(3,9) \quad \sum_j \tilde{A}_j (\alpha_i^j \omega_j q_j + 2\omega_i c_{i+3}^j) = \sum_j \tilde{A}_j \tilde{\alpha}_i^j q_j \omega_j + \tilde{A}_{i+3} \omega_i q_i \quad \text{pro } j \neq i, \quad \text{mod } \tilde{A}_i.$$

Porovnáním koeficientů v rovnicích (3,9) dostaneme

$$(3,10) \quad q_i \tilde{\alpha}_i^j = q_j \alpha_i^j \quad \text{pro } i \neq j;$$

$$(3,11) \quad c_I^m = 0 \quad \text{pro } I \neq m, \quad I \neq m + 3.$$

Uvedené rovnice (3,10,11) vyjadřují nutné a je zřejmé, že i postačující podmínky k existenci deformace 1. řádu mezi fokálními plochami. Obdrželi jsme výsledek:

**Věta 3.2.** *Korespondence  $C : L \rightarrow \tilde{L}$  je projektivní deformací 2. řádu právě tehdy, když korespondence  $C_i : (A_i) \rightarrow (\tilde{A}_i)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) jsou současně deformacemi 1. řádu.*

Zkoumejme nyní existenci kongruence  $L$  v  $P_n$ . Kongruence  $L$  je určena systémem rovnic

$$\omega_i^M = 0 \quad \text{pro } i + 3 \neq M, \quad \omega_3^6 = a_3^6 (\omega_1 + r\omega_2).$$

Vnějším diferencováním tohoto systému dostaneme

$$\begin{aligned} \omega_1^2 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \omega_4^5 = 0, \quad \omega_2^1 \wedge \omega_1 + \omega_2 \wedge \omega_5^4 = 0, \quad \omega_3^1 \wedge \omega_1 + \omega_3 \wedge \omega_6^4 = 0, \\ \omega_1^3 \wedge \omega_3 + \omega_1 \wedge \omega_4^6 = 0, \quad \omega_2^3 \wedge \omega_3 + \omega_2 \wedge \omega_5^6 = 0, \quad \omega_3^2 \wedge \omega_2 + \omega_3 \wedge \omega_6^5 = 0, \\ \omega_1 \wedge \omega_4^k = 0, \quad \omega_2 \wedge \omega_5^k = 0, \quad \omega_3 \wedge \omega_6^k = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_1 \wedge \{da_3^6 + a_3^6(\omega_1^1 + \omega_6^6 - \omega_3^3 - \omega_4^4)\} + \\ + \omega_2 \wedge \{d(a_3^6 r) + a_3^6 r(\omega_2^2 + \omega_6^6 - \omega_3^3 - \omega_5^5)\} = 0. \end{aligned}$$

Užitím Cartanova lemmatu vyjádříme nové hlavní formy pomocí  $N = 3n + 6$  nezávislých koeficientů. Protože počet nezávislých forem  $q = 3n - 1$ , počet nezávislých kvadratických rovnic  $s_1 = 3n - 8$  je  $s_2 = 7$  a Cartanovo číslo  $Q = 3n + 6$ , je systém v involuci a platí

**Věta 3.3.** *Kongruence  $L$  existuje a závisí na sedmi funkcích dvou proměnných.*

Vyšetřeme dále, zda ke kongruenci  $L$  existuje dvojice  $(C, \tilde{L})$  za předpokladů

$$(3,12) \quad \begin{aligned} \beta_i^{i+3} &= 1 = r; \\ \beta_i^m &= 0 \quad (m \neq i; m \neq i + 3); \\ \tilde{\alpha}_i^j &= \alpha_i^j \quad (i \neq j). \end{aligned}$$

Tato volba není na úkor obecnosti a rovnice (3,3) jsou splněny pro

$$q_i = 1.$$

K dané kongruenci  $L$  je dvojice  $(C, \tilde{L})$  určena systémem

$$(3,13) \quad \tau_i^m = 0 \quad (i \neq m), \quad \tau_I^M = 0 \quad (I \neq M).$$

