Časopis pro pěstování matematiky

Zbyněk Nádeník; Stanislav Šmakal
O geometrii ve velkém uzavřených prostorových křivek

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 95 (1970), No. 3, 290--308

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117700`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 95 (1970), Praha

O GEOMETRII VE VELKÉM UZAVŘENÝCH PROSTOROVÝCH KŘIVEK

ZBYNĚK NÁDENÍK a STANISLAV ŠMAKAL, Praha

(Došlo dne 22. ledna 1969)

V článku jsme se pokusili o přehled geometrie ve velkém uzavřených prostorových čar. Zcela stranou zůstaly jejich topologické vlastnosti, jimž je cele věnována kniha R. H. Crowella - R. F. Foxe: *Introduction to knot theory*, Boston 1963 (Введение в теорию узлов, Moskva 1967) a částečně i dílo O. Haupta - H. Künnetha: *Geometrische Ordnungen*, Berlin 1967[1]). Ve velmi významném popředí je diferenciálně geometrické studium a integrální nerovnosti. Křivka se vždy uvažuje samostatně, nikoliv jako útvar na ploše; nereferujeme tedy např. o analogiích klasické isoperimetrické nerovnosti na kulové nebo obecné ploše.

I.

Velmi stará věta v geometrii ve velkém prostorových křivek pochází od C. G. J. JACOBIHO [1] z roku 1842. Týká se sférického obrazu hlavních normál prostorové křivky a uvedeme ji v jiné souvislosti v odd. II. Soustavnější studium vlastností křivek ve velkém má přímou souvislost s variačními problémy. Autorem jednoho z nich je CH. E. DELAUNAY (srv. BLASCHKE [3], str. 50): *Dva body A, B máme spojit takovou křivkou o konstantní flexi, jejíž směry v A, B jsou dány a jejíž délka je extrémní.*

V roce 1884 ukázal K. WEIERSTRASS [1], že extremály této úlohy je možno stanovit pomocí eliptických funkcí. V souvislosti s Weierstrassovými úvahami dospěl H. A. SCHWARZ v 80. letech minulého století k pozoruhodným větám o prostorových křivkách konstantní flexe. H. A. Schwarz své výsledky nepublikoval, ale zásluhou C. CARATHÉODORYHO, který je znal a upozornil na ně W. Blaschkeho, byly poprvé uveřejněny v roce 1921 (viz Blaschke [3], str. 45–50). V témže roce je v obecnější formě uveřejnil také A. SCHUR [1] a v roce 1922 shrnul Schwarzovy i Schurovy výsledky znovu W. Blaschke [2]. Jsou založeny na této lemmě: *Ze severního pólu jednot-*

[1]) Srv. jeho recensi od Z. Nádeníka v Čas. pro pěst. mat. *94* (1969), 487–489.

kové kulové plochy nechť vychází čára homogenní hustoty o délce $L < \pi$. Nechť ω je pólová vzdálenost jejího těžiště. Pak $\omega \leqq \frac{1}{2}L$ a rovnost nastává pouze tehdy, když čára je částí meridiánu.

Zvolme souřadnicovou soustavu tak, že počátek je ve středu koule a vektor (0, 0, 1) je průvodičem severního pólu a předokládejme, že hustota naší křivky je rovna 1. Pro pólovou vzdálenost jejího těžiště platí

$$(\mathrm{I},1) \qquad \operatorname{tg} \omega = \left[\left(\int_o^L x_1 \, \mathrm{d}s\right)^2 + \left(\int_o^L x_2 \, \mathrm{d}s\right)^2\right]^{1/2} : \int_o^L x_3 \, \mathrm{d}s \,,$$

kde x_1, x_2, x_3 jsou souřadnice běžného bodu křivky ($\mathrm{d}s$ ovšem diferenciál oblouku) a jmenovatel je kladný. Z Cauchyovy nerovnosti plyne, že čitatel není větší než $\int_O^L (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \, \mathrm{d}s$ a je roven tomuto integrálu jedině při $x_1 : x_2 =$ konst. Potom však uvažovaná čára splývá s meridiánem. Z (I,1) tedy vychází $\operatorname{tg} \omega \leqq \int_O^L \sin \varphi \, \mathrm{d}s : : \int_O^L \cos \varphi \, \mathrm{d}s$, kde φ je pólová vzdálenost bodu (x_1, x_2, x_3). Poněvadž $s \geqq \varphi$ s rovností jedině pro meridián, je i $\operatorname{tg} \omega \leqq \int_O^L \sin s \, \mathrm{d}s : \int_O^L \cos s \, \mathrm{d}s$ a tedy $\omega \leqq \frac{1}{2}L$ včetně výše uvedené podmínky pro rovnost.

Snadným důsledkem Schwarzovy lemmy je věta: *Nechť ω je velikost úhlu, který svírá čára $\mathscr{C}$ délky $L \leqq \pi$ o konstantní flexi* 1 *s přímočarou spojnicí krajních bodů čáry $\mathscr{C}$. Pak $\omega \leqq \frac{1}{2}L$ a rovnost nastává pouze tehdy, když čára $\mathscr{C}$ je obloukem jednotkové kružnice.*

Pozoruhodná je však zvláště následující Schwarzova věta: *Dva pevné body, jejichž vzdálenost $d < 2$, dělí jednotkovou kružnici na dva oblouky. Označíme-li délku menšího oblouku L_1, většího L_2, pak pro délku L každé prostorové čáry, která spojuje pevné body a má konstantní flexi* 1, *platí buď $L \leqq L_1$ nebo $L \geqq L_2$.*

Důkazy obou vět uvádí W. Blaschke ([3], str. 47–50). Jak již bylo uvedeno, v roce 1921 zobecnil A. Schur [1] (srv. také W. Blaschke [2], [3]) Schwarzovy nerovnosti na křivky s přirozenou rovnicí $r = r(s) > 0$, jejichž sférický obraz tečen má délku $L^* \leqq \frac{1}{2}\pi$; přitom poloměr flexe r může být považován za positivní hustotu. Zobecnění se tedy týká nehomogenních křivek.

Se Schwarzovými nerovnostmi souvisí také věta, která pochází od E. Schmidta [1]. *Jestliže prostorová křivka délky L, která spojuje dva body, jejichž vzdálenost je d, má sférický obraz tečen délky $L^* \leqq \pi$, potom $d \geqq L \cos \frac{1}{2}L^*$* (srv. také W. Blaschke [4], str. 27, odst. 9).

II.

G. Pólya a G. Szegö [1] (str. 165 a 391, úloha 13) uvádějí větu, která pochází od K. Löwnera: *Sférický obraz $\mathscr{C}^*$ tečen uzavřené, hladké a nikoliv rovinné čáry $\mathscr{C}$ z E_3 je protat každou hlavní kružnicí jednotkové kulové plochy.* Skutečně (viz W.

Fenchel [1], str. 239), je-li $\boldsymbol{x}(s)$ průvodič a s oblouk čáry $\mathscr{C}$²), je $\int_{\mathscr{C}} \boldsymbol{x}'(s)\, ds = \boldsymbol{o}$, a tedy pro libovolný pevný vektor $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{o}$ platí, že $\int_{\mathscr{C}} \boldsymbol{c} \,.\, \boldsymbol{x}'(s)\, ds = 0$. To však znamená, že buďto $\boldsymbol{c} \,.\, \boldsymbol{x}'(s) = 0$, což je evidentně možné jen pro rovinnou čáru, anebo skalární součin $\boldsymbol{c} \,.\, \boldsymbol{x}'(s)$ mění na čáře $\mathscr{C}$ znaménko. Vektory $\boldsymbol{x}'(s)$ umístěné do počátku leží tedy na různých stranách roviny ϱ, která prochází počátkem kolmo k vektoru $\boldsymbol{c}$, c.b.d.

Jiný velmi jednoduchý a geometricky názorný důkaz podal E. Salkowski (viz W. Fenchel [2], str. 183): Postupujeme-li po čáře $\mathscr{C}$ v okolí jejího bodu, který má od roviny ϱ největší (nejmenší) vzdálenost, směřuje tečný vektor před tímto bodem od roviny ϱ a za ním k rovině ϱ; stačí pak tuto vlastnost přenést na sférický obraz tečen.

Vlastnost sférického obrazu z Löwnerovy věty je možno vyslovit jiným způsobem (viz W. Fenchel [1], str. 239—240): *Sférický obraz tečen čáry $\mathscr{C}$ nelze umístit do žádné poloviny jednotkové kulové plochy*³), jak je bezprostředně patrné; nebo také: *Nejmenší konvexní obal sférického obrazu tečen čáry $\mathscr{C}$ obsahuje počátek jako vnitřní bod.* Kdyby totiž ležel mimo, či na povrchu, existovala by taková opěrná rovina obalu, že celý sférický obraz by ležel v jednom z uzavřených poloprostorů touto rovinou určených; to je však ve sporu s předcházejícími dvěma formulacemi.

