Zdeněk Hustý

Asymptotische Formeln für die Lösungnen der Differentialgleichung $y'' + 2q_1(x)y' + q_2(x)y = 0$

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 96 (1971), No. 1, 41--56

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117711

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 96 (1971), Praha

ASYMPTOTISCHE FORMELN FÜR DIE LÖSUNGEN DER DIFFERENTIALGLEICHUNG $y'' + 2q_1(x)\,y' + q_2(x)\,y = 0$

ZDENĚK HUSTÝ, Brno

(Eingelangt am 29. August 1969)

Diese Arbeit stellt eine Fortsetzung von [1] dar, so daß alle Bezeichnungen und Begriffe, die in [1] eingeführt wurden, verwendet werden. Wir werden uns mit den Anwendungen des unten angeführten Satzes, der in [1; Satz 5.2] bewiesen wurde, beschäftigen.

Es seien die Gleichungen

$$\text{(Q)}\qquad \ddot{Y}(t) + 2Q_1(t)\,\dot{Y}(t) + Q_2(t)\,Y(t) = 0\,,$$
$$Q_i \in C_0(J)\,,\quad i = 1, 2,\quad J = \langle t_0, \infty)\,,$$

$$\text{(q)}\qquad y''(x) + 2q_1(x)\,y'(x) + q_2(x)\,y(x) = 0\,,$$
$$q_i \in C_0(I)\,,\quad i = 1, 2,\quad I = \langle x_0, \infty)$$

gegeben.

Lemma. *Es existieren positive Funktionen H, f, φ_0, ψ_0 mit folgenden Eigenschaften:*

a) $H(x), f(x) \in C_2(I)$, $H'(x) > 0$, $\lim_{x\to\infty} H(x) = \infty$, $H(I) = J$;

b) $\varphi_0(t), \psi_0(t) \in C_0(J)$.

Es gelte ferner

$$\text{(I}_0\text{)}\qquad \int_{x_0}^{\infty} \exp\left\{2\int_{t_0}^{H(x)} Q_1(s)\,ds\right\} \Psi_0[H(x)] \left|\frac{d}{dx}\left[\log\left(f^2(x)\,H'(x)\,.\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.. \exp\left\{2\int_{x_0}^{x} q_1(s)\,ds - 2\int_{t_0}^{H(x)} Q_1(s)\,ds\right\}\right)\right]\right| dx < \infty\,,$$

$$\text{(II}_0\text{)}\qquad \int_{x_0}^{\infty} \exp\left\{2\int_{x_0}^{x} q_1(s)\,ds\right\} \Phi_0[H(x)]\,|\,f''(x)\,f(x) + 2q_1(x)\,f'(x)\,f(x) +$$
$$+ q_2(x)\,f^2(x) - f^2(x)\,[H'(x)]^2\,Q_2[H(x)]\,|\,dx < \infty\,,$$

wo $\Phi_0 = \varphi_0^2$, $\varphi_0\psi_0 = \Psi_0$ gesetzt wird. Dann gelten folgende Behauptungen:

1° *Es existiert der Grenzwert*

$$\lim_{x\to\infty}\left(f^2H'\exp\left\{2\int_{x_0}^{x} q_1\,\mathrm{d}s - 2\int_{t_0}^{H(x)} Q_1\,\mathrm{d}s\right\}\right) = C\,, \quad 0 < C \in E_1\,. \tag{0.1}$$

2° *Ist*

$$Y(t) = O[\varphi_0(t)]\,, \quad \dot{Y}(t) = O[\psi_0(t)]\,,$$

wo $Y(t)$ die allgemeine Lösung der Gleichung (Q) *darstellt, so hat die Gleichung* (q) *die Basis*

$$\begin{aligned} y_j(x) &= f(x)\,\{Y_j[H(x)] + \varphi_0[H(x)]\,o(1)\} \\ y_j'(x) &= f'(x)\,\{Y_j[H(x)] + \varphi_0[H(x)]\,o(1)\} + \\ &\quad + f(x)\,H'(x)\,\{\dot{Y}_j[H(x)] + \psi_0[H(x)]\,o(1)\}\,, \quad j, k = 1, 2\,, \end{aligned} \tag{0.2}$$

wo

$$Y_1(t)\,, \quad Y_2(t) \tag{0.3}$$

eine beliebige Basis von (Q) *bezeichnet.*

3° *Es sei* (0.3) *in J eine positive Hauptbasis von* (Q) *im Intervall J. Gilt*

$$Y_j(t)\,Y_k(t) = O[\Phi_0(t)]\,, \quad \dot{Y}_j(t)\,Y_k(t) = O[\Psi_0(t)]\,, \quad j, k = 1, 2, , \quad j \neq k\,,$$

so hat die Gleichung (q) *im Intervall I die Hauptbasis*

$$y_j(x) = f(x)\,Y_j[H(x)]\,[1 + o(1)]\,, \quad j = 1, 2\,. \tag{0.4}$$

(i_1) *Ist die Basis* (0.3) *in J regelmäßig mit Schätzfunktionen $\varkappa_1(t)$, $\varkappa_2(t)$, so gilt*

$$\begin{aligned} y_j'(x) &= f'(x)\,Y_j[H(x)]\,[1 + o(1)] + f(x)\,H'(x)\,\dot{Y}_j[H(x)]\,. \\ &\quad .\,\{1 + o[\varkappa_j(H) + 1]\}\,, \quad j = 1, 2\,. \end{aligned} \tag{0.5}$$

(i_2) *Ist die Basis* (0.3) *in J halbregelmäßig j-ter Art mit Schätzfunktionen $\varkappa_1(t)$, $\varkappa_2(t)$, so gilt*

$$\begin{aligned} y_j'(x) &= f'(x)\,Y_j[H(x)]\,[1 + o(1)] + \\ &\quad + f(x)\,H'(x)\,\dot{Y}_j[H(x)]\,.\,\{1 + o[\varkappa_j(H) + 1]\}\,, \\ y_k'(x) &= f'(x)\,Y_k[H(x)]\,[1 + o(1)] + f(x)\,H'(x)\,\dot{Y}_k[H(x)] + \\ &\quad + f(x)\,H'(x)\,\varkappa_k(H)\,[\varkappa_j(H) + 1]\,o(1)\,, \quad j, k = 1, 2\,, \quad j \neq k\,. \end{aligned} \tag{0.6}$$

(i_3) *Ist* $Y_k[H(x)] = 1$, *so gilt*

$$(0.7)\qquad \begin{aligned} y_j'(x) &= f'(x)\, Y_j[H(x)]\,[1 + o(1)] + f(x)\, H'(x)\, \dot{Y}_j[H(x)]\,[1 + o(1)]\,,\\ y_k'(x) &= f'(x)\,[1 + o(1)] + f(x)\, H'(x)\,\{\dot{Y}_j[H(x)]/Y_j[H(x)]\}\, o(1)\,,\\ & j, k = 1, 2\,, \quad j \neq k\,. \end{aligned}$$

Der Hilfssatz läßt sich in einer für die Anwendungen geigneten Form schreiben.

