Časopis pro pěstování matematiky

Bohdan Zelinka

Slabě homogenní grafy

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 95 (1970), No. 3, 248--251

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117695

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 95 (1970), Praha

SLABĚ HOMOGENNÍ GRAFY

BOHDAN ZELINKA, Liberec

(Došlo dne 17. června 1968)

Na konferenci o teorii grafů ve Smolenicích v červnu 1966 uvedli M. FIEDLER a V. KNICHAL problém zkoumat tak zvané homogenní grafy.

Homogenním grafem nazýváme pravidelný neorientovaný graf G, který má tuto vlastnost: buďtež u, v uzly grafu G a očíslujme libovolným způsobem hrany incidentní s u a hrany incidentní s v; pak existuje automorfismus φ grafu tak, že $\varphi(u) = v$ a obrazem i-té hrany incidentní s u (v našem očíslování) je i-tá hrana incidentní s v.

Zde se nebudeme zabývat přímo homogenními grafy, nýbrž poněkud širším pojmem slabě homogenního grafu.

Slabě homogenním grafem nazýváme neorientovaný graf G o množině uzlů U a množině hran H, který má tyto dvě vlastnosti:

(a) je-li $u \in U$, $v \in U$, pak existuje automorfismus φ grafu G takový, že $\varphi(u) = v$;

(b) je-li $u \in U$, $h_1 \in H$, $h_2 \in H$ a u je společný koncový uzel hran h_1 a h_2, pak existuje automorfismus ψ grafu G takový, že $\psi(u) = u$, $\psi(h_1) = h_2$.

Bezprostředně z definice plyne, že každý slabě homogenní graf je pravidelný a každý homogenní graf je slabě homogenní. Plyne z ní rovněž, že jsou-li h_1, h_2 hrany slabě homogenního grafu G a u_1, u_2 uzly incidentní po řadě s hranami h_1, h_2, existuje automorfismus grafu G, který převádí hranu h_1 v hranu h_2 a uzel u_1 v uzel u_2. Snadno bychom se rovněž přesvědčili, že nesouvislý graf je slabě homogenní právě tehdy, jestliže všechny jeho komponenty jsou navzájem isomorfní a každá z nich je slabě homogenním grafem. Omezíme se tedy v dalším pouze na souvislé grafy.

Jako příklad homogenního grafu uvedl M. Fiedler jednak libovolný úplný graf, jednak libovolnou kružnici. Dále lze uvést graf d-rozměrné krychle pro libovolné d — z toho vidíme, že existují homogenní grafy libovolného konečného stupně, neboť každý vrchol d-rozměrné krychle je incidentní právě s d hranami (jednorozměrnými). Zde si všimneme některých slabě homogenních grafů, které obecně nejsou homogenní.

Věta 1. *Buďtež n, k nesoudělná přirozená čísla, $k < n$, a nechť α je nejmenší přirozené číslo takové, že buď $k^\alpha \equiv 1 \pmod{n}$, nebo $k^\alpha \equiv -1 \pmod{n}$. Pak existuje slabě homogenní graf stupně 2α o n uzlech.*