Uzávěr tohoto systému je

$$(3,14) \quad \begin{aligned} \omega_i \wedge (\tau_{i+3}^{i+3} - \tau_i^i) &= 0, \\ \omega_1 \wedge \tau_4^2 + \omega_2 \wedge (\tau_2^2 - \tau_1^1) &= 0, \\ \omega_1 \wedge (\tau_3^3 - \tau_1^1 + \tau_4^3) + \omega_2 \wedge (\tau_3^3 - \tau_1^1) &= 0, \\ \omega_1 \wedge (\tau_1^1 - \tau_2^2) + \omega_2 \wedge \tau_5^1 &= 0, \\ \omega_1 \wedge (\tau_3^3 - \tau_2^2) + \omega_2 \wedge (\tau_3^3 - \tau_2^2 + \tau_5^3) &= 0, \\ \omega_1 \wedge (\tau_1^1 - \tau_3^3 + \tau_6^1) + \omega_2 \wedge \tau_6^1 &= 0, \\ \omega_1 \wedge \tau_6^2 + \omega_2 \wedge (\tau_2^2 - \tau_3^3 + \tau_6^2) &= 0. \end{aligned}$$

$$(3,15) \quad \begin{aligned} \omega_i \wedge \tau_{i+6}^k &= 0 \quad (k \neq i + 6), \\ \omega_i \wedge (\tau_{i+6}^{i+6} - \tau_{i+3}^{i+3}) &= 0, \\ \omega_1 \wedge \tau_7^5 + \omega_2 \wedge (-\tau_4^2) &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_1 \wedge (\tau_7^6 - \tau_4^3) + \omega_2 \wedge (-\tau_4^3) &= 0, \\
\omega_1 \wedge (-\tau_5^1) + \omega_2 \wedge \tau_8^4 &= 0, \\
\omega_1 \wedge (-\tau_5^3) + \omega_2 \wedge (\tau_8^6 - \tau_5^3) &= 0, \\
\omega_1 \wedge (-\tau_6^1 + \tau_9^4) + \omega_2 \wedge \tau_9^4 &= 0, \\
\omega_1 \wedge \tau_9^5 + \omega_2 \wedge (\tau_9^5 - \tau_6^2) &= 0.
\end{aligned}$$

Užitím Cartanova lemmatu vyjádříme nové hlavní formy pomocí  $(22 + 3n)$  koeficientů, z nichž je právě  $(4 + 3n)$  nezávislých, tj.  $N = 4 + 3n$ . Protože počet nezávislých forem  $q = 2 + 3n$ , počet nezávislých kvadratických rovnic (3, 14, 15) je  $s_1 = 3n$ , je  $s_2 = 2$  a Cartanovo číslo  $Q = 4 + 3n$ , takže systém je v involuci a platí:

**Věta 3.4.** *Je-li dána kongruence  $L$ , pak dvojice  $(C, \tilde{L})$  existuje a závisí na dvou funkcích dvou proměnných.*

#### 4. DEFORMACE KONGRUENCÍ ROVIN V $P_7$

V případě projektivní deformace 2. řádu kongruencí rovin vnořených do projektivního prostoru  $P_7$  budeme předpokládat, že matice

$$(\beta_i^{4,5})$$

má všechny determinanty 2. řádu různé od nuly. Zkonstruovaný reper přiřazený k  $L$  lze zvolit tak, že platí

$$(4,1) \quad \beta_1^5 = \beta_2^4 = 0,$$

což není na úkor obecnosti;  $\beta_1^4, \beta_2^5, \beta_3^4, \beta_3^5$  jsou pak nenulové relativní invarianty. Rovnice (2,15–19) nabudou tvaru

$$(4,2) \quad q_i f_i = 2c_{i+3}^i - c_{i+6}^{i+3} \beta_i^{i+3} \quad \text{pro } i = 1, 2$$

a pro  $i = 3$

$$q_i f_i = 2c_{i+3}^i - \sum_k c_k^{i+3} \beta_i^{k-3}.$$

$$(4,3) \quad q_i \tilde{\alpha}_i^j = q_j \alpha_i^j \quad (i \neq j),$$

$$(4,4) \quad q_i \tilde{\beta}_i^j = q_j \beta_i^j + c_{i+6}^{j+3} \beta_i^{j+3} \quad \text{pro } i = 1, 2 \quad (i \neq j),$$

a pro  $i = 3$

$$q_i \tilde{\beta}_i^j = q_j \beta_i^j + \sum_k c_k^{j+3} \beta_i^{k-3} \quad (i \neq j),$$