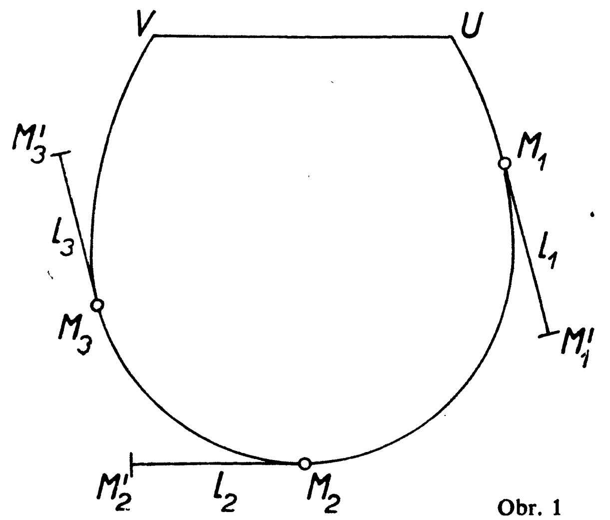
Obrácením Löwnerovy věty se postupně zabývali M. Fujiwara [1], W. Fenchel [2] a M. Ja. Vygodskij [1]. Na Vygodskiho článek reagoval pak v roce 1946 M. Krein [1]. Fujiwara a Fenchel vycházejí z této základní myšlenky: Dejme tomu, že počátek je zvolen v bodě $s = 0$ čáry $\mathscr{C}$ druhé třídy a nechť α znamená oblouk sférického obrazu tečen $\mathscr{C}^*$; pro první křivost čáry $\mathscr{C}$ položme $k(s) = r^{-1}(s) = d\alpha/ds = |\boldsymbol{x}''| \geqq 0$. Potom $\boldsymbol{x}(s) = \int_0^s \boldsymbol{x}'(s)\, ds = \int_0^\alpha \boldsymbol{x}'(\alpha)\, r(\alpha)\, d\alpha$ a tedy, v důsledku uzavřenosti čáry $\mathscr{C}$, platí $\int_{\mathscr{C}^*} \boldsymbol{x}'(\alpha)\, r(\alpha)\, d\alpha = \boldsymbol{o}$. A nyní obráceně: Podaří-li se opatřit body sférického obrazu tečen $\mathscr{C}^*$ positivní hmotou $r(\alpha)$ tak, že platí poslední rovnice — tj. že těžiště této hmotné křivky je počátek, je čára daná průvodičem $\int_0^\alpha \boldsymbol{x}'(\alpha)\, r(\alpha)\, d\alpha$ uzavřená, má poloměr křivosti $r(s)$ a její sférický obraz tečen je $\mathscr{C}^*$. W. Fenchel [2] konstruuje positivní funkci $r(\alpha)$ na základě jedné Steinitzovy věty a v závěru upozorňuje na nedostatky ve starší Fujiwarově práci [1] a přesně dokazuje toto obrácení Löwnerovy věty: *Je-li $\mathscr{C}^*$ taková uzavřená rektifikace schopná čára na jednotkové kulové ploše, že její nejmenší konvexní obal obsahuje počátek jako vnitřní bod, potom existuje hladká uzavřená čára $\mathscr{C}$ se sférickým obrazem tečen $\mathscr{C}^*$.*

M. Ja. Vygodskij [1], který necituje Fenchelovu práci [2], postupuje tak, že nejdříve dokáže Löwnerovu větu způsobem, který je blízký Salkowskiho myšlence: Kdyby $\mathscr{C}^*$ ležela uvnitř některé polokoule, musely by všechny tečny křivky $\mathscr{C}$ svírat s osou o takové polokoule ostré úhly, to znamená, že postupná projekce bodů křivky $\mathscr{C}$ na osu o by probíhala pouze v jednom směru, což u uzavřené křivky není možné. Má-li $\mathscr{C}^*$ některé body na hraniční kružnici příslušné polokoule, nemůže být evidentně

²) Toto označení v dalším stále zachováme a derivaci podle oblouku budeme značit čárkou.

³) Rozumí se taková polovina kulové plochy, která je ohraničena hlavní kružnicí; pro krátkost budeme mluvit i o „polokouli".

sférickým obrazem tečen uzavřené křivky $\mathscr{C}$, pokud $\mathscr{C}^*$ nesplývá s hlavní kružnicí. V tom případě jsou všechny tečny křivky $\mathscr{C}$ kolmé k ose o a $\mathscr{C}$ je libovolná uzavřená rovinná křivka. Fenchelovo obrácení dokazuje Vygodskij na základě této pomocné věty, jejíž důkaz je sice delší, ale názorný: Jestliže sférický obraz tečen $\mathscr{C}^*$ nelze umístit na žádné polokouli, potom k danému bodu B jednotkové kulové plochy existují vždy tři oblouky $\mathscr{C}_1^*, \mathscr{C}_2^*, \mathscr{C}_3^*$ křivky $\mathscr{C}^*$ tak, že bod B leží uvnitř nebo na hranici každého sférického trojúhelníka $T_1T_2T_3$, který vznikne tak, že $T_i \in \mathscr{C}_i^*$ $(i = 1, 2, 3)$. U křivky $\tilde{\mathscr{C}}$, která má sférický obraz tečen $\mathscr{C}^*$, nemusí obecně splývat počáteční bod U a koncový bod V. Z čáry $\tilde{\mathscr{C}}$ utvoříme čáru $\mathscr{C}$, která bude uzavřená. Umístíme vektor $\overrightarrow{VU}$ do středu jednotkové koule a průsečík jeho nositelky s kulovou plochou označíme B. Dále najdeme na $\mathscr{C}^*$ tři takové body T_1, T_2, T_3, aby bod B ležel uvnitř nebo na stranách sférického trojúhelníka $T_1T_2T_3$. Jest pak $\overrightarrow{VU} = \sum_1^3 l_i\overrightarrow{OT_i}$, kde $l_i \geqq 0$. Body křivky $\tilde{\mathscr{C}}$, v nichž jsou tečny určené vektory $\overrightarrow{OT_i}$, označíme M_i. V těchto bodech křivku $\tilde{\mathscr{C}}$ roztrhneme a ve směru vektorů $\overrightarrow{OT_i}$ připojíme k obloukům úsečky $M_iM_i' = l_i$ (obr. 1). Pokud žádný z bodů M_i nesplývá s body U, V (v opačném případě by úvaha zůstala správná, pouze počet oblouků by se změnil), dostaneme čtyři oblouky $\widehat{UM_1'}$, $\widehat{M_1M_2'}$, $\widehat{M_2M_3'}$, $\widehat{M_3V}$, které posuneme rovnoběžně tak, aby každý z bodů M_i splynul s bodem M_i'. Bod V splyne přitom s bodem U. Označíme-li totiž polohu bodu V po provedeném posunutí V', potom $\overrightarrow{VV'} = \sum_1^3 l_i\overrightarrow{OT_i} = \overrightarrow{VU}$. Popsaným způsobem utvořená křivka $\mathscr{C}$ je tedy uzavřená a sférickým obrazem jejích tečen je $\mathscr{C}^*$. Vygodskij dále ukazuje, že je možno sestrojit takovou křivku $\mathscr{C}$, jejíž flexe i torse budou spojitými funkcemi spolu se svými derivacemi až do libovolného řádu a podává analytický popis takové čáry.

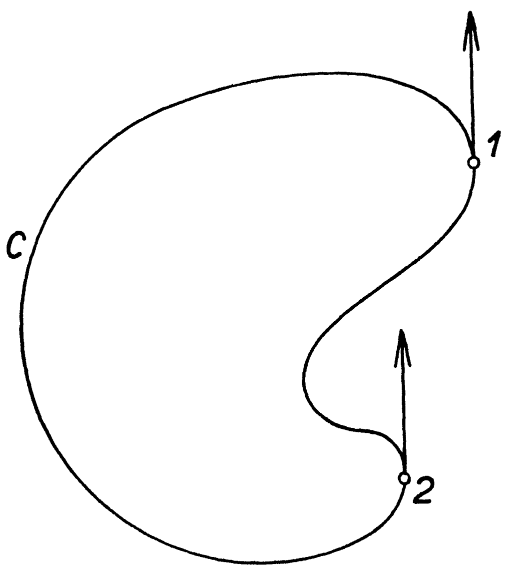


Obr. 1

Zcela elementární modifikaci Löwnerovy věty a jejího obrácení uvedl Z. NÁDENÍK [1], který ji pak užil k odvození velmi jednoduchých podmínek, za nichž ke směrům $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ existuje mnohoúhelník $A_1A_2 \ldots A_n$ tak, že $\sigma_1 \parallel A_1A_2$, $\sigma_2 \parallel A_2A_3, \ldots$ $\ldots, \sigma_n \parallel A_nA_1$, anebo za nichž má soustava lineárních rovnic striktně positivní řešení (srv. práce citované v Nádeníkově článku pod [2], [4] až [6], [8]); obě otázky spolu velmi úzce souvisí.