Důkaz. Předpokládejme nejprve $k^\alpha \equiv 1 \pmod{n}$. Mějme n uzlů $u_0, \ldots, u_{n-1}$. Všechny dolní indexy v následujícím textu berme modulo n. Pro všechna $i = 0, \ldots, n - 1$ a všechna $\lambda = 0, \ldots, \alpha - 1$ spojme uzly u_i, u_{i+k^λ} hranou $h_i^{(\lambda)}$. Kromě takto sestrojených hran neobsahuje náš graf žádné další hrany. Všechny horní indexy budeme brát modulo α. Zřejmě pro každé pevné λ hrany $h_i^{(\lambda)}$ pro všechna i tvoří kružnici $K^{(\lambda)}$. Definujme nyní některé automorfismy grafu G. Automorfismus φ budiž definován tak, že $\varphi(u_j) = u_{j+1}$ pro všechna $j = 0, \ldots, n - 1$. Dále pro každé $i = 0, \ldots, n - 1$ definujme automorfismus ψ_i tak, že $\psi_i(u_j) = u_{i+k(j-i)}$ pro všechna $j = 0, \ldots, n - 1$ a konečně definujme ještě ϑ_i pro $i = 0, \ldots, n - 1$ tak, že $\vartheta_i(u_j) = u_{2i-j}$ pro $j = 0, \ldots, n - 1$. Dokážeme, že jde skutečně o automorfismy. Dvojice uzlů spojená hranou musí mít tvar $\{u_j, u_{j+k^\nu}\}$. Zobrazením φ přechází tato dvojice v dvojici $\{u_{j+1}, u_{j+1+k^\lambda}\}$, což je dvojice spojená hranou $h_{j+1}^{(\lambda)}$. Zobrazením ψ_i přechází v dvojici $\{u_{i+k(j-i)}, u_{i+k(j-i)+k^{\lambda+1}}\}$, což je dvojice spojená hranou $h_{i+k(j-i)}^{(\lambda+1)}$. Konečně zobrazením ϑ_i přechází dvojice $\{u_j, u_{j+k^\lambda}\}$ v dvojici $\{u_{2i-j}, u_{2i-j-k^\lambda}\}$, což je dvojice spojená hranou $h_{2i-j-k^\lambda}^{(\lambda)}$. Že jde o zobrazení vzájemně jednoznačná, je zřejmé.

Ověříme nyní, že jsou splněny podmínky (a) a (b). Jsou-li u_l, u_m uzly grafu G, pak existuje automorfismus φ^{m-l}, který převádí u_l v u_m. Mějme nyní uzel u_i a hrany h', h'' s ním incidentní. Je-li $h' = h_i^{(\lambda)}$, $h'' = h_i^{(\mu)}$, pak hranu h' převádí v h'' automorfismus $\psi_i^{\mu-\lambda}$. Je-li $h' = h_i^{(\lambda)}$, $h'' = h_{i-k^\mu}^{(\mu)}$, pak zřejmě $h'' = h_{i-k^\mu}^{(\mu)} = \vartheta_i(h_i^{(\mu)})$ a tedy h' převádí v h'' automorfismus $\vartheta_i\psi_i^{\mu-\lambda}$. Je-li $h' = h_{i-k^\lambda}^{(\lambda)}$, $h'' = h_i^{(\mu)}$, pak $h'' = \psi_i^{\mu-\lambda}\vartheta_i(h')$ a konečně je-li $h' = h_{i-k^\lambda}^{(\lambda)}$, $h'' = h_{i-k^\mu}^{(\mu)}$, pak hledaným automorfismem převádějícím h' v h'' je $\vartheta_i\psi_i^{\mu-\lambda}\vartheta_i$. Graf G je tedy slabě homogenní. S každým uzlem u_i je incidentních α hran $h_i^{(\lambda)}$ pro $\lambda = 0, \ldots, \alpha - 1$ a α hran $h_{i-k^\lambda}^{(\lambda)}$ rovněž pro $\lambda = 0, \ldots, \alpha - 1$. Dokážeme, že tyto hrany jsou všechny navzájem různé. Je-li $h_i^{(\lambda)} = h_i^{(\mu)}$, znamená to, že $k^\lambda \equiv k^\mu \pmod{n}$. Předpokládejme bez újmy na obecnosti, že $0 \leqq \lambda \leqq \mu \leqq \alpha - 1$. Číslo k a tedy i k^λ je nesoudělné s modulem n, tedy kongruenci můžeme tímto číslem dělit. Dostáváme $k^{\mu-\lambda} \equiv 1 \pmod{n}$. Je zřejmě $\mu - \lambda < \alpha$, tedy vzhledem k minimalitě čísla α musí být $\mu - \lambda = 0$ a tedy $\mu = \lambda$. Podobně dokážeme, že $h_{i-k^\lambda}^{(\lambda)} = h_{i-k^\mu}^{(\mu)}$ právě tehdy, je-li $\lambda = \mu$. Nechť nyní $h_i^{(\lambda)} = h_{i-k^\mu}^{(\mu)}$. Znamená to, že $u_{i+k^\lambda} = u_{i-k^\mu}$ a tedy $i + k^\lambda \equiv i - k^\mu \pmod{n}$. Po úpravě dostáváme $k^\lambda + k^\mu \equiv 0 \pmod{n}$. Předpokládejme opět $0 \leqq \lambda \leqq \mu \leqq \alpha - 1$. Vydělíme kongruenci číslem k^λ; dostáváme $1 + k^{\mu-\lambda} \equiv 0 \pmod{n}$ a tedy $k^{\mu-\lambda} \equiv -1 \pmod{n}$. Je opět $\mu - \lambda < \alpha$ a to je ovšem spor s tím, že α je nejmenší přirozené číslo takové, že $k^\alpha \equiv 1 \pmod{n}$ nebo $k^\alpha \equiv -1 \pmod{n}$. Analogicky bychom postupovali v případě $0 \leqq \mu \leqq \lambda \leqq \alpha - 1$. Tedy v případě $k^\alpha \equiv 1 \pmod{n}$ je graf G pravidelný stupně 2α.