1. Es seien die Gleichungen

$$(\overline{\mathrm{Q}})\qquad \ddot{Z}(t) + Q(t)\, Z(t) = 0\,, \quad Q \in C_0(J)\,, \quad J = \langle t_0, \infty)\,,$$

$$(\mathrm{q})\qquad y''(x) + 2q_1(x)\, y'(x) + q_2(x)\, y(x) = 0\,, \quad q_i \in C_0(I)\,,$$
$$i = 1, 2\,, \quad I = \langle x_0, \infty)$$

gegeben.

Hauptsatz. *Es existieren positive Funktionen* H, f, φ, ψ *und die Funktion* $Q_1(t)$ *mit folgenden Eigenschaften*:

a) $H(x), f(x) \in C_2(I)$, $H'(x) > 0$, $\lim_{x\to\infty} H(x) = \infty$, $H(I) = J$;
b) $\varphi(t)$, $\psi(t) \in C_0(J)$;
c) $Q_1(t) \in C_1(J)$.

Es gelte ferner

$$(\mathrm{I})\qquad \int_{x_0}^{\infty} [|Q_1(H)|\, \Phi(H) + \Psi(H)]\,.$$
$$\cdot \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\log\left(f^2 H' \exp\left\{2\int_{x_0}^{x} q_1\, \mathrm{d}s - 2\int_{t_0}^{H(x)} Q_1\, \mathrm{d}s\right\}\right)\right]\right| \mathrm{d}x < \infty\,,$$

$$(\mathrm{II})\qquad \int_{x_0}^{\infty} \frac{\Phi(H)}{f^2 H'}\, |f''f + 2q_1 f'f + q_2 f^2 -$$
$$- f^2 H'^2 [Q(H) + \dot{Q}_1(H) + Q_1^2(H)]|\, \mathrm{d}x < \infty\,,$$

wo $\Phi = \varphi^2$, $\Psi = \varphi\psi$ *gesetzt wird. Dann gelten die folgenden Behauptungen*:

1° *Es existiert der Grenzwert* (0.1).

2° *Ist*

$$(\mathrm{i})\qquad Z(t) = O[\varphi(t)]\,, \quad \dot{Z}(t) = O[\psi(t)]\,,$$

wo $Z(t)$ *die allgemeine Lösung der Gleichung* $(\overline{\mathrm{Q}})$ *darstellt, so hat die Gleichung* (q) *die Basis*

(1.1)

$$y_j(x) = \exp\left\{-\int_{t_0}^{H(x)} Q_1(s)\,\mathrm{d}s\right\} f(x)\,\{Z_j[H(x)] + \varphi[H(x)]\,o(1)\}\,, \quad j = 1, 2\,,$$

$$y_j'(x) = \exp\left\{-\int_{t_0}^{H(x)} Q_1(s)\,\mathrm{d}s\right\} \Big[f'(x)\,\{Z_j[H(x)] + \varphi[H(x)]\,o(1)\} +$$

$$+ f(x)\,H'(x)\Big(\{-Q_1[H(x)]\}\,\{Z_j[H(x)] + \varphi[H(x)]\,o(1)\} +$$

$$+ \dot{Z}_j[H(x)] + \psi[H(x)]\,o(1)\Big)\Big]\,, \quad j = 1, 2\,,$$

wo

(1.2) $$Z_1(t)\,, \quad Z_2(t)$$

eine beliebige Basis der Gleichung $(\overline{\mathrm{Q}})$ *bezeichnet.*

3°. *Es sei* (1.2) *eine positive Hauptbasis von* $(\overline{\mathrm{Q}})$ *in* J. *Gilt nun*

(ii) $$Z_j(t)\,Z_k(t) = O[\Phi(t)]\,, \quad \dot{Z}_j(t)\,Z_k(t) = O[\Psi(t)]\,, \quad j, k = 1, 2\,, \quad j \neq k\,,$$

so hat die Gleichung (q) *im Intervall* I *die Hauptbasis*

(1.3) $$y_j(x) = \exp\left\{-\int_{t_0}^{H(x)} Q_1(s)\,\mathrm{d}s\right\} f(x)\,Z_j[H(x)]\,[1 + o(1)]\,, \quad j = 1, 2\,.$$

(i_1) *Ist*

(1.4) $$-Q_1 Z_i + \dot{Z}_i \neq 0 \quad \text{in} \quad J\,, \quad i = 1, 2\,, \quad Z_j(-Q_1 Z_k + \dot{Z}_k) =$$

$$= O[\varkappa_j Z_k(-Q_1 Z_j + \dot{Z}_j)]\,, \quad \varkappa_j(t) > 0\,, \quad j, k = 1, 2\,, \quad j \neq k\,,$$

so gilt

(1.5) $$y_j'(x) = \exp\left\{-\int_{t_0}^{H(x)} Q_1(s)\,\mathrm{d}s\right\} \{f'(x)\,Z_j[H(x)]\,[1 + o(1)] +$$

$$+ f(x)\,H'(x)\,(-Q_1[H(x)]\,Z_j[H(x)] +$$

$$+ \dot{Z}_j[H(x)])\,.\,(1 + o[\varkappa_j(H) + 1])\}\,, \quad j = 1, 2\,.$$

(i_2) *Ist*

(1.6) $$-Q_1 Z_j + \dot{Z}_j \neq 0 \quad \text{in} \quad J\,, \quad Z_j(-Q_1 Z_k + \dot{Z}_k) = O[\varkappa_j Z_k(-Q_1 Z_j + \dot{Z}_j)]\,,$$