$$(4,5) \quad q_i \tilde{\beta}_i^{i+3} = c_{i+6}^{i+6} \beta_i^{i+3} \quad \text{pro } i = 1, 2,$$

$$q_3 \tilde{\beta}_3^4 = c_7^7 \beta_3^4; \quad q_3 \tilde{\beta}_3^5 = c_8^8 \beta_3^5;$$

$$(4,6) \quad c_8^7 = c_7^8 = 0.$$

Z relací (4,5) je k určení  $c_7^7$  a  $c_8^8$  nutné a stačí, aby platilo

$$(4,7) \quad q_1 \frac{\tilde{\beta}_1^4}{\tilde{\beta}_3^4} = q_3 \frac{\beta_1^4}{\beta_3^4}; \quad q_2 \frac{\tilde{\beta}_2^5}{\tilde{\beta}_3^5} = q_3 \frac{\beta_2^5}{\beta_3^5}.$$

Tedy platí:

**Věta 4.1.** *Nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby existovala projektivní deformace 2. řádu mezi kongruencemi rovin  $L, \tilde{L}$ , je existence takových  $q_i \neq 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ), která splňují rovnice (4,3) a (4,7).*

Hledejme nyní podmínky pro to, aby korespondence  $C_i$  a  $C^*$  byly deformacemi 1. řádu, realizovanými touž tečnou kolineací, vzhledem k  $C$ .

Za tímto účelem zavedeme k reперу  $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$  reпер дуální, tvořený ve vhodném pořadí ( $n + 1$ ) analytickými nadrovinami, neprocházejícími jedním bodem. Pro nadrovinu  $E^m = (-1)^m [A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_{n+1} \dots A_n]$  platí:

jestliže

$$dA_m = \sum_u \omega_u^m A_n,$$

potom

$$(4,8) \quad dE^m = -\sum_u \omega_u^m E^u.$$

Průnik nadrovin  $E^7, E^8$  označíme  $[E^7 E^8]$ . Korespondence  $C^*$  nechť je dána předpisem

$$(4,9) \quad C^* : [E^7 E^8] \mapsto [\tilde{E}^7 \tilde{E}^8].$$

Podmínky pro deformace  $C_i$  jsou určeny v rovnicích (3,10). Rovnice příslušné kolineace jsou

$$(4,10) \quad KA_i = q_i \tilde{A}_i, \quad KA_{i+3} = c_{i+3}^i \tilde{A}_i + q_i \tilde{A}_{i+3}, \quad KA_k = \sum_m c_k^m \tilde{A}_m.$$

Aby korespondence  $C^*$  byla deformací 1. řádu realizovanou kolineací (4,10), musí platit

$$(4,11) \quad K[E^7 E^8] = (\cdot) [\tilde{E}^7 \tilde{E}^8], \\ K d[E^7 E^8] = (\cdot) d[\tilde{E}^7 \tilde{E}^8] + \vartheta_e [\tilde{E}^7 \tilde{E}^8].$$

Uvedeme některé další výpočty, které budeme v dalším používat:

$$(4,12) \quad dE^7 = -\omega_8^7 E^8 - \omega_7^7 E^7 - \beta_3^4 (\omega_1 + r\omega_2) E^6 - \beta_2^4 \omega_2 E^5 - \beta_1^4 \omega_1 E^4, \\ dE^8 = -\omega_8^8 E^8 - \omega_7^8 E^7 - \beta_3^5 (\omega_1 + r\omega_2) E^6 - \beta_2^5 \omega_2 E^5 - \beta_1^5 \omega_1 E^4,$$