Velmi významná je Fenchelova práce [1] z roku 1929, v níž jsou dokázány dvě věty o flexi a torsi prostorové uzavřené čáry v E_3. Věta o torsi, která zatím vzbudila v literatuře poměrně malou pozornost, zní takto: *Má-li sférický obraz tečen uzavřené prostorové křivky třetí třídy a bez inflexních bodů nejvýše jeden dvojný bod, musí torse měnit znaménko, pokud identicky nevymizí.*

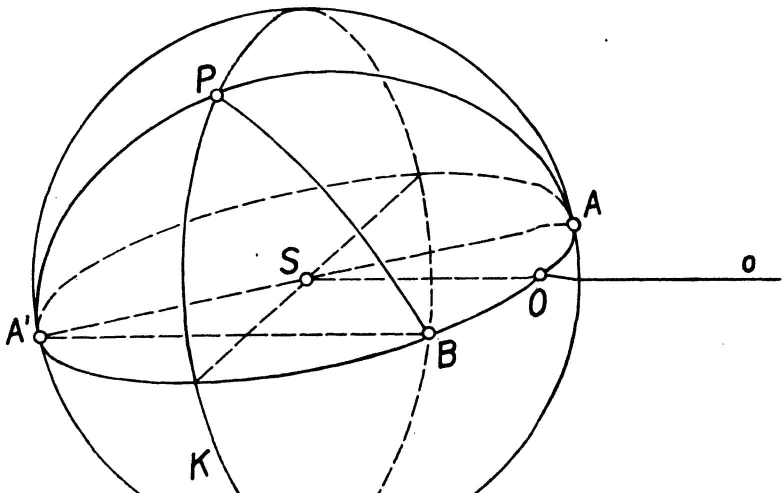
Fenchelovu větu o flexi se pokusíme nejdříve motivovat. Délka sférického obrazu tečen rovinné konvexní čáry $\mathscr{C}$ je zřejmě 2π. Není-li však čára $\mathscr{C}$ konvexní (obr. 2), potom sférický obraz tečen konvexního – tj. většího oblouku mezi body 1, 2 – má sám délku 2π a proto délka sférického obrazu tečen celé čáry $\mathscr{C}$ je větší než 2π.



Obr. 2

Uvažme, že délka sférického obrazu tečen $\mathscr{C}^*$ je $\int_{\mathscr{C}^*} d\alpha = \int_{\mathscr{C}} k(s)\, ds$; poslednímu integrálu se říká totální křivost čáry $\mathscr{C}$. V případě rovinné čáry $\mathscr{C}$ jsme ukázali, že $\int_{\mathscr{C}} k(s)\, ds \geqq 2\pi$, přičemž rovnost je charakteristická pouze pro konvexní křivky. Fenchelova věta o flexi říká, že uvedená nerovnost má širší platnost: *Totální křivost uzavřené prostorové křivky druhé třídy je větší nebo rovna 2π a znamení rovnosti platí jen pro rovinné konvexní křivky.* S ohledem na Löwnerovo tvrzení lze nahlédnout, že Fenchelova nerovnost je důsledkem věty: *Jestliže nejmenší konvexní obal* *uzavřené, rektifikace schopné a nikoliv rovinné křivky na jednotkové kulové ploše obsahuje počátek jako vnitřní bod, potom délka takové čáry je* $> 2\pi$. W. Fenchel uvádí dva důkazy této věty; jeden vlastní a kratší, druhý od E. Schmidta.

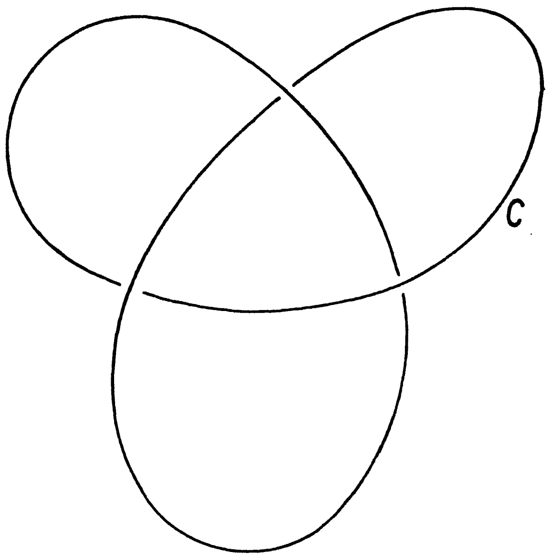
Na Fenchelovu nerovnost reagoval bezprostředně v roce 1929 H. LIEBMANN [1], jehož důkaz zde uvedeme: Podle Löwnerovy věty má sférický obraz $\mathscr{C}^*$ tečen uzavřené prostorové křivky $\mathscr{C}$ tu vlastnost, že jej protíná každá hlavní kružnice jednotkové koule. Zvolme na $\mathscr{C}^*$ libovolnou dvojici bodů A, B, která dělí $\mathscr{C}^*$ na dvě části (AB), (BA) stejné délky $\frac{1}{2}L$. Spojme dále body A, B obloukem hlavní kružnice, jehož délka $\leqq \pi$. Je-li $AB = \pi$, potom nutně $L \geqq 2\pi$, přičemž znamení rovnosti platí pouze tehdy, skládá-li se $\mathscr{C}^*$ ze dvou hlavních polokružnic. Ty však musejí tvořit jedinou hlavní kružnici vzhledem k Löwnerově větě. Křivka $\mathscr{C}$ je pak rovinná. V případě $AB < \pi$ sestrojme nejprve hlavní kružnici $\mathscr{K}$, jejíž rovina je kolmá k přímce o, která spojuje střed koule se středem oblouku AB (obr. 3). Jeden z bodů, v němž $\mathscr{C}^*$ protíná hlavní kružnici $\mathscr{K}$, označme P. Ukážeme nejprve, že součet sférických vzdáleností bodů A, B, které leží na kouli souměrně podle přímky o, od libovolného bodu P na kružnici $\mathscr{K}$ je roven číslu π. Sestrojme bod A' souměrný k bodu A podle středu S jednotkové koule. Jelikož APA' je hlavní půlkružnice, platí $AP + PB = AP + PA' = \pi$. Fenchelova věta plyne pak bezprostředně z nerovnosti $\frac{1}{2}L = (AB) = (AP) + (PB) >$ $> AP + PB = \pi$.



Obr. 3

V roce 1934 dokázal Fenchelovu nerovnost B. SEGRE [1]; podobně jako on postupovali H. RUTISHAUSER a H. SAMUELSON [1] v roce 1948 (srv. W. Fenchel [3], str. 49–50). V témže roce K. BORSUK [1] rozšířil platnost Fenchelovy nerovnosti na křivky v prostoru libovolné dimense a v závěru své práce vyslovil otázku, *zda prosto-*

rová zauzlená křivka má totální křivost $\geqq 4\pi$. Pro definici zauzlené křivky je vhodné užít topologických pojmů: Dvě homeomorfní čáry $\mathscr{C}$ a $\mathscr{C}'$ se nazývají isotopické, jestliže existuje takový jednoparametrický systém čar $\mathscr{C}_\tau$, které závisí spojitě na $\tau \in \in \langle 0, 1 \rangle$, že $\mathscr{C}_\tau$ je homeomorfní s $\mathscr{C}$ a $\mathscr{C}_0 \equiv \mathscr{C}$ a $\mathscr{C}_1 \equiv \mathscr{C}'$. Je-li čára $\mathscr{C}$ homeomorfní, ne však isotopická s kružnicí, říká se jí zauzlená. Příklad zauzlené křivky je na obr. 4; přitom přerušený oblouk znamená, že probíhá pod nepřerušeným.



Obr. 4

Oprávněnost Borsukovy domněnky je snadno patrná. V prostoru dimense $n \geqq 4$ každá čára s kružnicí homeomorfní je s ní také isotopní, a proto má smysl mluvit o zauzlených čarách pouze v obyčejném prostoru; představíme-li si, že čára z našeho obr. 4 je stlačena do roviny, pak je délka jejího sférického obrazu tečen právě 4π.

Borsukovu otázku kladně zodpověděl I. Fáry [1] v roce 1949. Totální křivostí zauzlených čar se zabývali rovněž J. W. Milnor [1] a R. H. Fox [1] v následujícím roce[4]).

Nesporně zajímavý důkaz Fenchelovy nerovnosti pochází od K. Vosse [1] z roku 1955; je založen na větě: *Na každé uzavřené spojitě zakřivené ploše F v trojdimensionálním prostoru platí nerovnost* $\int_{K>0} K \, \mathrm{d}A \geqq 4\pi$ (K je Gaussova křivost a $\mathrm{d}A$ je element plochy F). Vossův postup spočívá v tom, že kolem uzavřené čáry $\mathscr{C}$ sestrojí kanálovou plochu a dokáže, že pro tuto plochu platí rovnost $\int_{K>0} K \, \mathrm{d}A = 2 \int_{\mathscr{C}} k \, \mathrm{d}s$. Odtud a z uvedené věty máme ihned Fenchelovu nerovnost. Na základě nerovnosti $\int_{K>0} K \, \mathrm{d}A \geqq 4\pi$ dokazuje K. Voss také Fáryho nerovnost pro zauzlené čáry. Zostře-

[4]) Srv. první z knih citovaných na začátku tohoto článku.

ní Fenchelovy nerovnosti pro obecné n podal S. SASAKI [1] v roce 1959. Ještě v roce 1965 uveřejnil A. AEPPLI [1] nový důkaz Fenchelovy nerovnosti v E_n. V této souvislosti je vhodné poznamenat, že Aeppliho i Fáryho důkaz, který je rovněž platný i v E_n, zahrnuje také čáry, jejichž tečna se mění spojitě s výjimkou konečného počtu bodů. Aeppliho práce je jakýmsi překlenutím celého období od Schwarzových vět z osmdesátých let minulého století až téměř k dnešku.