$$\exp\left\{-\int_{t_0}^{t} Q_1\,\mathrm{d}s\right\} Z_k(-Q_1 Z_j + \dot{Z}_j) = O(\varkappa_k Z_j)\,, \quad \varkappa_i(t) > 0\,, \quad i = 1, 2,$$

so gilt

$$(1.7)\qquad y_j'(x) = \exp\left\{-\int_{t_0}^{H(x)} Q_1(s)\,\mathrm{d}s\right\}\{f'(x)\,Z_j[H(x)]\,[1 + o(1)] +$$

$$f(x)\,H'(x)\,(-Q_1[H(x)]\,Z_j[H(x)] + \dot{Z}_j[H(x)])\,(1 + o[\varkappa_j(H) + 1])\}\,,$$

$$y_k'(x) = \exp\left\{-\int_{t_0}^{H(x)} Q_1(s)\,\mathrm{d}s\right\}\{f'(x)\,Z_k[H(x)]\,[1 + o(1)] +$$

$$+ f(x)\,H'(x)\,(-Q_1[H(x)]\,Z_k[H(x)] + \dot{Z}_k[H(x)])\} +$$

$$f(x)\,H'(x)\,\varkappa_k(H)\,[\varkappa_j(H) + 1]\,o(1)\,,\quad j, k = 1, 2\,,\quad j \neq k\,.$$

(i_3) *Ist*

$$(1.8)\qquad Z_k(t) = \exp\left\{\int_{t_0}^{t} Q_1(s)\,\mathrm{d}s\right\},$$

so gilt

$$(1.9)\qquad y_j'(x) = \exp\left\{-\int_{t_0}^{H(x)} Q_1(s)\,\mathrm{d}s\right\}\{f'(x)\,Z_j[H(x)]\,[1 + o(1)] +$$

$$+ f(x)\,H'(x)\,(-Q_1[H(x)]\,Z_j[H(x)] + \dot{Z}_j[H(x)])\,[1 + o(1)]\}\,,$$

$$y_k'(x) = f'(x)\,[1 + o(1)] + f(x)\,H'(x)\,\{-Q_1[H(x)] +$$

$$+ \dot{Z}_j[H(x)]/Z_j[H(x)]\}\,o(1)\,,\quad j, k = 1, 2\,,\quad j \neq k\,.$$

Beweis. Die Gleichung $(\overline{\mathrm{Q}})$ ist die Normalform des Bildes $(\overline{\mathrm{Q}})\,\{t, \exp[-\int_{t_0}^{t} Q_1(s)\,.\,\mathrm{d}s]\}$ mit

$$(1.10)\qquad Q_2(t) = Q(t) + \dot{Q}_1(t) + Q_1^2(t)\,,$$

so daß die Beziehungen

$$(1.11)\qquad Y(t) = \exp\left\{-\int_{t_0}^{t} Q_1(s)\,\mathrm{d}s\right\} Z(t)\,,$$

$$(1.12_1)\qquad Y_j(t)\,Y_k(t) = \exp\left\{-2\int_{t_0}^{t} Q_1(s)\,\mathrm{d}s\right\} Z_j(t)\,Z_k(t)\,,$$

$$(1.12_2)\qquad Y_j(t)\,\dot{Y}_k(t) = \exp\left\{-2\int_{t_0}^{t} Q_1(s)\,\mathrm{d}s\right\}[-Q_1(t)\,Z_j(t)\,Z_k(t) + Z_j(t)\,\dot{Z}_k(t)]$$

gelten.

Gilt (i) oder (ii), so können wir (1.12) in der Form

$$Y_j(t)\, Y_k(t) = \exp\left\{-2\int_{t_0}^{t} Q_1(s)\,\mathrm{d}s\right\} O[\Phi(t)]\,,$$

$$Y_j(t)\, \dot{Y}_k(t) = \exp\left\{-2\int_{t_0}^{t} Q_1(s)\,\mathrm{d}s\right\} O[|Q_1(t)|\,\Phi(t) + \Psi(t)]$$

schreiben.

Setzt man

$$\Psi_0[H(x)] = \exp\left\{-2\int_{t_0}^{H(x)} Q_1(s)\,\mathrm{d}s\right\}\{|Q_1[H(x)]|\,\Phi[H(x)] + \Psi[H(x)]\}$$

in (I_0) ein, so erhält man (I). Setzt man ferner

$$\Phi_0[H(x)] = \exp\left\{-2\int_{t_0}^{H(x)} Q_1(s)\,\mathrm{d}s\right\}\Phi[H(x)]$$

und die Beziehung (1.10) in (II_0) ein, so erhält man nach einer Umformung mit Rücksicht auf (0.1) die Formel (II).[1])

Gilt (1.4), so schließen wir nach (1.11), (1.12_2), daß die Basis (0.3) regelmäßig ist mit Schätzfunktionen $\varkappa_1(t), \varkappa_2(t)$. Gilt (1.6), so ist die Basis (0.3) halbregelmäßig j-ter Art mit Schätzfunktionen $\varkappa_1(t), \varkappa_2(t)$. Gilt (1.8), so ist $Y_k[H(x)] = 1$.

Alle Voraussetzungen des Hilfssatzes sind also erfüllt, so daß alle Behauptungen dieses Satzes gelten. Setzt man (1.11) in die Formeln (0.2), (0.4)–(0.7) ein, erhält man alle in dem Hauptsatz angegebenen Formeln.

2. Es seien die Gleichungen $(\overline{\mathrm{Q}})$, (q) und positive Funktionen H, f, φ, ψ mit den Eigenschaften a), b) gegeben und es gelten die Formeln (i), (ii), siehe Abs. 1.

Satz I. *Es gelte*

$$\text{(I)}\qquad \int_{x_0}^{\infty}[|aH^{-1} + b|\,\Phi(H) + \Psi(H)]\,.$$

$$\cdot\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\log\left(f^2H^{2a}e^{2bH}H'\exp\left\{2\int_{x_0}^{x} q_1\,\mathrm{d}s\right\}\right)\right]\right|\mathrm{d}x < \infty\,, \quad a, b \in E_1\,,$$

$$\text{(II)}\qquad \int_{x_0}^{\infty}\frac{\Phi(H)}{f^2H'}\,|f''f + 2q_1f'f + q_2f^2 -$$

$$- f^2H'^2[Q(H) + a(a+1)H^{-2} + 2abH^{-1} + b^2]|\,\mathrm{d}x < \infty$$

mit $\Phi = \varphi^2$, $\Psi = \varphi\psi$. *Dann gelten die folgenden Behauptungen*:

---

[1]) Der Grenzwert (0.1) folgt aus (I_0), s. [1; S. 236].