$$\begin{aligned}
(4,13) \quad KE^8 &= (q_1 q_2 q_3)^2 c_7^7 \tilde{E}^8, \\
KE^7 &= (q_1 q_2 q_3)^2 c_8^8 \tilde{E}^7 + (q_1 q_2 q_3)^2 c_7^7 \tilde{E}^8, \\
KE^6 &= (q_1 q_2)^2 q_3 c_7^7 c_8^8 \tilde{E}^6 + (q_1 q_2)^2 q_3 c_8^8 c_7^7 \tilde{E}^7 - (q_1 q_2)^2 q_3 c_7^7 c_8^6 \tilde{E}^8 + \\
&\quad + (q_1 q_2)^2 q_3 c_7^6 c_8^7 \tilde{E}^8, \\
KE^5 &= (q_1 q_3)^2 q_2 c_7^7 c_8^8 \tilde{E}^5 + (q_1 q_3)^2 q_2 c_7^5 c_8^8 \tilde{E}^7 - (q_1 q_3)^2 q_2 c_7^7 c_8^5 \tilde{E}^8 - \\
&\quad - (q_1 q_3)^2 q_2 c_7^5 c_8^7 \tilde{E}^8, \\
KE^4 &= (q_2 q_3)^2 q_1 c_7^7 c_8^8 \tilde{E}^4 - (q_2 q_3)^2 q_1 c_7^4 c_8^8 \tilde{E}^7, \\
K[E^7 E^8] &= (q_1 q_2 q_3)^4 c_7^7 c_8^8 [\tilde{E}^7 \tilde{E}^8].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4,14) \quad K d[E^7 E^8] &= -\beta_3^4 (\omega_1 + r\omega_2) (q_1 q_2)^4 (q_3)^3 (c_7^7)^2 c_8^8 [\tilde{E}^6 \tilde{E}^8] - \\
&\quad - \beta_1^4 \omega_1 (q_1)^3 (q_2 q_3)^4 (c_7^7)^2 c_8^8 [\tilde{E}^4 \tilde{E}^8] + \beta_3^5 (\omega_1 + r\omega_2) \cdot \\
&\quad \cdot (q_1 q_2)^4 (q_3)^3 c_7^7 (c_8^8)^2 [\tilde{E}^6 \tilde{E}^7] + \beta_2^5 \omega_2 (q_1 q_3)^4 (q_2)^3 c_7^7 c_8^8 [\tilde{E}^5 \tilde{E}^7], \quad \text{mod } [\tilde{E}^7 \tilde{E}^8];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4,15) \quad (.) d[\tilde{E}^7 \tilde{E}^8] + \vartheta_e[\tilde{E}^7 \tilde{E}^8] &= (q_1 q_2 q_3)^4 c_7^7 c_8^8 \{-\beta_3^4 (\omega_1 + r\omega_2)\} [\tilde{E}^6 \tilde{E}^8] + \\
&\quad - \beta_1^4 \omega_1 [\tilde{E}^4 \tilde{E}^8] + \beta_3^5 (\omega_1 + r\omega_2) [\tilde{E}^6 \tilde{E}^7] + \beta_2^5 \omega_2 [\tilde{E}^5 \tilde{E}^7], \quad \text{mod } [\tilde{E}^7 \tilde{E}^8].
\end{aligned}$$

Na základě (4,11), porovnáním koeficientů u pravých stran rovnic (4,14) a (4,15) dostáváme

$$(4,16) \quad q_1 \tilde{\beta}_1^4 = c_7^7 \beta_1^4; \quad q_2 \tilde{\beta}_2^5 = c_8^8 \beta_2^5; \quad q_3 \tilde{\beta}_3^4 = c_7^7 \beta_3^4; \quad q_3 \tilde{\beta}_3^5 = c_8^8 \beta_3^5.$$

Máme výsledek:

**Věta 4.2.** *Korespondence  $C : L \rightarrow \tilde{L}$  je projektivní deformací 2. řádu právě tehdy, když korespondence  $C_i$  a  $C^*$  jsou současně deformacemi 1. řádu.*

Zkoumejme, zda ke kongruenci  $L$  existuje dvojice  $(C, \tilde{L})$  za předpokladů:

$$\begin{aligned}
(4,17) \quad \tilde{\alpha}_i^j &= \alpha_i^j \quad (i \neq j), \\
\tilde{\beta}_1^4 &= \beta_1^4 = \tilde{\beta}_2^5 = \beta_2^5 = \tilde{\beta}_3^4 = \beta_3^4 = \tilde{\beta}_3^5 = \beta_3^5, \\
\beta_1^2 &= \beta_1^3 = \beta_1^5 = \beta_2^1 = \beta_2^3 = \beta_2^4 = \beta_3^1 = \beta_3^2 = 0, \\
r &= 1.
\end{aligned}$$

Tato volba není na úkor obecnosti a rovnice (4,3) a (4,7) jsou splněny pro  $q_i = 1$ .