Znamenitý úvod do diferenciální geometrie prostorových uzavřených čar podává Fenchelova práce [3] z roku 1951; svým přístupem se zcela vymyká tomu pojetí lokální diferenciální geometrie čar, které v první kapitole svého klasického díla o diferenciální geometrii založil ještě na sklonku minulého století L. BIANCHI a které se v učebnicích diferenciální geometrie objevuje dodnes bez nejmenší zmínky o výsledcích globálního charakteru.

W. Fenchel předkládá v [3] zároveň některé problémy, které vycházejí jen z pojmů velmi jednoduchých, jejich řešení se však nezdá být snadné. Flexe a torse uzavřené čáry jsou samozřejmě periodické funkce, tuto vlastnost však mohou mít i čáry, které nejsou uzavřené, kupř. šroubovice. Jeden z Fenchelových problémů, jehož řešení bude nepochybně velmi obtížné, zní takto: *Jaké jsou nutné a postačující podmínky, aby dvě periodické funkce $k(s)$ a $t(s)$ s touž periodou l byly flexí a torsí uzavřené prostorové čáry?* Jednu nutnou podmínku nám dává ihned Fenchelova nerovnost; musí totiž platit: $\int_0^l k(s)\,\mathrm{d}s \geqq 2\pi$. W. SCHMEIDLER [1] zodpověděl problém analyticky pomocí maticového počtu a nekonečných řad. Geometrické řešení je však dodnes záležitostí zcela otevřenou. Je jistě zajímavé, že tentýž problém formuloval už v roce 1947 N. V. EFIMOV [1] spolu s dalšími třemi příbuznými otázkami.

W. Fenchel v citované práci [3] se též ptá, jakým podmínkám musí vyhovovat uzavřená křivka na jednotkové kulové ploše, aby mohla být sférickým obrazem tečen resp. hlavních normál resp. binormál uzavřené prostorové čáry a pak postupně tyto problémy diskutuje. O prvním z nich jsme už velmi podrobně jednali výše. Velmi stručně se zmíníme ještě o zbývajících dvou.

$\mathscr{C}_n^*$ označíme sférický obraz hlavních normál, $\mathscr{C}_b^*$ sférický obraz binormál uzavřené hladké křivky $\mathscr{C}$. Již v roce 1842 uveřejnil C. G. J. Jacobi [1] větu: *Jestliže $k(s) > 0$ a sférický obraz $\mathscr{C}_n^*$ hlavních normál uzavřené čáry $\mathscr{C}$ nemá násobné body, potom $\mathscr{C}_n^*$ dělí jednotkovou kulovou plochu na dvě plošně shodné části.* V případě rovinné křivky je tato věta evidentní. V roce 1934 věnoval W. Fenchel [4] Jacobiho větě samostatnou stať a v roce 1947 se k ní vrátil také W. SCHERRER [1].

Lineárním elementem na jednotkové kulové ploše rozumíme dvojici, která se skládá z bodu a orientované hlavní kružnice jdoucí tímto bodem. Sférickou polaritou pak nazýváme involutorní zobrazení všech lineárních elementů na sebe, v němž orientované hlavní kružnici odpovídá ten pól jednotkové kulové plochy, který leží po levé straně pozorovatele pohybujícího se na vnější straně kulové plochy po příslušné hlavní kružnici ve směru orientace. Každé sférické křivce, kterou chápeme jako množinu lineárních elementů, odpovídá pak jediná křivka, přičemž tato korespodence je involutorní. Snadno se nahlédne, že geodetické křivosti dvou čar, které jsou ve vztahu sférické polarity, mají v odpovídajících bodech vždy reciprokou hodnotu. Odtud plyne, že sférické obrazy tečen $\mathscr{C}^*$ a binormál $\mathscr{C}_b^*$ jsou ve vztahu sférické polarity. Fenchel na tomto základě formuluje *nutnou a postačující podmínku, aby uzavřená sférická křivka* $\mathscr{C}_b^*$ *byla sférickým obrazem binormál uzavřené hladké křivky: Každým bodem jednotkové kulové plochy lze vést ke křivce* $\mathscr{C}_b^*$ *tečnou hlavní kružnici.*

W. Fenchel dále ukazuje, že *neexistuje žádná kladná dolní mez pro tzv. totální torsi*, tj. $\int_{\mathscr{C}} |t(s)|\, \mathrm{d}s = \int_{\mathscr{C}^*_b} |\mathrm{d}\beta|$, kde β je oblouk sférického obrazu binormál $\mathscr{C}_b^*$. Zřejmě $\int_{\mathscr{C}} |t(s)|\, \mathrm{d}s$ znamená délku sférického obrazu binormál $\mathscr{C}_b^*$.

Další typy nerovností studovali I. Fáry [2], G. D. Chakerian [1], [2] a Ju. G. Rešetnjak [1]; kromě délky křivky a její totální křivosti v nich vystupuje i poloměr koule, do níž lze čáru umístit.

III.

Velmi originálně dokázal Fenchelovu nerovnost I. Fáry [1] v roce 1949 na základě velmi pěkné a překvapující věty: *Budiž σ libovolný směr a označme $\gamma(\mathscr{C})$ totální křivost čáry $\mathscr{C}$, $\gamma(\mathscr{C}_\sigma)$ totální křivost ortogonálního průmětu $\mathscr{C}_\sigma$ čáry $\mathscr{C}$ ve směru σ. Jestliže totální křivosti $\gamma(\mathscr{C}_\sigma)$ jsou shora ohraničeny, potom totální křivost čáry $\mathscr{C}$ je střední hodnota funkce $\gamma(\mathscr{C}_\sigma)$ na jednotkové kulové ploše Ω:*

$$\gamma(\mathscr{C}) = \frac{1}{4\pi} \int_\Omega \gamma(\mathscr{C}_\sigma)\, \mathrm{d}\Omega\,, \quad \sigma \in \Omega\,. \tag{III,1}$$

Fáryho důkaz aspoň v hlavních rysech naznačíme (je platný i v E_n). Nejprve si však ukážeme, jak jednoduše plyne Fenchelova nerovnost z Fáryho věty, která v podstatě redukuje prostorový problém na rovinný. Platí zajisté

$$\gamma(\mathscr{C}) = \frac{1}{4\pi} \int_\Omega \gamma(\mathscr{C}_\sigma)\, \mathrm{d}\Omega \geqq \frac{1}{4\pi} \int_\Omega 2\pi\, \mathrm{d}\Omega = 2\pi\,. \tag{III,2}$$

Připomeňme si nyní známou nám už skutečnost: „Je-li čára $\mathscr{C}$ rovinná, Fenchelova nerovnost je správná a znamení rovnosti charakterizuje konvexní rovinné křivky". Zbývá dokázat, že rovnost v relaci (III,2) nastává pouze v případě konvexní rovinné křivky.

Nechť tedy $\gamma(\mathscr{C}) = 2\pi$. Potom nutně pro každý směr σ je $\gamma(\mathscr{C}_\sigma) = 2\pi$, neboť kdyby pro nějaké σ bylo $\gamma(\mathscr{C}_\sigma) > 2\pi$, pak ze známých důvodů by muselo platit $\int_\Omega \gamma(\mathscr{C}_\sigma)\, \mathrm{d}\Omega > \int_\Omega 2\pi\, \mathrm{d}\Omega$ a podle (III,2) ve Fenchelově relaci by nastoupila ostrá nerovnost proti předpokladu o rovnosti. Tedy vskutku $\gamma(\mathscr{C}_\sigma) = 2\pi$, což, jak jsme výše uvedli, znamená, že rovinná křivka $\mathscr{C}_\sigma$ je konvexní, a to pro každý směr σ. Dejme tomu, že čára $\mathscr{C}$

není rovinná. Potom však existuje taková její oskulační rovina, že čára $\mathscr{C}$ leží po jejích různých stranách a průmět čáry $\mathscr{C}$ ve směru této roviny nemůže být konvexní křivka; tedy $\mathscr{C}$ je nutně rovinná čára. Poněvadž všechny její průměty jsou konvexní, je nutně i $\mathscr{C}$ konvexní, c.b.d.