1° *Es existiert der Grenzwert*

$$\lim_{x\to\infty}\left(f^2H^{2a}e^{2bH}H'\exp\left\{2\int_{x_0}^{x}q_1\,\mathrm{d}s\right\}\right)=C\,,\quad 0<C\in E_1\,. \tag{2.1}$$

2° *Gilt* (i), *so hat die Gleichung* (q) *eine Basis von der Gestalt*

$$y_j=H^ae^{bH}f[Z_j(H)+\varphi(H)\,o(1)]\,,$$
$$y_j'=H^ae^{bH}(f'[Z_j(H)+\varphi(H)\,o(1)]+$$
$$+fH'\{(aH^{-1}+b)\,[Z_j(H)+\varphi(H)\,o(1)]+\dot Z_j(H)+\psi(H)\,o(1)\})\,,\quad j=1,2\,,$$

wo (1.2) *eine beliebige Basis von* $(\overline{\mathrm{Q}})$ *darstellt.*

3° *Ist* (1.2) *in* J *eine positive Hauptbasis von* $(\overline{\mathrm{Q}})$ *und gilt* (ii), *so hat die Gleichung* (q) *eine Hauptbasis von der Gestalt*

$$y_j=H^ae^{bH}fZ_j(H)\,[1+o(1)]\,,\quad j=1,2\,.$$

(i_1) *Ist*

$$(at^{-1}+b)\,Z_i+\dot Z_1\neq 0\ \text{ in }\ J\,,\quad i=1,2\,, \tag{2.2}$$
$$Z_j[(at^{-1}+b)\,Z_k+\dot Z_k]=O\{\varkappa_jZ_k[(at^{-1}+b)\,Z_j+\dot Z_j]\}\,,$$
$$\varkappa_j(t)>0\,,\quad j,k=1,2\,,\quad j\neq k\,,$$

so gilt

$$y_j'=H^ae^{bH}\{f'\,Z_j(H)\,[1+o(1)]+fH'[(aH^{-1}+b)\,Z_j(H)+$$
$$+\dot Z_j(H)]\,(1+o[\varkappa_j(H)+1])\}\,,\quad j=1,2\,.$$

(i_2) *Ist*

$$(at^{-1}+b)\,Z_j+\dot Z_j\neq 0\ \text{ in }\ J\,,\quad Z_j[(at^{-1}+b)\,Z_k+\dot Z_k]= \tag{2.3}$$
$$=O\{\varkappa_jZ_k[(at^{-1}+b)\,Z_j+\dot Z_j]\}\,,\quad t^ae^{bt}Z_k[(at^{-1}+b)\,Z_j+\dot Z_j]=$$
$$=O(\varkappa_kZ_j)\,,\quad \varkappa_i(t)>0\,,\quad i=1,2\,,$$

so gilt

$$y_j'=H^ae^{bH}\{f'\,Z_j(H)\,[1+o(1)]+fH'[(aH^{-1}+b)\,Z_j(H)+\dot Z_j(H)]\,.$$
$$.\,(1+o[\varkappa_j(H)+1])\}\,.$$

$$y_k'=H^ae^{bH}\{f'\,Z_k(H)\,[1+o(1)]+fH'[(aH^{-1}+b)\,Z_k(H)+\dot Z_k(H)]\}+ \tag{2.4}$$
$$+fH'\varkappa_k(H)\,[\varkappa_j(H)+1]\,o(1)\,,\quad j=1,2\,,\quad j\neq k\,.$$

(i_3) *Ist*

$$Z_k(t)=t^{-a}e^{-bt}\,,$$

so gilt

$$y_j' = H^a e^{bH}\{f' Z_j(H)[1 + o(1)] + fH'[(aH^{-1} + b) Z_j(H) + \dot{Z}_j(H)][1 + o(1)]\},$$
$$y_k' = f'[1 + o(1)] + fH'[aH^{-1} + b + \dot{Z}_j(H)/Z_j(H)]\, o(1),$$
$$j, k = 1, 2, \quad j \neq k.$$

Satz I folgt aus dem Hauptsatz, falls wir $Q_1(t) = -at^{-1} - b$ wählen.

Im folgenden werden einige Anwendungen des Satzes I angeführt, die man durch eine passende Wahl der Funktion $Q(t)$ erhält.

Anstatt $\int_{x_0}^{\infty} f(x)\, dx$ werden wir einfach $\int^{\infty} f$ schreiben.

3. *Ist*

$$\int^{\infty} \left| \frac{d}{dx} \left[\log \left(f^2 H^{2a} e^{2bH} H' \exp \left\{ 2 \int_{x_0}^{x} q_1\, ds \right\} \right) \right] \right| < \infty, \quad a, b \in E_1, \tag{3.1}$$

$$\int^{\infty} \frac{1}{f^2 H'} \left| f''f + 2q_1 f'f + q_2 f^2 - f^2 H'^2 (2abH^{-1} + b^2 - \varepsilon) \right| < \infty, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

so gilt (2.1) *und die folgenden Behauptungen*:

1° *Im Fall* $\varepsilon = -1$ *hat die Gleichung* (q) *eine Basis von der Form*

$$y_k = H^a e^{bH} f \left[\sin\left(H + \frac{k-1}{2}\pi \right) + o(1) \right],$$

$$y_k' = H^a e^{bH} \left\{ f' \left[\sin\left(H + \frac{k-1}{2}\pi \right) + o(1) \right] + \right.$$
$$\left. + fH' \left[(aH^{-1} + b) \sin\left(H + \frac{k-1}{2}\pi \right) + \cos\left(H + \frac{k-1}{2}\pi \right) + o(1) \right] \right\}, \quad k = 1, 2.$$

2° *Im Fall* $\varepsilon = 1$ *hat die Gleichung* (q) *eine Hauptbasis von der Gestalt*

$$y_k = H^a f \exp\{H[b + (-1)^k]\}[1 + o(1)], \tag{3.2}$$
$$y_k' = H^a \exp\{H[b + (-1)^k]\}\{f'[1 + o(1)] +$$
$$+ fH'[aH^{-1} + b + (-1)^k][1 + o(1)]\}, \quad k = 1, 2.$$

3° *Ist* $a = 0, b = -1$ *bzw.* $a = 0, b = 1$, *so besitzt die Gleichung* (q) *die Hauptbasis*

$$y_j = \exp\{(-1)^j 2H\} f[1 + o(1)], \quad y_k = f[1 + o(1)],$$

$$y_j' = \exp\{(-1)^j 2H\}\{f'[1 + o(1)] + 2fH'[(-1)^j + o(1)]\},$$
$$y_k' = f'[1 + o(1)] + fH'\,o(1),$$

wo $j = 1$, $k = 2$ bzw. $j = 2$, $k = 1$ zu wählen ist.