K dané kongruenci  $L$  je dvojice  $(C, \tilde{L})$  určena systémem (3,13) pro  $n = 7$ . Uzávěrem tohoto systému jsou kvadratické rovnice (3,14) a systém

$$\begin{aligned}
(4,18) \quad \omega_1 \wedge \tau_7^5 + \omega_2 \wedge (-\tau_4^2) &= 0, \\
\omega_1 \wedge (\tau_7^6 - \tau_4^3) + \omega_2 \wedge (-\tau_4^3) &= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_1 \wedge (\tau_7^7 - \tau_4^4) &= 0, \\
\omega_1 \wedge \tau_7^8 &= 0, \\
\omega_1 \wedge (-\tau_5^1) + \omega_2 \wedge \tau_8^4 &= 0, \\
\omega_1 \wedge (-\tau_5^3) + \omega_2 \wedge (\tau_8^6 - \tau_5^3) &= 0, \\
\omega_2 \wedge \tau_8^7 &= 0, \\
\omega_2 \wedge (\tau_8^8 - \tau_5^5) &= 0, \\
\omega_1 \wedge (\tau_7^4 + \tau_8^4 - \tau_6^1) + \omega_2 \wedge (\tau_7^4 + \tau_8^4) &= 0, \\
\omega_1 \wedge (\tau_7^5 + \tau_8^5) + \omega_2 \wedge (\tau_7^5 + \tau_8^5 - \tau_6^2) &= 0, \\
\omega_1 \wedge (\tau_7^7 - \tau_6^6 + \tau_8^7) + \omega_2 \wedge (\tau_7^7 - \tau_6^6 + \tau_8^7) &= 0, \\
\omega_1 \wedge (\tau_8^8 - \tau_6^6 + \tau_7^8) + \omega_2 \wedge (\tau_8^8 - \tau_6^6 + \tau_7^8) &= 0.
\end{aligned}$$

Užitím Cartanova lemmatu vyjádříme hlavní formy systému (3,14) a (4,18) pomocí 37 koeficientů, z nichž právě 21 je nezávislých, tj.  $N = 21$ . Počet nezávislých forem  $q = 21$ , počet nezávislých kvadratických rovnic je  $s_1 = 21$  a  $Q = 21$ , systém je v involuci a dostáváme větu:

**Věta 4.3.** *Je-li dána kongruence  $L$ , pak dvojice  $(C, \tilde{L})$  existuje a závisí na 21 funkcích jedné proměnné.*

## 5. DEFORMACE KONGRUENCÍ ROVIN V $P_6$

Jako poslední případ vyšetříme projektivní deformaci 2. řádu kongruencí rovin, vnořených do projektivního prostoru  $P_6$ . Budeme uvažovat obecný případ, kdy

$$(5,1) \quad \beta_i^4 \neq 0.$$

Rovnice (2,15–19) za předpokladu (5,1) pro  $n = 6$  jsou

$$(5,2) \quad q_i f_i = 2c_{i+3}^i - c_7^{i+3} \beta_i^4,$$

$$(5,3) \quad q_i \tilde{\alpha}_i^j = q_j \alpha_i^j \quad (i \neq j),$$

$$(5,4) \quad q_i \tilde{\beta}_i^j = q_j \beta_i^j + c_7^{j+3} \beta_i^4 \quad (i \neq j),$$

$$(5,5) \quad q_i \tilde{\beta}_i^4 = c_7^7 \beta_i^4.$$

Z (5,5) vychází:

$$(5,6) \quad c_7^7 = q_1 \frac{\tilde{\beta}_1^4}{\beta_1^4} = q_2 \frac{\tilde{\beta}_2^4}{\beta_2^4} = q_3 \frac{\tilde{\beta}_3^4}{\beta_3^4}.$$



Tedy platí:

**Věta 5.1.** *Korespondence  $C : L \rightarrow \tilde{L}$ , realizovaná kolineací  $K$ , je projektivní deformací 2. řádu právě tehdy, když existují  $q_i \neq 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ), která jsou řešením (5,3) a (5,6).*

Nyní zjistíme podmínky pro to, aby korespondence  $C_i$  a  $C^*$  byly deformacemi 1. řádu, realizovanými touž tečnou kolineací vzhledem k  $C$ .

Jednotlivé korespondence jsou nyní:

$$C : L \rightarrow \tilde{L}; \quad C_i : (A_i) \mapsto (\tilde{A}_i); \quad C^* : E^7 \mapsto \tilde{E}^7.$$

Podmínky pro deformaci  $C_i$  jsou určeny v rovnicích (3,10). Rovnice příslušné kolineace jsou (4,10).