Tím jsme ukázali, že Fenchelova nerovnost je bezprostředním důsledkem Fáryho věty, k jejímuž důkazu se nyní obrátíme. Důkaz rozdělíme na dvě části; přitom první část, v níž jde o jistou aproximaci, pouze naznačíme, druhou – mnohem zajímavější – provedeme podrobně.

Uvažujme polygon $\mathscr{P} = A_1A_2 \ldots A_n$ a označme α_i úhel vektorů $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ a $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$. Je-li náš polygon konvexní, jsou α_i právě jeho vnější úhly a platí známý vztah $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 2\pi$. Součtu $\sum\limits_{1}^{n} \alpha_i$ se říká „totální křivost polygonu"; označme ji $\gamma(\mathscr{P})$. Třeba způsobem známým z integrálního počtu pro rektifikaci čáry $\mathscr{C}$ sestrojme posloupnost polygonů

$$
\begin{aligned}
{}^1\mathscr{P} &= {}^1A_1{}^1A_2 \ldots {}^1A_n \\
{}^2\mathscr{P} &= {}^2A_1{}^2A_2 \ldots {}^2A_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

tak, aby jejich limitou byla čára $\mathscr{C}$. Potom $\lim\limits_{i\to\infty} \gamma({}^i\mathscr{P}) = \gamma(\mathscr{C})$. Uvedený výsledek nebudeme dokazovat. Všimněme si ještě, že použitá definice totální křivosti polygonu je zcela přirozená. Zvolme na čáře $\mathscr{C}$ dělící body $A_1, A_2, \ldots, A_n$ a oblouky mezi nimi označme $\overset{\frown}{A_1A_2} = s_1$, $\overset{\frown}{A_2A_3} = s_2, \ldots, \overset{\frown}{A_nA_1} = s_n$. Na oblouku $\overset{\frown}{A_1A_2}$ nechť v nějakém bodě křivost nabude hodnoty k_1 atd. Potom $\sum\limits_{1}^{n} k_is_i$ je vytvořující součet pro integrál $\int_{\mathscr{C}} k \, ds$. Položme $A_1A_2 = a_1$ atd. Použijeme-li „střední křivosti" α_i/a_i na straně polygonu, potom $\sum\limits_{1}^{n}(\alpha_i/a_i)\, a_i = \sum\limits_{1}^{n}\alpha_i$; tím je „totální křivost" polygonu dostatečně motivována.

Druhá část důkazu Fáryho věty je založena na této lemmě: *Nechť* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *jsou dva vektory a budiž* β *jejich úhel. Označme* β_σ *úhel vektorů, které jsou ortogonálními průměty vektorů* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *ve směru* σ. *Potom*

$$
\beta = \frac{1}{4\pi} \int_\Omega \beta_\sigma \, d\Omega \,, \quad \sigma \in \Omega \,, \tag{III,3}
$$

kde Ω je zase jednotková kulová plocha a σ její bod, určený směrem σ.

Důkaz uvedené lemmy odsuneme na závěr a ukážeme nejdříve, jak z ní plyne Fáryho věta. K uzavřené čáře $\mathscr{C}$ sestrojme posloupnost polygonů ${}^1\mathscr{P}, {}^2\mathscr{P}, \ldots$, které konvergují k čáře $\mathscr{C}$, a označme ${}^i\alpha_1, {}^i\alpha_2, \ldots$ ty úhly polygonu ${}^i\mathscr{P}$, jejichž součet dává jeho totální křivost: ${}^i\alpha_1 + {}^i\alpha_2 + \ldots = \gamma({}^i\mathscr{P})$. Poněvadž posloupnost $\{{}^i\mathscr{P}\}$ konverguje k $\mathscr{C}$, tedy jistě $\{{}^i\mathscr{P}_\sigma\}$ konverguje k $\mathscr{C}_\sigma$ a tudíž nejen $\lim_{i\to\infty} \gamma({}^i\mathscr{P}) = \gamma(\mathscr{C})$, ale také $\lim_{i\to\infty} \gamma({}^i\mathscr{P}_\sigma) = \gamma(\mathscr{C}_\sigma)$. Pokud je záměna integrace a limitního přechodu přípustná, dostaneme

$$\frac{1}{4\pi}\int_\Omega \gamma(\mathscr{C}_\sigma)\,\mathrm{d}\Omega = \frac{1}{4\pi}\int_\Omega \lim_{i\to\infty} \gamma({}^i\mathscr{P}_\sigma)\,\mathrm{d}\Omega = \frac{1}{4\pi}\lim_{i\to\infty}\int_\Omega \gamma({}^i\mathscr{P}_\sigma)\,\mathrm{d}\Omega =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\lim_{i\to\infty}\int_\Omega \{{}^i\alpha_{1\sigma} + {}^i\alpha_{2\sigma} + \ldots\}\,\mathrm{d}\Omega = \lim_{i\to\infty}\left\{\frac{1}{4\pi}\int_\Omega {}^i\alpha_{1\sigma}\,\mathrm{d}\Omega + \frac{1}{4\pi}\int_\Omega {}^i\alpha_{2\sigma}\,\mathrm{d}\Omega + \ldots\right\}.$$

Aplikace vztahu (III,3) na každý sčítanec z konečného součtu v poslední závorce vede ihned k Fáryho větě, v níž je jeden funkcionál vyjádřen jako střední hodnota jiného funkcionálu. Takových relací je v teorii konvexních útvarů velké množství.

Závěrem dokážeme Fáryho lemmu. Zvolme jinou dvojici vektorů $\bar{\boldsymbol{u}}$, $\bar{\boldsymbol{v}}$ tak, aby jejich úhel $\bar{\beta}$ byl roven úhlu β vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ a označme $\bar{\beta}_\sigma$ úhel, který je projekcí úhlu $\bar{\beta}$ ve směru σ. Všechny čtyři vektory si můžeme představit umístěny v počátku. Na jednotkové kulové ploše Ω s body σ máme pak definovány dvě funkce β_σ a $\bar{\beta}_\sigma$. Vhodným otočením můžeme identifikovat úhel vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ s úhlem vektorů $\bar{\boldsymbol{u}}, \bar{\boldsymbol{v}}$; v tom případě splynou i funkční hodnoty, $\beta_\sigma = \bar{\beta}_\sigma$ a potom $\int_\Omega \beta_\sigma\,\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \bar{\beta}_\sigma\,\mathrm{d}\Omega$. Uvážíme-li ještě, že otočení kolem počátku nemění plošný integrál po Ω, vidíme, že integrál ze vztahu (III,3) závisí jedině na úhlu β vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$, to znamená, že

$$\int_\Omega \beta_\sigma\,\mathrm{d}\Omega = f(\beta)\,, \tag{III,4}$$

kde f je jistá funkce. Zvolme nyní vektor $\boldsymbol{w}$ komplanární s vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ a označme β' úhel vektorů $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$; při vhodné volbě vektoru $\boldsymbol{w}$ bude mít úhel vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}$ velikost $\beta + \beta'$ ($\beta, \beta' \geqq 0$). Označme opět β'_σ úhel, který je průmětem úhlu β' ve směru σ; zřejmě úhel, který je průmětem úhlu $\beta + \beta'$ ve směru σ, má velikost $\beta_\sigma + \beta'_\sigma$. Máme pak

$$f(\beta + \beta') = \int_\Omega (\beta_\sigma + \beta'_\sigma)\,\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \beta_\sigma\,\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \beta'_\sigma\mathrm{d}\Omega = f(\beta) + f(\beta')\,.$$

Pro funkci $f(\beta)$ platí tedy funkcionální rovnice $f(\beta + \beta') = f(\beta) + f(\beta')$, jejíž řešení má, jak známo, tvar

$$f(\beta) = c\beta\,, \quad c = \text{konst.} \tag{III,5}$$

Zbývá určit konstantu c, což provedeme při speciální volbě vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$. Jestliže je zvolíme nesouhlasně rovnoběžné, pak $\beta = \pi$ a ovšem i $\beta_\sigma = \pi$ pro každý směr σ (s výjimkou směru vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$, což v důkaze nehraje roli). To znamená podle (III,4) a (III,5), že $\int_\Omega \pi\,\mathrm{d}\Omega = c\pi$, tudíž $c = 4\pi$. Dosadíme-li za konstantu c nejdříve do (III,5) a pak za $f(\beta)$ do (III,4), dostaneme vztah (III,3).

V relaci (III,1) z Fáryho věty vystupuje ovšem implicitně flexe, neboť γ znamená integrál první křivosti po uzavřené čáře. Podobný vztah, v němž však γ je nahrazeno integrálem druhé křivosti, odvodil J. W. Milnor [2]. Na obecné neregulární čáry – tedy i prostorové polygony – zobecnil Milnorův výsledek Ju. G. Rešetnjak [1]. V jeho práci je pozoruhodně využito definic, které zcela přirozeným způsobem přenášejí na lomené čáry (polygony) klasické invarianty – flexi a torsi – z teorie diferencovatelných prostorových křivek.

IV.