Dies folgt aus dem Satz I, falls $Q(t) = -\varepsilon$ gesetzt wird.

Beispiele a) Man wähle

$$f(x) = \sqrt{x}\,, \quad H(x) = \beta \log x\,, \quad 0 < \beta \in E_1\,. \tag{3.4}$$

Ist

$$\int^\infty \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\log\left(x^{2b\beta}\log^{2a}x \exp\left\{2\int_{xo}^x q_1\,\mathrm{d}s\right\}\right)\right]\right| < \infty\,, \quad a, b \in E_1\,,$$

$$\int^\infty \left|q_1 + xq_2 + \frac{\gamma \log x - 2ab}{x \log x}\right| < \infty\,, \quad \gamma = \frac{4\beta^2(\varepsilon - b^2) - 1}{4}\,,$$

so gelten die Behauptungen:

$$1^\circ \ \lim\left(x^{2b\beta}\log^{2a}x \exp\left\{2\int_{xo}^x q_1\,\mathrm{d}s\right\}\right) = c\,, \quad 0 < c \in E_1\,. \tag{3.5}$$

2° Die Gleichung (q) hat im Fall $\varepsilon = -1$ eine Basis von der Form

$$y_k = x^{\beta b + 1/2}\log^a x\left[\sin\left(\beta \log x + \frac{k-1}{2}\pi\right) + o(1)\right],$$

$$y_k' = x^{\beta b - 1/2}\log^a x\left[\left(\beta b + \frac{1}{2} + \frac{a}{\log x}\right)\sin\left(\beta \log x + \frac{k-1}{2}\pi\right) + \right.$$
$$\left. + \beta\cos\left(\beta \log x + \frac{k-1}{2}\pi\right)\right], \quad k = 1, 2\,.$$

3° Im Fall $\varepsilon = 1$ hat die Gleichung (q) die Hauptbasis

$$y_k = x^{b\beta + 1/2 + (-1)^k\beta}\log^a x[1 + o(1)]\,,$$

$$y_k' = x^{b\beta - 1/2 + (-1)^k\beta}\log^a x\left[b\beta + \tfrac{1}{2} + (-1)^k\beta + \frac{a}{\log x} + o(1)\right], \quad k = 1, 2\,.$$

b) Man wähle im Beispiel a) $\varepsilon = 1$, $a = b = q_1 = 0$. Ist $\int^\infty x|q_2 + \gamma/x^2| < < \infty$, $\gamma = (4\beta^2 - 1)/4$, so hat die Gleichung $y'' + q_2 y = 0$ die Hauptbasis $y_k = = x^{1/2 + (-1)^k\beta}[1 + o(1)]$, $y_k' = x^{-1/2 + (-1)^k\beta}[\tfrac{1}{2} + (-1)^k\beta + o(1)]$. Dieses Beispiel verallgemeinert im Fall $-\tfrac{1}{4} < \gamma \leqq 0$ das Ergebnis aus [2; Satz 23, S. 514].

4. *Ist*

$$(4.1)\qquad \int^{\infty}(1+|b|\,H)\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\log\left(f^2H^{2a}e^{2bH}H'\exp\left\{2\int_{x_0}^{x}q_1\,\mathrm{d}s\right\}\right)\right]\right|<\infty\,,$$

$$a, b \in E_1\,,$$

$$(4.2)\qquad \int^{\infty}\frac{H}{f^2H'}\left|f''f+2q_1f'f+q_2f^2-\right.$$

$$\left.-f^2H'^2\cdot\left[\frac{\alpha+a(a+1)}{H^2}+\frac{2ab}{H}+b^2\right]\right|<\infty\,,\quad \tfrac{1}{4}\neq\alpha\in E_1\,,$$

so gelten (2.1) *und die folgenden Behauptungen:*

1° *Im Fall* $\alpha > \frac{1}{4}$ *hat die Gleichung* (q) *eine Basis von der Gestalt*

$$y_k = H^{a+1/2}e^{bH}f\left[\sin\left(\omega\log H+\frac{k-1}{2}\pi\right)+o(1)\right],$$

$$y'_k = H^{a+1/2}e^{bH}\left(f'\left[\sin\left(\omega\log H+\frac{k-1}{2}\pi\right)+o(1)\right]+\right.$$

$$+fH'\left\{[(a+\tfrac{1}{2})H^{-1}+b]\left[\sin\left(\omega\log H+\frac{k-1}{2}\pi\right)+o(1)\right]+\right.$$

$$\left.\left.+\,\omega H^{-1}\cos\left(\omega\log H+\frac{k-1}{2}\pi\right)+o(1)\right\}\right),\quad k=1,2\,,$$

mit

$$(\omega_1)\qquad \omega=\sqrt{(\alpha-\tfrac{1}{4})}\,.$$

2° *Im Fall* $\alpha < \frac{1}{4}$ *hat die Gleichung* (q) *die Hauptbasis*

$$(4.3)\qquad y_j = H^{a+1/2-\omega}e^{bH}f[1+o(1)]\,,\quad y_k = H^{a+1/2+\omega}e^{bH}f[1+o(1)]\,,$$

$$y'_j = H^{a+1/2-\omega}e^{bH}\{f'[1+o(1)]+fH'[(a+\tfrac{1}{2}-\omega)H^{-1}+b]\,[1+o(1)]\}\,,$$

$$y'_k = H^{a+1/2+\omega}e^{bH}\{f'[1+o(1)]+fH'[(a+\tfrac{1}{2}+\omega)H^{-1}+b]\,[1+o(1)]\}\,,$$

mit

$$(\omega_2)\qquad \omega=\pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}-\alpha)}$$

wo im Fall $\omega > 0$ *bzw.* $\omega < 0$ $j = 1, k = 2$ *bzw.* $j = 2, k = 1$ *zu nehmen ist.*