Aby korespondence  $C^*$  byla deformací 1. řádu, realizovanou rovněž kolineací (4,10), musí platit

$$(5,7) \quad KE^7 = (\cdot) \tilde{E}^7, \quad K dE^7 = (\cdot) d\tilde{E}^7 + \vartheta_E \tilde{E}^7.$$

Uvedeme některé pomocné výpočty:

$$(5,8) \quad \begin{aligned} KE^7 &= (q_1 q_2 q_3)^2 \tilde{E}^7, \\ KE^6 &= (q_1 q_2)^2 q_3 c_7^7 \tilde{E}^7 - (q_1 q_2)^2 q_3 c_7^6 \tilde{E}^7, \\ KE^5 &= (q_1 q_3)^2 q_2 c_7^7 \tilde{E}^5 - (q_1 q_3)^2 q_2 c_7^5 \tilde{E}^7, \\ KE^4 &= (q_2 q_3)^2 q_1 c_7^7 \tilde{E}^4 - (q_2 q_3)^2 q_1 c_7^4 \tilde{E}^7. \end{aligned}$$

$$(5,9) \quad \begin{aligned} K dE^7 &= -\beta_3^4 (\omega_1 + r\omega_2) (q_1 q_2)^2 q_3 c_7^7 \tilde{E}^6 - \beta_2^4 \omega_2 (q_1 q_3)^2 q_2 c_7^7 \tilde{E}^5 - \\ &\quad - \beta_1^4 \omega_1 (q_2 q_3)^2 q_1 c_7^7 \tilde{E}^4, \quad \text{mod } \tilde{E}^7; \end{aligned}$$

$$(5,10) \quad \begin{aligned} (\cdot) d\tilde{E}^7 + \vartheta_E \tilde{E}^7 &= (q_1 q_2 q_3)^2 \{ -\omega_7^7 \tilde{E}^7 - \beta_3^4 (\omega_1 + r\omega_2) \tilde{E}^6 - \\ &\quad - \beta_2^4 \omega_2 \tilde{E}^5 - \beta_1^4 \omega_1 \tilde{E}^4 \} + \vartheta_E \tilde{E}^7. \end{aligned}$$

Na základě (5,7), porovnáním koeficientů u pravých stran rovnic (5,9) a (5,10) dostáváme

$$(5,11) \quad q_i \beta_i^4 = c_7^7 \beta_i^4.$$

Tedy platí:

**Věta 5.2.** *Korespondence  $C : L \rightarrow \tilde{L}$  je projektivní deformací 2. řádu právě tehdy, když korespondence  $C_i$  a  $C^*$  jsou současně deformacemi 1. řádu.*

Zjistíme, zda ke kongruenci  $L$  existuje dvojice  $(C, \tilde{L})$  za předpokladů

$$(5,12) \quad \tilde{\alpha}_i^j = \alpha_i^j \quad (i \neq j).$$

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_i^4 &= \beta_i^4, \\ \beta_1^2 &= \beta_2^3 = \beta_3^1 = 1 = r = c_7^7, \\ \beta_1^3 &= \beta_2^1 = \beta_3^2 = 0.\end{aligned}$$

Tato volba není na úkor obecnosti a rovnice (5,3) a (5,6) jsou splněny pro  $q_i = 1$ .

K dané kongruenci  $L$  je dvojice  $(C, \tilde{L})$  určena systémem (3,13) pro  $n = 6$ . Uzávěrem tohoto systému budou kvadratické rovnice (3,14) a systém

$$(5,13) \quad \begin{aligned}\omega_1 \wedge (\tau_7^6 - \tau_4^3) + \omega_2 \wedge (-\tau_4^3) &= 0, \\ \omega_1 \wedge (\tau_7^7 - \tau_4^4) &= 0, \\ \omega_1 \wedge (-\tau_5^1) + \omega_2 \wedge \tau_7^4 &= 0, \\ \omega_2 \wedge (\tau_7^7 - \tau_5^5) &= 0, \\ \omega_1 \wedge \tau_7^5 + \omega_2 \wedge (\tau_7^5 - \tau_6^2) &= 0, \\ \omega_1 \wedge (\tau_7^7 - \tau_6^6) + \omega_2 \wedge (\tau_7^7 - \tau_6^6) &= 0.\end{aligned}$$