Pro rovinnou uzavřenou konvexní křivku, která má délku L a ohraničuje oblast o obsahu F, platí klasická isoperimetrická nerovnost

$$L^2 - 4\pi F \geqq 0\,, \tag{IV,1}$$

v níž znamením rovnosti je charakterizována kružnice. Historii této nerovnosti podává svěžím způsobem W. Blaschke [1]; poznamenejme pouze, že už J. Steiner ji domněle dokázal, že P. Dirichlet jej marně upozorňoval na nutnost existenčního důkazu a teprve K. Weierstrass téměř před sto lety jako první celou záležitost exaktně uzavřel. Dnes je známo mnoho různých důkazů. Omezení na konvexní křivky je přitom nepodstatné: Při přechodu od nekonvexní rovinné oblasti k jejímu konvexnímu obalu se totiž zvětší obsah a zmenší délka hranice. Výsledek můžeme formulovat tak, jak to udělali T. Bonnesen a W. Fenchel [1], str. 111: Mezi všemi uzavřenými rovinnými čarami dané délky má kružnice největší obsah konvexního obalu. Nabízí se přirozeně prostorová analogie: *Mezi všemi prostorovými uzavřenými čarami dané délky určit ty, jejichž konvexní obal má maximální objem.* O tomto problému říkají autoři doslova: „Wegen der komplizierten Abhängigkeit der konvexen Hülle von der Kurve scheint dieses Problem recht schwierig zu sein".[5])

V prostoru sudé dimense $2n$ se uzavřená křivka $\mathscr{C}$ nazývá konvexní, jestliže má s každou nadrovinou společných nejvýše $2n$ bodů. I. J. Schoenberg [1] v roce 1954 ukázal, že taková čára je rektifikace schopná a dokázal pro ni tuto větu: *Mezi délkou L a objemem V konvexního obalu konvexní uzavřené čáry v E_{2n} platí nerovnost*

$$L^{2n} \geqq (2\pi n)^n \,.\, n!\,(2n)!\,V\,, \tag{IV,2}$$

v níž rovnost platí jen pro čáry, které při vhodné volbě soustavy souřadné lze popsat rovnicemi tvaru

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos t\,, \quad x_3 = \tfrac{1}{2}\cos 2t\,, \quad \ldots, \quad x_{2n-1} = \frac{1}{n}\cos nt\,, \\ x_2 &= \sin t\,, \quad x_4 = \tfrac{1}{2}\sin 2t\,, \quad \ldots, \quad x_{2n} \;\;\; = \frac{1}{n}\sin nt\,, \end{aligned} \tag{IV,3}$$

kde $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

---

[5]) Konvexní obal prostorového oblouku studoval E. Egerváry: On the smallest convex cover of a simple arc of space-curve. Publ. Math. (Debrecen) *1* (1949), 65–70.

Je zbytečné zdůrazňovat, jak významnou úlohu sehrála klasická isoperimetrická nerovnost v teorii konvexních útvarů. Schoenbergův objev je jejím zobecněním do prostoru sudé dimense, které dvacet let před ním označili T. Bonnesen a W. Fenchel [1] za „vskutku těžké“.

V.

Extremální čáry Schoenbergovy nerovnosti jsou zvláštním případem křivek, které v prostoru sudé dimense $2n$ mají při vhodné volbě pravoúhlé soustavy souřadné parametrické rovnice

$$(\mathrm{V},1) \qquad x_{2i-1} = r_i \sin l_i\beta\,, \quad x_{2i} = r_i \cos l_i\beta \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Přitom r_i a l_i jsou positivní konstanty a $l_i \neq l_j$ pro $i \neq j$. Tyto čáry jsou velmi přirozeným zobecněním kružnice a budeme jim říkat nadkružnice. Čáry (V,1) jsou velmi speciální, a proto by se jejich studium mohlo zdát na první pohled překonanou záležitostí. Ale jen na první pohled, neboť opak je pravdou. Naznačíme, jak významné místo mají nadkružnice i v analýze a jak tato jejich úloha přirozeně souvisí s naší problematikou.

Speciálním uzavřeným nadkružnicím, které vyhovují podmínkám $r_i = 1$ a $l_i = i$, budeme říkat Carathéodoryovy. V jeho práci [1] z roku 1907 se totiž objevují ve velmi úzké souvislosti s harmonickými funkcemi. Citované pojednání vedlo k celé sérii úzce souvisejících prací O. Toeplitze [1], C. Carathéodoryho [2], C. Carathéodoryho a L. Fejéra [1] i E. Fischera [1], v nichž vystupuje do popředí nejenom sama Carathéodoryho nadkružnice, ale i její nejmenší konvexní obal. Ten podrobil velmi důkladnému studiu C. Carathéodory v práci [2] a analyticky jej charakterizoval rovněž O. Toeplitz (viz větu II s pozn.[6]) na str. 221 v citované práci C. Carathéodoryho a L. Fejéra). Abychom si učinili představu, jak je Carathéodoryho nadkružnice zařazena do analýzy, postačí jistě tato jeho věta: *Harmonická funkce* $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n \cos n\beta + b_n \sin n\beta)$ *je jedině pak při* $r < 1$ *regulární a positivní, jestliže pro každé* n *patří bod z* E_{2n} *o souřadnicích* $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$ *nejmenšímu konvexnímu obalu Carathéodoryovy nadkružnice.*

Nadkružnice s libovolnými konstantami r_i a l_i studoval ve čtyřrozměrném prostoru O. Borůvka [1], [2]. Jeho studium vychází ovšem ze zcela jiného hlediska. Nadkružnice jsou charakterizovány tím, že mají všechny křivosti konstantní. O. Borůvka odvodil řadu jejich vlastností, které jsou velmi analogické elementárním vlastnostem kružnice, a pak jich užil při studiu dvojrozměrných ploch, které mají všechny body parabolické; parabolickým se rozumí takový bod, jehož indikatrie normální křivosti (definované analogicky k případu plochy v E_3) jím prochází. Na tuto aplikaci nadkružnice v teorii ploch navázal později K. Svoboda.

Borůvkovy výsledky o nadkružnicích přenesl do prostoru libovolné sudé dimense M. SYPTÁK [1], [2]. Z našeho stanoviska je však zvláště pozoruhodná Syptákova práce [3] z roku 1956, v níž od nadkružnic a nadšroubovic v prostoru liché dimense (tzn. od čar, které mají všechny křivosti konstantní) přešel k čarám, které nazval obecnými nadkružnicemi (a obecnými nadšroubovicemi). Jsou to takové čáry, které mají všechny poměry křivostí konstantní. M. Sypták dokázal, že sférickým obrazem posledních normál jeho obecné nadkružnice je nadkružnice. Nalezl také několik nutných a postačujících podmínek, aby křivka byla obecnou nadkružnicí. K těmto podmínkám dospěl v souvislosti s axiálními rovinami nadkružnice, což jsou roviny určené osami x_{2i-1}, x_{2i} souřadnicové soustavy, v níž nadkružnice má rovnice (V,1).

O. Borůvka ani M. Sypták se o výše zmíněném významu Carathéodoryho nadkružnice nezmiňují. Poznamenejme ještě, že ačkoliv Carathéodoryho nadkružnice je uzavřená, jiné nadkružnice mohou být otevřené.

Uzavřené čáry $\mathscr{C}$ v prostoru sudé dimense E_{2n}, jejichž sférickým obrazem posledních normál je nadkružnice Γ, studoval v posledních letech Z. Nádeník [3]–[5], [7], [8]. V [3] definoval pro čáru $\mathscr{C}$ pomocí opěrné funkce (orientované vzdálenosti počátku od hyperoskulační nadroviny) jistý funkcionál F – analogii plochy omezené vejčitou křivkou v její rovině, a pro F a délku L čáry $\mathscr{C}$ na základě Wirtingerovy nerovnosti přenesené z kružnice na nadkružnici (srv. i Z. Nádeník [6]) odvodil *nerovnosti, které jsou prostorovými analogiemi klasické isoperimetrické nerovnosti pro rovinné čáry*

$$(V,2) \qquad L^2 - (.)\,F \geqq 0 \quad (\textit{resp. } \leqq 0) \textit{ pro n liché } (\textit{resp. sudé})\,;$$

konstanta (.) závisí jedině na nadkružnici Γ, jejíž projekce do axiálních rovin musí splňovat jisté podmínky o násobnosti. *Extremálními čarami nerovností* (V,2) *jsou nadkružnice.* Bylo možno zavést i analogii Minkowskiho smíšeného obsahu dvou konvexních rovinných oblastí a nerovnosti (V,2) zobecnit pro dvě čáry na nerovnosti Minkowskiho a Frobeniova typu.

Má-li nadkružnice Γ střed, je možno na křivce $\mathscr{C}$ definovat protější body; v nich jsou oskulační roviny rovnoběžné. Pokud Γ splňuje podobné podmínky jako výše, podařilo se Z. Nádeníkovi [4] pro čáru $\mathscr{C}$ mj. odvodit analogie Segreovy věty a jejích důsledků pro rovinné konvexní křivky. Typickým výsledkem jsou *nerovnosti pro čáru* $\mathscr{C}$

$$(V,3) \qquad s \leqq Hd \leqq \frac{2}{b} L \leqq HD \leqq S\,,$$

v nichž znamená b délku nadkružnice Γ a H jistou konstantu, d resp. D minimální resp. maximální vzdálenost protějších bodů a s resp. S minimální resp. maximální součet poloměrů poslední křivosti v protějších bodech.