3° *Ist* $b = 0, a + \frac{1}{2} + \omega = 0$ *bzw.* $b = 0, a + \frac{1}{2} - \omega = 0$, *so hat die Gleichung* (q) *die Hauptbasis*

$$(4.4)\qquad \begin{aligned} y_j &= H^{-2\omega} f[1 + o(1)]\,, \quad y_k = f[1 + o(1)]\,,\\ y_j' &= H^{-2\omega}\{f'[1 + o(1)] - 2\omega f H' H^{-1}[1 + o(1)]\}\,,\\ y_k' &= f'[1 + o(1)] + f H' H^{-1}\, o(1) \end{aligned}$$

bzw.

$$(4.5)\qquad \begin{aligned} y_j &= f[1 + o(1)]\,, \quad y_k = H^{2\omega} f[1 + o(1)]\,,\\ y_j' &= f'[1 + o(1) + f H' H^{-1}\, o(1)\,,\\ y_k' &= H^{2\omega}\{f'[1 + o(1)] + 2\omega f H' H^{-1}[1 + o(1)]\}\,, \end{aligned}$$

wo im Fall $\omega > 0$ bzw. $\omega < 0$ $j = 1, k = 2$ bzw. $j = 2, k = 1$ gesetzt wird.

Dies folgt aus dem Satz I für $Q(t) = \alpha t^{-2}$.

Bemerkungen. a) Setzt man $\alpha = -n(n - 1)$, so ist $\omega = n - \frac{1}{2}$. Dann gelten für $n > \frac{1}{2}[n < \frac{1}{2}]$ die Ungleichungen $\alpha < \frac{1}{4}, \omega > 0[\alpha < \frac{1}{4}, \omega < 0]$ und die Formeln (4.2)–(4.5) kann man auf die Form

$$(4.2_1)\qquad \int^{\infty} \frac{H}{f^2 H'} \left| f'' f + 2q_1 f' f + q_2 f^2 - \right.$$
$$\left. - f^2 H'^2 \left[\frac{a(a + 1) - n(n - 1)}{H^2} + \frac{2ab}{H} + b^2\right]\right| < \infty\,,$$

$$(4.3_1)\qquad \begin{aligned} y_j &= H^{a-n+1} e^{bH} f[1 + o(1)]\,, \quad y_k = H^{a+n} e^{bH} f[1 + o(1)]\,,\\ y_j' &= H^{a-n+1} e^{bH}\{f'[1 + o(1)] + f H'[(a + 1 - n) H^{-1} + b][1 + o(1)]\}\,,\\ y_k' &= H^{a+n} e^{bH}\{f'[1 + o(1)] + f H'[(a + n) H^{-1} + b][1 + o(1)]\}\,, \end{aligned}$$

$$(4.4_1)\qquad \begin{aligned} y_j &= H^{-2n+1} f[1 + o(1)]\,, \quad y_k = f[1 + o(1)]\,,\\ y_j' &= H^{-2n+1}\{f'[1 + o(1)] - (2n - 1) f H' H^{-1}[1 + o(1)]\}\,,\\ y_k' &= f'[1 + o(1)] + f H' H^{-1}\, o(1) \end{aligned}$$

bzw.

$$(4.5_1)\qquad \begin{aligned} y_j &= f[1 + o(1)]\,, \quad y_k = H^{2n-1} f[1 + o(1)]\,,\\ y_j' &= f'[1 + o(1)] + f H' H^{-1}\, o(1)\,,\\ y_k' &= H^{2n-1}\{f'[1 + o(1)] + (2n - 1) f H' H^{-1}[1 + o(1)]\} \end{aligned}$$

bringen, wo für $n > \frac{1}{2}$ bzw. $n < \frac{1}{2}$ $j = 1, l = 2$ bzw. $k = 2, k = 1$ zu nehmen ist.

Setzt man ferner $a = n, 2n = v$, so kann man die Formeln (4.1)–(4.3) in der Form

$$(4.1_2) \qquad \int^{\infty} (1 + |b|\, H) \left| \frac{d}{dx} \left[\log \left(f^2 H^v e^{2bH} H' \exp \left\{ 2 \int_{x_0}^{x} q_1 \, ds \right\} \right) \right] \right| < \infty ,$$

$$(4.2_2) \qquad \int^{\infty} \frac{H}{f^2 H'} \left| f''f + 2q_1 f'f + q_2 f^2 - f^2 H'^2 \left(\frac{v}{H^2} + \frac{vb}{H} + b^2 \right) \right| < \infty ,$$

$$(4.3_2) \qquad y_j = He^{bH} f[1 + o(1)] , \quad y_k = H^v e^{bH} f[1 + o(1)] ,$$
$$y_j' = He^{bH} \{ f'[1 + o(1)] + fH'(H^{-1} + b) [1 + o(1)] \} ,$$
$$y_k' = H^v e^{bH} \{ f'[1 + o(1)] + fH'(vH^{-1} + b) [1 + o(1)] \}$$

schreiben, wo im Fall $v > 1$ bzw. $v < 1$ $j = 1, k = 2$ bzw. $j = 2, k = 1$ gesetzt wird.

b) Wählt man $\alpha = -n(n + 1)$, so ist $\omega = n + \frac{1}{2}$. Dann gelten für $n > -\frac{1}{2}$ $[n < -\frac{1}{2}]$ die Ungleichungen $\alpha < \frac{1}{4}, \omega > 0$ $[\alpha < \frac{1}{4}, \omega < 0]$ und mit den Formeln (4.2)–(4.5) kann man folgende Umformungen durchführen:

$$(4.2_3) \qquad \int^{\infty} \frac{H}{f^2 H'} \Bigg| f''f + 2q_1 f'f + q_2 f^2 -$$
$$- f^2 H'^2 \left(\frac{a(a + 1) - n(n + 1)}{H^2} + \frac{2ab}{H} + b^2 \right) \Bigg| < \infty ,$$

$$(4.3_3) \qquad y_j = H^{a-n} e^{bH} f[1 + o(1)] , \quad y_k = H^{a+n+1} e^{bH} f[1 + o(1)] ,$$
$$y_j' = H^{a-n} e^{bH} \{ f'[1 + o(1)] + fH'[(a - n) H^{-1} + b] [1 + o(1)] \} ,$$
$$y_k' = H^{a+n+1} e^{bH} \{ f'[1 + o(1)] + fH'[(a + n + 1) H^{-1} + b] [1 + o(1)] \} ,$$

$$(4.4_3) \qquad y_j = H^{-2n-1} f[1 + o(1)] , \quad y_k = f[1 + o(1)] ,$$
$$y_j' = H^{-2n-1} \{ f'[1 + o(1)] - (2n + 1) fH'H^{-1} [1 + o(1)] \} ,$$
$$y_k' = f'[1 + o(1)] + fH'H^{-1} o(1) ,$$

bzw.

