

Pavel Bartoš

O jednom zovšeobecnění číselnoteoretického vztahu  $[a_1, a_2] = a_1 a_2 / (a_1, a_2)$  a jeho použití

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 97 (1972), No. 1, 96--98

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/117742>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1972

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

RŮZNÉ

O JEDNOM ZOVŠEOBECNENÍ ČÍSELNOTEORETICKÉHO VZŤAHU

$$[a_1, a_2] = \frac{a_1 a_2}{(a_1, a_2)} \text{ A JEHO POUŽITÍ}$$

PAVEL BARTOŠ, Bratislava

(Došlo dňa 30. septembra 1970)

V tomto článku odvodíme jedno zovšeobecnenie vzťahu

$$(1) \quad [a_1, a_2] = \frac{a_1 a_2}{(a_1, a_2)}$$

a tento použijeme na riešenie diofantickej rovnice

$$(2) \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n = y[x_1, x_2, \dots, x_n]$$

v prirodzených číslach.

**Lema.** Vzťah (1) možno písať v tvare

$$(3) \quad [a_1, a_2] = (a_1, a_2) \left[ \frac{[a_1, a_2]}{a_1}, \frac{[a_1, a_2]}{a_2} \right].$$

Dôkaz. Platí

$$\begin{aligned} [a_1, a_2] &= \frac{a_1 a_2}{(a_1, a_2)} = (a_1, a_2) \frac{a_1}{(a_1, a_2)} \cdot \frac{a_2}{(a_1, a_2)} = (a_1, a_2) \left[ \frac{a_1}{(a_1, a_2)}, \frac{a_2}{(a_1, a_2)} \right] = \\ &= (a_1, a_2) \left[ \frac{[a_1, a_2]}{a_1}, \frac{[a_1, a_2]}{a_2} \right] \end{aligned}$$

lebo

$$\left( \frac{a_1}{(a_1, a_2)}, \frac{a_2}{(a_1, a_2)} \right) = 1.$$

Tým je lema dokázaná.

Vzťah (3) možno zovšeobecniť pre ľubovoľný počet prirodzených čísel  $a_1, a_2, \dots, \dots, a_n, n \geq 2$ .

**Veta 1.** *Nech  $a_1, a_2, \dots, a_n, n \geq 2$  sú ľubovoľné prirodzené čísla. Potom platí*

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] = (a_1, a_2, \dots, a_n) \left[ \frac{[a_1, a_2, \dots, a_n]}{a_1}, \frac{[a_1, a_2, \dots, a_n]}{a_2}, \dots, \frac{[a_1, a_2, \dots, a_n]}{a_n} \right].$$

**Dôkaz.** Nech

$$a_i = \prod_{j=1}^k p_j^{\alpha_{i,j}}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

pričom  $p_i$  sú prvočísla,  $\alpha_{i,j}$  je pre každé  $i$  a každé  $j$  nezáporné celé číslo a aspoň pre jedno  $i$  číslo prirodzené. Potom

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] = \prod_{j=1}^k p_j^{\max \alpha_{i,j}}$$

a teda

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{[a_1, a_2, \dots, a_n]}{a_1}, \dots, \frac{[a_1, a_2, \dots, a_n]}{a_n} \right] = \\ & = \left[ \prod_{j=1}^k p_j^{\max \alpha_{i,j} - \alpha_{1,j}}, \dots, \prod_{j=1}^k p_j^{\max \alpha_{i,j} - \alpha_{n,j}} \right] = \prod_{j=1}^k p_j^{\max \alpha_{i,j} - \min_i \alpha_{i,j}} = \frac{[a_1, a_2, \dots, a_n]}{(a_1, a_2, \dots, a_n)} \end{aligned}$$

odkiaľ vyplýva tvrdenie vety.

Odvedenú vetu možno použiť pri riešení rovnice (2) v prirodzených číslach. O tejto rovnici pojednáva článok [1]. V ňom odvedenú vetu 1 môžeme pomocou tu odvedenej vety 1 doplniť.

**Veta 2.** *Všetky riešenia rovnice (2) v prirodzených číslach  $x_1, x_2, \dots, x_n, y$  dostaneme nasledovne:*

*Nech  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  je ľubovoľné riešenie rovnice*

$$(5) \quad \frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{\xi_2} + \dots + \frac{1}{\xi_n} = 1$$

*v prirodzených číslach. Potom*

$$(6) \quad x_i = \frac{[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]}{\xi_i} t, \quad y = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

*je riešenie rovnice (2) v prirodzených číslach, keď  $t$  je ľubovoľné prirodzené číslo.*

Dôkaz. Podľa vety (1) v článku [1] treba len dokázať, že  $y = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ .  
Keďže podľa (2) a (6) je

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{\sum_{i=1}^n \frac{[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n] t}{\xi_i}}{\left[ \frac{[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n] t}{\xi_1}, \dots, \frac{[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n] t}{\xi_n} \right]} = \\
 &= \frac{[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n] t}{t \left[ \frac{[\xi_1, \dots, \xi_n]}{\xi_1}, \dots, \frac{[\xi_1, \dots, \xi_n]}{\xi_n} \right]} = \\
 &= \frac{[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]}{\left[ \frac{[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]}{\xi_1}, \dots, \frac{[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]}{\xi_n} \right]} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)
 \end{aligned}$$

podľa vety 1, keďže  $\sum_{i=1}^n 1/\xi_i = 1$  a  $[ta_1, ta_2, \dots, ta_n] = t[a_1, a_2, \dots, a_n]$ .

**Poznámka.** Ak  $\xi_1 \leq \xi_2 \leq \dots \leq \xi_n$ , platí  $\xi_1 \leq n$  a  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \leq \xi_1$ , takže  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \leq n$ , čo hovorí veta (2) v článku [1].

#### Literatúra

- [1] Bartoš, P.: O riešení rovnice  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = y[x_1, x_2, \dots, x_n]$  a rovnice  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = yx_1x_2 \dots x_n$  v prirodzených číslach. Čas. pěst. mat. 94 (1971), 367–370.

Adresa autora: Bratislava, Sibírska 9.