Jak ukázal Z. Nádeník [5], jsou rovností v (V,3) charakterizovány čáry $\mathscr{C}$, pro něž vzdálenost hyperoskulačních nadrovin v protějších bodech je konstantní. Vlastnosti takových čar z nich vytvářejí velmi úzkou analogii vejčitých křivek konstantní šířky. Podrobněji v E_4 je studoval Z. Nádeník v [8].

Konvexní čáry $\mathscr{C}$, jejichž poslední normály mají za sférický obraz nadkružnici, vyšetřoval Z. Nádeník [7]. Pro ně současně platí „kvadratická“ nerovnost z (V,2) a „$2n$-dimensionální“ Schoenbergova nerovnost (IV,2).

Z. Nádeník se zabýval též takovými obálkami jednoparametrového systému konvexních válcových ploch, které jsou homoemorfní s torem. Situaci, kdy tyto válcové plochy degenerují v přímky, takže obálka přejde v uzavřenou (obecně porostorovou) čáru, studoval v [2]. Obecné uzavřené křivky – bez podmínek na křivosti – vyšetřovali L. Boček a Z. Nádeník [1] rovněž pomocí opěrné funkce; ukázalo se, že hlubší studium bude nadějné při konstantních poměrech křivostí, jak také dosvědčují Nádeníkovy práce z let 1966–68.

VI.

Závěrem připojíme ještě stručné zmínky o třech skupinách prací.

a) B. M. Čerdak [1], Ju. A. Volkov a N. S. Nevmeržickij [1] a I. Ja. Bakelman a A. L. Verner [1] studovali v letech 1965–67 podmínky, za nichž uzavřená prostorová křivka o oblouku $s \in \langle 0, \infty)$ s periodickou flexí a torsí leží celá v konečnu anebo ubíhá do nekonečna. Ačkoliv zde už máme co dělat s křivkami nekonečné délky, dotkli jsme se této problematiky jednak pro její zajímavost, jednak pro její jistou souvislost s Efimovovým-Fenchelovým problémem (srv. odd. II, str. 297); za zmínku také stojí, že v Čerdakově práci se znovu objevují nadkružnice.

b) Je dobře známo, že A. D. Alexandrov je tvůrcem nového směru v diferenciální geometrii, k němuž položil základ svou knihou z r. 1948 (Внутренная геометрия выпуклых поверхностей, Moskva 1948; Die innere Geometrie der konvexen Flächen, Berlin 1955). Na příbuzné myšlence – na aproximaci čáry polygony – založil i obecnou teorii křivek (nikoliv nutně regulárních v obvyklém smyslu diferenciální geometrie) v práci [1] z roku 1947. Na ni o deset let později navázal Ju. G. Rešetnjak [1] a zobecnil Fáryho větu (viz začátek odd. III) a analogickou relaci pro totální torsi odvozenou J. W. Milnorem [2] na obecné uzavřené čáry bez požadavku regularity.

c) Velmi zajímavé jsou prostorové analogie věty o čtyřech vrcholech: *Na (rovinné) vejčité čáře jsou alespoň čtyři body, v nichž její křivost má extrém.* [Neméně přitažlivé jsou její diskretní tvary. S. Bilinski [1] zjistil, že *v cyklické posloupnosti* $\alpha_2 - \alpha_1, \alpha_3 - \alpha_2, \ldots, \alpha_n - \alpha_{n-1}, \alpha_1 - \alpha_n$, *utvořené z úhlů* α_i *při vrcholech* A_i *rovnostranného konvexního n-úhelníka, jsou buďto všechna čísla rovna nule anebo jsou v ní alespoň čtyři znaménkové změny.* (Srv. Z. Nádeník [9].) K jinému tvaru dospěl A. D. Alexandrov [2], kap. VI, § 1; není sice tak elegantní jako Bilinskiho, ale lze z něj snadno odvodit větu o čtyřech vrcholech v klasickém výše citovaném

Mukhopadhyayově-Kneserově znění. Je-li totéž možné s Bilinskiho tvarem, je zatím neznámo. Prostorové protějšky pro věty Bilinskiho a Alexandrova dosud nebyly dokázány. Zdá se, že geometrie prostorových polygonů je odvětvím, které bez zvláštní delší přípravy by slibovalo řadu nových výsledků.]

Pro prostorové uzavřené čáry nalezl A. Moór [1], [2] invariant, který má podobnou vlastnost jako křivost vejčité čáry ve větě o čtyřech vrcholech. Moórův invariant je složitý; obsahuje dokonce libovolnou funkci, ale jistý integrál po uvažované čáře musí vymizet, což nemile snižuje eleganci věty. O mnohem užší analogii klasického znění věty o čtyřech vrcholech se stručně zmiňuje W. Blaschke ([4], § 24) a studuje ji též S. Šmakal v dosud nepublikované disertační práci.

Uzavřenou křivku n-té třídy v n-rozměrném prostoru označme jako ostře konvexní, jestliže každými jejími $n - 1$ body lze proložit nadrovinu (dimense $n - 1$), která už s křivkou nemá žádný další bod společný; připouštějí se také splývající body. M. Barner [1] v r. 1956 ukázal, že *na ostře konvexní křivce v n-rozměrném prostoru je alespoň $n + 1$ bodů se stacionárními oskulačními nadrovinami.* Pro $d = 3$ v poněkud jiném znění dokázal tuto větu už H. Mohrmann [1] téměř o čtyřicet let dříve; byla též známa i C. Carathéodorymu (srv. W. Blaschke [3], str. 21). Barnerovým zobecněním se velmi obšírně zabýval O. Haupt[6]).

Naznačíme úzkou souvislost mezi větou o čtyřech vrcholech a Mohrmannovou-Barnerovou větou. Bodu (x, y) z euklidovské roviny E_2 přiřadíme bod $(x^2 + y^2, x, y, 1)$ v projektivním prostoru P_3. Pak rovině $a_0(x^2 + y^2) + a_1x + a_2y + a_3 = 0$ z P_3 koresponduje v E_2 kružnice nebo přímka. Oskulační kružnici čáry v E_2 odpovídá oskulační rovina křivky v P_3 (vždy „tři" společné body) a vrcholu přísluší bod se stacionární oskulační rovinou („čtyři" společné body s oskulační kružnicí v E_2 a s oskulační rovinou v P_3). Ostře konvexní křivka z P_3 se zobrazí v čáru v E_2, jejímiž každými dvěma body jde kružnice nebo přímka, která už s čárou nemá žádný další bod společný. Tuto vlastnost má vejčitá čára v E_2, pro niž je tak věta a čtyřech vrcholech znovu dokázána (viz M. Barner [1]).

Literatura

A. Aeppli: [1] Fenchel's theorem as a consequence of Schur's. Amer. Math. Monthly *72* (1965), 283—285.

А. Д. Александров: [1] Теория кривых на основе приближения кривых ломаными. Успехи мат. наук *3* (1947), 182—184.

[2] Выпуклые многограники, Moskva 1950. (Konvexe Polyeder, Berlin 1958).

И. Я. Бакелман - А. Л. Вернер: [1] Расположение в пространстве кривых с периодическими кривизной и кручением. Учен. зап. Ленингр. гос. пед. ин. им. А. И. Герцена 302 (1967), 142—156.

M. Barner: [1] Über die Mindestanzahl stationären Schmiegebenen bei geschlossenen strengkonvexen Raumkurven. Math. Sem. Univ. Hamburg *20* (1956), 198—215.

[6]) Autor knihy citované na začátku článku.

S. Bilinski: [1] „Vierscheitelsatz" für konvexe gleichseitige Vielecke. Glasnik Mat.-Fiz. Astronom. 16 (1961), 195—201.

W. Blaschke: [1] Kreis und Kugel, Leipzig 1916, Berlin 1950. (Круг и шар, Moskva 1967).

[2] Ungleichheiten von H. A. Schwarz und A. Schur für Raumkurven mit vorgeschriebener Krümmung. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg *1* (1922), 49—53.

[3] Vorlesungen über Differentialgeometrie I, Berlin 1921, 1924, 1930, 1946.

[4] Einführung in die Differentialgeometrie, Berlin 1950. (Введение в дифференциальную геометрию, Moskva 1957).

L. Boček - Z. Nádeník: [1] Beitrag zur globalen Differentialgeometrie der Kurven im euklidischen Raum. Čas. pěst. mat. *90* (1965) 209—213.

K. Borsuk: [1] Sur la courbure totale des courbes fermées. Ann. Pol. Math. *20* (1948), 251—265.

O. Borůvka: [1] Sur les hypercirconférences et certaines surfaces paraboliques dans l'espace euclidien à quatre dimensions. C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A—B *193* (1931), 633—644.