$$(4.5_3) \qquad y_1 = f[1 + o(1)] , \quad y_k = H^{2n+1} f[1 + o(1)] ,$$
$$y_j' = f'[1 + o(1)] + fH'H^{-1} o(1) ,$$
$$y_k' = H^{2n+1} \{ f'[1 + o(1)] + (2n + 1) fH'H^{-1} [1 + o(1)] \} ,$$

wo für $n > -\frac{1}{2}$ bzw. $n < -\frac{1}{2}$ $j = 1, k = 2$ bzw. $j = 2, k = 1$ zu nehmen ist.

Setzt man ferner $a = n$, $2n = \nu$, so gilt (4.1_2) und die Formeln (4.2)–(4.5) lassen sich in der Form

$$(4.2_4) \qquad \int^{\infty} \frac{H}{f^2 H'} \left| f''f + 2q_1 f'f + q_2 f^2 - f^2 H'^2 \left(\frac{\nu b}{H} + b^2 \right) \right| < \infty\,,$$

$$(4.3_4) \qquad y_j = e^{bH} f[1 + o(1)]\,, \quad y_k = H^{\nu+1} e^{bH} f[1 + o(1)]\,,$$
$$y'_j = e^{bH}\{f'[1 + o(1)] + fH'b[1 + o(1)]\}\,,$$
$$y'_k = H^{\nu+1} e^{bH}\{f'[1 + o(1)] + fH'[(\nu + 1) H^{-1} + b]\,[1 + o(1)]\}\,,$$

$$(4.5_4) \qquad y_j = f[1 + o(1)]\,, \quad y_k = H^{\nu+1} f[1 + o(1)]\,,$$
$$y'_j = f'[1 + o(1)] + fH'H^{-1}\,o(1)\,,$$
$$y'_k = H^{\nu+1}\{f'[1 + o(1)] + (\nu + 1) fH'H^{-1}[1 + o(1)]\}$$

schreiben, wo für $\nu > -1$ bzw. $\nu < -1$ $j = 1$, $k = 2$ bzw. $j = 2$, $k = 1$ zu nehmen ist.

Beispiele. a) Man wähle (3.4). Ist

$$\int^{\infty} (1 + |b| \log x) \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[\log \left(x^{2b\beta} \log^{2a} x \exp \left\{ 2 \int_{x_0}^{x} q_1 \,\mathrm{d}s \right\} \right) \right] \right| < \infty\,, \quad a, b \in E_1\,,$$

$$\int^{\infty} \log x \left| q_1 + x q_2 - \frac{\gamma + \delta \log x + \vartheta \log^2 x}{4x \log^2 x} \right| < \infty\,,$$

mit $\gamma = 4\beta^2[\alpha + a(a + 1)]$, $\delta = 8\beta^2 ab$, $\vartheta = 4\beta^2 b^2 + 1$, dann gelten die folgenden Behauptungen:

1° Es existiert der Grenzwert (3.5).

2° Im Fall $\alpha > \frac{1}{4}$ hat die Gleichung (q) die Basis

$$y_k = x^{\beta b + 1/2} (\log x)^{a + 1/2} \left[\sin \left(\omega \log_2 x^{\beta} + \frac{k - 1}{2} \pi \right) + o(1) \right],$$

$$y'_k = x^{\beta b - 1/2} (\log x)^{a + 1/2} \left\{ \frac{1}{2} \sin \left(\omega \log_2 x^{\beta} + \frac{k - 1}{2} \pi \right) + o(1) + \right.$$
$$+ \left[(a + \tfrac{1}{2}) \log^{-1} x + \beta b \right] \left[\sin \left(\omega \log_2 x^{\beta} + \frac{k - 1}{2} \pi \right) + o(1) \right] +$$
$$\left. + \,\omega \log^{-1} x \cos \left(\omega \log_2 x^{\beta} + \frac{k - 1}{2} \pi \right) + o(1) \right\}, \quad k = 1, 2,$$

wo (ω_1) gilt.

3° Im Fall $\alpha < \frac{1}{4}$ hat die Gleichung (q) die Hauptbasis

$$y_j = x^{\beta b+1/2}(\log x)^{a+1/2-\omega}[1 + o(1)], \quad y_k = x^{\beta b+1/2}(\log x)^{a+1/2+\omega}[1 + o(1)],$$

$$y_j' = x^{\beta b-1/2}(\log x)^{a+1/2-\omega}\{\tfrac{1}{2}[1 + o(1)] + [(a + \tfrac{1}{2} - \omega)\log^{-1} x + \beta b][1 + o(1)]\},$$

$$y_k' = x^{\beta b-1/2}(\log x)^{a+1/2+\omega}\{\tfrac{1}{2}[1 + o(1)] + [(a + \tfrac{1}{2} + \omega)\log^{-1} x + \beta b][1 + o(1)]\},$$

wo (ω_2) gilt und im Fall $\omega > 0$ bzw. $\omega < 0$ $j = 1$, $k = 2$ bzw. $j = 2$, $k = 1$ gesetzt wird.