Vezměme nyní případ $k^\alpha \equiv -1 \pmod{n}$. Umocněním této kongruence na druhou dostáváme $k^{2\alpha} \equiv 1 \pmod{n}$. Sestrojíme nyní graf G jako v předešlém případě, pouze místo α užíváme vždy 2α. Graf G má tedy hrany $h_i^{(\lambda)}$ pro $i = 0, \ldots, n - 1$ a $\lambda =$

$= 0, \ldots, 2\alpha - 1$. Přitom pro každé $i = 0, \ldots, n - 1$ a $0 \leqq \lambda \leqq \mu \leqq 2\alpha - 1$ (analogicky výše dokázanému) lze dokázat, že $h_i^{(\lambda)} = h_{i-k^\mu}^{(\mu)}$ právě tehdy, je-li $k^{\mu-\lambda} \equiv -1 \pmod{n}$, tedy $\mu - \lambda \equiv \alpha \pmod{2\alpha}$. Protože $0 \leqq \mu - \lambda \leqq 2\alpha - 1$, je $\mu - \lambda = \alpha$. To znamená, že pro každé $\lambda = 0, \ldots, \alpha - 1$ je $h_i^{(\lambda)} = h_{i-k^{\lambda+\alpha}}^{(\lambda+\alpha)}$ a $h_i^{(\lambda+\alpha)} = h_{i-k^{\lambda+\alpha}}^{(\lambda)}$. Tedy s uzlem u_i je incidentních právě 2α hran a G je stupně 2α.

Věta 2. *Graf $\breve{G}$ vzniklý z úplného grafu o sudém počtu uzlů větším než 2 vynecháním hran lineárního faktoru je slabě homogenní.*