[2] Sur les hypercirconférences et certaines surfaces paraboliques dans l'espace euclidien à quatre dimensions. Spisy přirod. fak. Masaryk. Univ. Brno *146* (1931).

T. Bonnesen - W. Fenchel: [1] Theorie der konvexen Körper, Berlin 1934, N. York (1949).

C. Carathéodory: [1] Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebeneWerte nicht annehmen. Math. Ann. *64* (1907), 95—115.

[2] Über den Variabil itätsbereichder Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen. Rend. Circ. Mat. Palermo *32* (1911), 193—217.

C. Carathéodory - L. Fejér: [1] Über den Zusammenhang der Extremen von harmonischen Funktionen ihren Koeffizinten und über den Picard-Landauschen Satz. Rend. Circ. Mat. Palermo *32* (1911), 218—239.

G. D. Chakerian: [1] An inequality for closed space curves. Pacific J. Math. *12* (1962) 53—57.

[2] On some geometric inequalities. Proc. Amer. Math. Soc. *15* (1964), 886—888.

Б. М. Чердак: [1] Ограниченность кривых, заданных своими кривизнами. Учен. зап. Ленингр. гос. пед. ин. им. А. И. Герцена *274* (1965), 202—212.

Н. В. Ефимов: [1] Некоторые задачи из теории пространственных кривых. Усп. мат. наук *2* (1947).

I. Fáry: [1] Sur la courbure totale d'une courbe gauche faisant un noed. Bull. Soc. Math. France *77* (1949), 128—138.

[2] Sur certains inéqualités géométriques. Acta Sci. Math. (Szeged) *12* (1950), 117—124.

W. Fenchel: [1] Über Krümmung und Windung geschlossener Raumkurven. Math. Ann. *101* (1929), 238—252.

[2] Geschlossene Raumkurven mit vorgeschriebenem Tangentenbild. Jahresb. Deutsch. Math. Verein. *39* (1930), 183—185.

[3]. On the differential geometry of closed space curves. Bull. Amer. Math. Soc. *57* (1951), 44—54.

[4] Über einen Jacobischen Satz der Kurventheorie, Tôhoku Math. J. *39* (1934), 95—97.

E. Fischer: [1] Über das Carathéodorysche Problem, Potenzreihen mit positivem reellen Teil betreffend. Rendiconti Circ. Mat. Palermo *32* (1911), 240—256.

R. H. Fox: [1] On the total curvature of some tame knots. Ann. of Math. *52* (1950), 258—260.

M. Fujiwara: [1] Über den kleinsten eine Kurve enthaltenden konvexen Körper. Science Reports of the Tôhoku Imperial University *4* (1915), 339—359.

C. G. J. Jacobi: [1] Über einige merkwürdige Curventheoreme. Astronom. Nachr. *20* (1842), 115—120; Gesammelte Werke, Berlin 1891, sv. 7, 34—39 .

M. Krein: [1] Sur un théorème de Vigodski. Rec. Math. (Mat. Sb.) N. S. *18* (1946), 447—450.

H. Liebmann: [1] Elementarer Beweis des Fenchelschen Satzes über die Krümmung geschlossener Raumkurven. Sitz. Ber. Preuss. Akad. Wiss. (1929), 292—293.

J. W. Milnor: [1] On the total curvature of knots. Ann. of Math. *52* (1950), 248—257.

[2] On the total curvatures of closed space curves. Scandinavica *1* (1953), 289—296.

H. Mohrmann: [1] Die Minimalzahl der stationären Ebenen eines räumlichen Ovals. Sitz Ber. kgl. Bayer. Akad. Wiss., Math.-Phys. Kl. 1917, 1—4.

A. Moór: [1] Erweiterung des Vierscheitelsatzes auf dreidimensionale Kurven. Duke Math. J. *18* (1951), 509—516.

[2] Über die Scheitel der zwei- und dreidimensionalen Kurven. Monatsh. Math. *56* (1952), 150—163.

Z. Nádeník: [1] O existenci mnohoúhelníka s předepsanými směry stran. Čas. pěst. mat. *88* (1963), 317—321.

[2] Über die geschlossenen Raumkurven. Čas. pěst. mat. *90* (1965), 214—219.

[3] Les inégalités isopérimetriques pour les courbes gauches. Czech. Math. J. *16* (*91*), (1966), 363—376.

[4] Sur les courbes fermées dont l'indicatrice sphérique des dernières normales est centrée. Czech. Math. J. *17* (*92*), (1967), 447—459.

[5] Les courbes gauches de largeur constante. Czech. Math. J. *17* (*92*), (1967), 540—549.

[6] Analogie du lemme de Wirtinger pour une hypercirconférence. Čas. pěst. mat. *92* (1967), 105—112.

[7] Sur les courbes convexes gauches. Czech. Math. J. *18* (*93*), (1968), 718—752.

[8] Les courbes de largeur constante dans l'espace à quatre dimensions. Čas. pěst. mat. *93* (1968), 134—140.

[9] Věta o čtyřech vrcholech. Matematika ve škole *16* (1965), 117—135 .

G. Pólya - G. Szegö: [1] Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis II, Berlin 1925.

Ю. Г. Решетняк: [1] Метод ортогональных проекций в теории кривых. Вестник Ленинград. Унив. *12* (1957), 22—26.

H. Rutishauser - H. Samuelson: [1] Sur le rayon d'une sphère dont la surface contient une courbe fermée. C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A—B *227* (1948), 755—757.

S. Sasaki: [1] On the total curvature of a closed curve. Japan J. Math. *29* (1959), 118—125.

M. B. Segre: [1] Sulla torsione integrale delle curve chiuse sghembe. Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. *3* (1947), 422—426.

W. Scherrer: [1] Über das Hauptnormalenbild einer Raumkurve, Comment. Math. Helv. *19* (1947), 115—133.

W. Schmeidler: [1] Notwendige und hinreichende Bedigungen dafür, dass eine Raumkurve geschossen ist. Arch. Math. *7* (1956), 384—385.

E. Schmidt: [1] Über das Extremum der Bogenlänge einer Raumkurve bei vorgeschriebenen Einschränkungen ihrer Krümmung. S. B. preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. Kl. *25* (1925), 485—490.

I. J. Schoenberg: [1] An isoperimetric inequality for closed curves convex in even-dimensional euclidean spaces. Acta Math. *91* (1954), 143—164.

A. Schur: [1] Über die Schwarzsche Extremaleigenschaft des Kreises unter den Kurven konstanter Krümmung. Math. Ann. *83* (1921), 143—148.

M. Sypták: [1] Sur les hypercirconférences et certaines surfaces paraboliques dans l'espace euclidiens à p dimensions. C. R. Acad. Sci. Paris sér. A—B *195* (1932), 298—299.

[2] Nadkružnice a nadšroubovice. Spisy přirod. fak. Masaryk. Univ. Brno *312* (1949).

[3] Obecné nadkružnice a obecné nadšroubovice. Acta Fac. Rerum Natur. Univ. Comenian. I (1956), 179—195.

O. Toeplitz: [1] Über die Fouriersche Entwicklung positiver Funktionen. Rendiconti Circ. Mat. Palermo *32* (1911), 191—192.

Ю. А. Волков - Н. С. Невмержицкий: [1] Признаки неограниченности кривых с периодическими кривизной и кручением. Вест. Ленингр. ун. (1967), № 13, 29—34.

М. Я. Выгодский: [1] О замкнутых линиях с заданной индикатрисой касательных. Мат. сб. *16* (*58*), 73—80.

K. Voss: [1] Eine Bemerkung über die Totalkrümmung geschlossener Raumkurven. Arch. Math. *6* (1955), 259—263.
K. Weierstrass: [1] Über eine die Raumkurven konstanter Krümmung betreffende, von Delaunay herrührende Aufgabe der Variationsrechnung. Werke III, Berlin 1903, 183—217.

Adresa autorů: Zbyněk Nádeník, Praha 2, Trojanova 13 (České vysoké učení technické), Stanislav Šmakal, Praha 3, G. Klimenta 4 (Vysoká škola ekonomická).

Zusammenfassung

ÜBER GEOMETRIE GESCHLOSSENER RAUMKURVEN IM GROSSEN

ZBYNĚK NÁDENÍK, STANISLAV ŠMAKAL, Praha

Im Artikel haben wir eine Übersicht der Geometrie im Grossen der geschlossenen Raumkurven angestrebt. Beiseite blieben die topologischen Eigenschaften, denen ganz das Buch von R. H. Crowell - R. F. Fox: Introduction to knot theory, Boston 1963 und teilweise auch das Werk von O. Haupt - H. Künneth: Geometrische Ordnungen, Berlin 1967 gewidmet ist. Von besonderer Bedeutung ist das differentialgeometrische Studium und die Integralungleichungen. Eine Kurve wird immer selbständig aufgefasst, d. h. nicht als ein Gebilde auf der Fläche; es wird also z. B. über Analogien der klassischen isoperimetrischen Ungleichung auf der Kugelfläche oder auf einer allgemeinen Fläche nicht berichtet.