Užitím Cartanova lemmatu vyjádříme hlavní formy systému (3,14) a (5,13) pomocí 28 koeficientů, z nichž je právě 15 nezávislých, tj.  $N = 15$ . Protože počet nezávislých forem  $q = 15$ , počet nezávislých kvadratických rovnic (3,14) a (5,13) je  $s_1 = 15$  a  $Q = 15$ , je systém v involuci a platí věta:

**Věta 5.3.** *Je-li dána kongruence  $L$ , pak dvojice  $(C, \tilde{L})$  existuje a závisí na 15 funkcích jedné proměnné.*

#### Literatura

- [1] Švec A.: Projective Differential Geometry of Line Congruences, Prague 1965.
- [2] Švec A.: Déformation projective des congruences de droites dans *S. Czech. Math. J.*, 5 (80), 1955, 546—558.
- [3] Svoboda K.: Über die Punktdeformation einer vollständig fokalen Pseudokongruenz. *Mathematische Nachrichten Band 38* (1968) Heft 3/4, str. 197—206.
- [4] Шепеленкова Л.: Проективное изгибание дупараметрического семейства  $n - 1$  плоскостей в  $(2n - 1)$ -мерном проективном пространстве, Труды Томск. госуд. унив. Том 161 (1962), 29—38.
- [5] Фиников С. П.: Теория пар конгруэнций, Москва 1956.

*Adresa autora:* Koněvova 131, Brno (Vysoké učení technické).

## Zusammenfassung

### ÜBER PROJÈKTIVE DEFORMATIONEN VON EBENENKONGRUENZEN IM $n$ -DIMENSIONALEN PROJÈKTIVEN RAUM

JAROSLAV BAYER, BRNO

In dieser Arbeit ist im  $n$ -dimensionalen projektiven Raum  $P_n$  ( $n > 5$ ) ein zwei-parametersystem von Ebenen (die Ebenenkongruenzen) mit Hilfe der Methode von E. Cartan untersucht.

Es wird da eine teilweise Spezialisierung des begleitenden Dreibeines der Ebenenkongruenz in  $P_n$  so durchgeführt, dass die Scheitelpunkte  $A_1, A_2, A_3$ , des Dreibeines in den Brennpunkten der freien Ebene der Kongruenz sind. Bei der Bewegung der Ebene beschreibt jeder der drei Brennpunkte die Fokalfläche der gegebenen Kongruenz der Ebenen. In der Spezialisierung wird nach einer weiteren Vereinfachung fortgeschritten bis zu der für unseren Gebrauch geeigneten Form. In dieser Arbeit sind notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz projektiver Deformationen 1. und 2. Ordnung für die Kongruenz der Ebenen  $L$  und  $\tilde{L}$  in den einander entsprechenden Räumen  $P_n$  und  $\tilde{P}_n$  gegeben.

Mit Hilfe der tangierenden Kollineation  $K$  wird die Korrespondenz  $C$  zwischen Fokalflächen dargestellt, welche eine Deformation 1. Ordnung ist. Es wird gezeigt, dass deren Existenz eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer projektiven Deformation 2. Ordnung der Kongruenzen von Ebenen in  $P_n$  für  $n \geq 8$  ist, und es wird bewiesen, dass das Paar  $(C, \tilde{L})$  existiert und zwei Funktionen von zwei Variablen abhängt. Die eingeführte Korrespondenz  $C^* : [E^7, E^8] \mapsto [\tilde{E}^7, \tilde{E}^8]$  zusammen mit den Korrespondenzen  $C_i$  sind Deformationen 1. Ordnung und deren Existenz ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer projektiven Deformation 2. Ordnung der Ebenenkongruenzen in  $P_7$  und das Paar  $(C, \tilde{L})$  existiert und hängt von 21 Funktionen einer Variablen ab.

Schließlich ist die Existenz der Korrespondenz  $C^x : E^7 \mapsto \tilde{E}^7$  und der Korrespondenzen  $C_i$ , welche Deformationen 1. Ordnung sind, eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Projektivdeformation 2. Ordnung von Ebenenkongruenzen in  $P_6$  existiert. Soeben ist bewiesen, dass das Paar  $(C, \tilde{L})$  existiert und von 15 Funktionen einer Variablen abhängt.