4° Ist $b = 0$, $a + \frac{1}{2} + \omega = 0$ bzw. $b = 0$, $a + \frac{1}{2} - \omega = 0$, so hat die Gleichung (q) die Hauptbasis

$$y_j = x^{1/2}(\log x)^{-2\omega}[1 + o(1)], \quad y_k = x^{1/2}(\log x)[1 + o(1)],$$

$$y_j' = x^{-1/2}(\log x)^{-2\omega}\{\tfrac{1}{2}[1 + o(1)] - 2\omega \log^{-1} x[1 + o(1)]\},$$

$$y_k' = x^{-1/2}[\tfrac{1}{2} + o(1)].$$

bzw.

$$y_j = x^{1/2}[1 + o(1)], \quad y_k = x^{1/2}(\log x)^{2\omega}[1 + o(1)],$$

$$y_j' = x^{-1/2}[\tfrac{1}{2} + o(1)],$$

$$y_k' = x^{-1/2}(\log x)^{2\omega}\{\tfrac{1}{2}[1 + o(1)] + 2\omega \log^{-1} x[1 + o(1)]\},$$

wo (ω_2) gilt und im Fall $\omega > 0$ bzw. $\omega < 0$ $j = 1$, $k = 2$ bzw. $j = 2$, $k = 1$ gesetzt wird.

b) Man wähle im Beispiel a) $\alpha = a = b = 0$, so daß $\omega = \frac{1}{2}$ ist. Ist $\int^\infty \log x|q_1| < \infty$, $\int^\infty x \log x|q_2 - (1/4x^2)| < \infty$, so hat die Gleichung (q) die Hauptbasis $y_1 = \sqrt{(x)}\,[1 + o(1)]$, $y_2 = \sqrt{(x)} \log x[1 + o(1)]$, $y_1' = (\sqrt{x})'[1 + o(1)]$, $y_2' = (\sqrt{(x)} \log x)'[1 + o(1)]$.

c) Man wähle $f(x) = 1$, $H(x) = x$, $\alpha = -n(n + 1)$, $a = n$, $2n = v$, $b = 0$. Ist $\int^\infty |(d/dx)[\log(x^v \exp\{2 \int_{x_0}^x q_1\, ds\})]| < \infty$, $\int^\infty x|q_2| < \infty$, so hat die Gleichung (q) die Hauptbasis $y_1 = [1 + o(1)]$, $y_2 = x^{v+1}[1 + o(1)]$, $y_1' = o(x^{-1})$, $y_2' = (v + 1)x^v[1 + o(1)]$. Dieses Beispiel verallgemeinert das in [1; Lemma 2.5) angeführte Ergebnis.

5. Es sei

$$\int^\infty (1 + |b|\,H) \log H \left|\frac{d}{dx}\left[\log\left(f^2 H^{2a} e^{2bH} H' \exp\left\{2\int_{x_0}^x q_1\, ds\right\}\right)\right]\right| < \infty, \quad a, b \in E_1,$$

$$\int^\infty \frac{H \log H}{f^2 H'}\left|f''f + 2q_1 f'f + q_2 f^2 - f^2 H'^2\left[\frac{1 + 4a(a + 1)}{4H^2} + \frac{2ab}{H} + b^2\right]\right| < \infty.$$

Dann gilt (2.1) und die Gleichung (q) hat die Hauptbasis

$$y_1 = H^{a+1/2}e^{bH}f[1 + o(1)], \quad y_2 = H^{a+1/2}e^{bH}f\log H[1 + o(1)],$$

$$y_1' = H^{a+1/2}e^{bH}\{f'[1 + o(1)] + fH'[(a + \tfrac{1}{2})H^{-1} + b][1 + o(1)]\},$$

$$y_2' = H^{a+1/2}e^{bH}(f'\log H[1 + o(1)] + fH'\{\log H[a + \tfrac{1}{2})H^{-1} + b] + \\ + H^{-1}\}[1 + o(1)]).$$

Ist $b = 0$, $a = -\frac{1}{2}$, dann hat die Gleichung (q) die Hauptbasis

$$y_1 = f[1 + o(1)], \quad y_2 = f\log H[1 + o(1)],$$

$$y_1' = f'[1 + o(1)] + fH'(H\log H)^{-1}o(1),$$

$$y_2' = f'\log H[1 + o(1)] + fH'H^{-1}[1 + o(1)].$$

Es folgt aus dem Satz I für $Q(t) = \frac{1}{4}t^{-2}$.

Beispiel. Man setze $b = 0$, $a = -\frac{1}{2}$, $f = 1$, $H = x$. Gilt $\int^\infty \log x|2q_1 - 1/x| < \infty$, $\int^\infty x\log x|q_2| < \infty$, so hat die Gleichung (q) die Hauptbasis $y_1 = 1 + o(1)$, $y_2 = \log x[1 + o(1)]$, $y_1' = o[(x\log x)^{-1}]$, $y_2' = x^{-1}[1 + o(1)]$.

6. Gilt (4.1) und

$$\int^\infty \frac{H}{f^2H'}|f''f + 2q_1f'f + q_2f^2 - f^2H'^2[a(a + 1)H^{-2} + 2abH^{-1} + b^2]| < \infty,$$

so existiert der Grenzwert (2.1) und die Gleichung (q) hat die Hauptbasis

$$y_1 = H^{a+1}e^{bH}f\sin\frac{1}{H}[1 + o(1)], \quad y_2 = H^{a+1}e^{bH}f\cos\frac{1}{H}[1 + o(1)],$$

$$y_1' = H^{a+1}e^{bH}\left(f'\sin\frac{1}{H}[1 + o(1)] + fH'\left\{[(a + 1)H^{-1} + b]\sin\frac{1}{H} - \right.\right. \\ \left.\left. - H^{-2}\cos\frac{1}{H}\right\}[1 + o(1)]\right),$$

$$y_2' = H^{a+1}e^{bH}\left(f'\cos\frac{1}{H}[1 + o(1)] + fH'\left\{[(a + 1)H^{-1} + b]\cos\frac{1}{H} + \right.\right. \\ \left.\left. + H^{-2}\sin\frac{1}{H}\right\}[1 + o(1)]\right).$$

Dies folgt aus dem Satz I für $Q(t) = t^{-4}$.

Literaturverzeichnis

[1] *Z. Hustý:* Asymptotische Eigenschaften der Differentialgleichung $y'' + 2a_1(x)\, y' + a_2(x)\, y' = 0$. Czechoslovak Math. J. *19* (*94*), (1969), 208—240.

[2] *J. Mařík, M. Ráb:* Asymptotische Eigenschaften von Lösungen der Differentialgleichung $y'' = A(x)\, y$ im nichtoszillatorischen Fall. Czechoslovak Math. J. *10* (*85*), (1960), 501—522.

Anschrift des Verfassers: Brno, Zemědělská 5 (Vysoká škola zemědělská).