Důkaz. Budiž G graf s uzly $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n$ $(n \geqq 2)$ a nechť jsou v něm spojeny hranami všechny dvojice uzlů s výjimkou dvojic $\{u_i, v_i\}$ pro $i = 1, \ldots, n$. Jde zřejmě o graf vzniklý z úplného grafu o sudém počtu uzlů vynecháním hran lineárního faktoru. Definujme nyní automorfismus φ tak, že $\varphi(u_j) = u_{j+1}$, $\varphi(v_j) = v_{j+1}$ (indexy se berou modulo n). Dále budiž ψ definováno tak, že pro $i = 1, \ldots, n - 2$ je $\psi(u_i) = u_{i+1}$, $\psi(v_i) = v_{i+1}$, dále $\psi(u_{n-1}) = u_1$, $\psi(v_{n-1}) = v_1$, $\psi(u_n) = u_n$, $\psi(v_n) = v_n$. Konečně definujme automorfismy ϑ_i pro $i = 1, \ldots, n$ tak, že $\vartheta_i(u_i) = v_i$, $\vartheta_i(v_i) = u_i$, $\vartheta_i(u_j) = u_j$, $\vartheta_i(v_j) = v_j$ pro $1 \leqq j \leqq n$, $j \neq i$. Že jde skutečně o automorfismy, je zřejmé. Dokážeme, že ke každým dvěma uzlům grafu G existuje automorfismus tohoto grafu převádějící jeden v druhý. Jsou-li tyto uzly u_i, u_j nebo v_i, v_j, pak tento automorfismus je φ^{j-i}. Jde-li o uzly u_i, v_j, pak příslušný automorfismus je $\varphi^{j-i}\vartheta_i$. Mějme nyní uzel u_i a dvě hrany s ním incidentní. Jde-li o hrany u_iu_j, u_iu_k $(1 \leqq j \leqq n,\ 1 \leqq k \leqq n,\ j \neq k)$, pak první z nich převádí v druhou v případě $j < i - 1 < k$ nebo $k < i - 1 < j$ automorfismus $\varphi^i\psi^{k-j-1}\varphi^{n-i}$, v ostatních případech automorfismus $\varphi^i\psi^{k-j}\varphi^{n-i}$. Jde-li o hrany u_iu_j, u_iv_k, pak příslušný automorfismus v případě $j < i - 1 < k$ nebo $k < i - 1 < j$ je $\varphi^i\psi^{k-j-1}\varphi^{n-i}\vartheta_j$, v ostatních případech $\varphi^i\psi^{k-j}\varphi^{n-i}\vartheta_j$. Konečně máme-li hrany u_iv_j, u_iv_k, jde v případě $j < i - 1 < k$ nebo $k < i - 1 < j$ o automorfismus $\vartheta_i\varphi^i\psi^{k-j-1}\varphi^{n-i}\vartheta_i$, v ostatních případech o automorfismus $\vartheta_i\varphi^i\psi^{k-j}\varphi^{n-i}\vartheta_i$. Analogicky bychom uvažovali, kdyby šlo o uzel v_i a dvě hrany s ním incidentní.

Závěrem poznamenejme, že slabě homogenní jsou rovněž tak zvané Platonovy grafy [1], to jest grafy pravidelných mnohostěnů. Přitom grafy čtyřstěnu, krychle a dvanáctistěnu jsou homogenní (důkaz je znám z geometrie), kdežto grafy osmistěnu a dvacetistěnu nikoliv. Z definice homogenního grafu lze totiž snadno dokázat, že homogenní graf obsahující trojúhelník je vždy úplným grafem.

Literatura

[1] *O Ore:* Theory of Graphs. Providence 1962.

Adresa autora: Liberec, Studentská 5 (Vysoká škola strojní a textilní).

Summary

WEAKLY HOMOGENEOUS GRAPHS

BOHDAN ZELINKA, Liberec

The concept of the weakly homogeneous graph is a generalization of the concept of the homogeneous graph used by M. Fiedler and V. Knichal. The weakly homogeneous graph is a regular non-directed graph $G(U,H)$ with the following two properties: (a) if $u \in U$, $v \in U$, then there exists an automorphism φ of the graph G such that $\varphi(u) = v$; (b) if $u \in U$, $h_1 \in H$, $h_2 \in H$ and u is the common end vertex of the edges h_1 and h_2, then there exists an automorphism ψ of the graph G such that $\psi(u) = u$, $\psi(h_1) = h_2$. The following two theorems are proved.

Theorem 1. *Let n, k be relatively prime positive integers, $k < n$, and let α be the least positive integer such that either $k^\alpha \equiv 1 \pmod{n}$ or $k^\alpha \equiv -1 \pmod{n}$. Then there exists a weakly homogeneous graph of the degree 2α with n vertices.*

Theorem 2. *The graph G created of a complete graph with an even number of vertices greater than two by omitting the edges of a linear factor is weakly homogeneous.*

At the end Author remarks that all graphs of regular polyhedra are weakly homogeneous and among them the graphs of the tetrahedron, of the cube and of the dodecahedron are homogeneous.