Časopis pro pěstování matematiky, roč. 95 (1970), Praha

O BAIREOVÝCH TŘÍDÁCH

LUDĚK ZAJÍČEK, Praha

(Došlo dne 4. června 1968)

V článku [1] je provedena jistá charakterizace omezených funkcí první Bairovy třídy definovaných na intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Podobně lze charakterizovat omezené funkce libovolné Bairovy třídy, což provedeme.

Zavedeme některá označení. Bairovy třídy Φ_α funkcí a Borelovské množiny zavádíme podle [2]. Říkáme, že f je α-měřitelná, jestliže $\{x, f(x) > y\}$ i $\{x, f(x) < y\}$ jsou aditivní třídy α pro všechny y. Užíváme toho, že $f \in \Phi_\alpha \Leftrightarrow f$ je β-měřitelná, kde $\beta = \alpha$, je-li α konečné, $\beta = \alpha + 1$, je-li α nekonečné. Je-li f funkce na $\langle 0, 1\rangle$, pak definujeme graf funkce f $G_f = \{[x, y], x \in \langle 0, 1\rangle, y = f(x)\}$ a $p(f) = \{[x, y], x \in \langle 0, 1\rangle, y < f(x)\}$ a podobně $n(f) = \{[x, y], x \in \langle 0, 1\rangle, y > f(x)\}$. Říkáme, že množina $U \subset \langle 0, 1\rangle \times E_1$ má vlastnost C, jestliže $\{y, [x, y] \in U\}$ je pro každé x omezeným otevřeným intervalem. Nechť $\{r_n\}$ značí množinu racionálních čísel uspořádanou v posloupnost.

Nejdříve dokážeme lemma.

Lemma. *Je-li $f(x)$ α-měřitelná, je $p(f)$ aditivní třídy α.*

Důkaz. Platí tyto ekvivalence: $(x_0, y_0) \in p(f) \Leftrightarrow \exists r_n, f(x_0) > r_n > y_0 \Leftrightarrow (x_0, y_0) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} [\{x, f(x) > r_n\} \times (-\infty, r_n)]$. Protože množiny $(-\infty, r_n)$ a $\{x, f(x) > r_n\}$ jsou aditivní třídy α, je i $p(f)$ aditivní třídy α.

Nyní již dokážeme hlavní větu.

Věta. *Nechť f je omezená funkce na $\langle 0, 1\rangle$, $\alpha > 0$. Pak $f \in \Phi_\alpha \Leftrightarrow G_f = \bigcap_{m=1}^{\infty} U_m$, kde U_m mají vlastnost C a jsou Borelovské aditivní třídy β, kde $\beta = \alpha - 1$, je-li α konečné, $\beta = \alpha$, je-li α nekonečné.*

Důkaz. 1. Nechť $f \in \Phi_\alpha$, $|f| \leqq M$. Pak existují funkce f_n, $f_n \to f$, $|f_n| \leqq M$, $f_n \in \Phi_{\xi_n}$, $\xi_n < \alpha$. Je tedy $f = \lim_{m\to\infty} \sup_{n=m,\ldots} f_n$, $f = \lim_{m\to\infty} \inf_{n=m,\ldots} f$. Zaveďme funkce $g_m = \sup_{n=m,\ldots} f_n = \lim_{l\to\infty} (\max_{k=0,\ldots,l} f_{m+k})$, $g'_m = \inf_{n=m,\ldots} f_n = \lim_{l\to\infty} (\min_{k=0,\ldots,l} f_{m+k})$. Dále položme $d_{ml} =$

$= \max_{k=0,\dots,l} f_{m+k} + 1/m, \quad d'_{ml} = \min_{k=0,\dots,l} f_{m+k} - 1/m, \quad t_m = g_m + 1/m, \quad t'_m = g'_m - 1/m.$
Funkce d_{ml}, d'_{ml} jsou zřejmě nižší než α-té třídy a platí: $d_{ml} \nearrow^{l} t_m$, $t_m \searrow f$, $d'_{ml} \searrow t'_m$, $t'_m \nearrow f$. Z toho, že $p(t_m) = \bigcup_{l=1}^{\infty} p(d_{ml})$ a použitím lemmatu snadno dostaneme, že $p(t_m)$ je aditivní třídy β (kde β je číslo z tvrzení). Stejné třídy jsou ovšem množiny $n(t'_m)$. Položíme-li $U_m = p(t_m) \cap n(t'_m)$, mají U_m žádané vlastnosti.

2. Nechť $G_f = \bigcap_{m=1}^{\infty} U_m$, kde U_m mají vlastnosti z tvrzení. Pak platí vztahy $x_0 \in \in \{x, f(x) \geqq c\} \Leftrightarrow \forall_m \exists_y ([x_0, y] \in U_m,\ y > c) \Leftrightarrow \forall_m \exists_s (r_s > c, [x_0, r_s] \in U_m) \Leftrightarrow x_0 \in \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{s, r_s > c} \{x, [x, r_s] \in U_m\}$. Je tedy $\{x, f(x) \geqq c\}$ multiplikativní třídy $\beta + 1$. Protože do stejné třídy můžeme analogickou úvahou zařadit $\{x, f(x) \leqq c\}$, máme, že $f \in \Phi_\alpha$. Tím je důkaz proveden.

Poznámka při korektuře. Dodatečně bylo zjištěno, že v článku J. Ceder, M. Weiss: *Some approximation theorems for Baire functions and Darboux functions*, Revue Roum. de math. pur. et appl. *12*, 1967, I, je jiným způsobem dokázána věta, která se jen nepatrně liší od zde dokázané věty.

Literatura

[1] *E. S. Thomas, Jr:* Some characterizations of functions of Baire class 1, PAMS, *17*, 1966, 456—461.

[2] *K. Kuratowski:* Topology, I. Warszawa 1966.

Adresa autora: Praha 8 - Karlín, Sokolovská 83 (Matematicko-fyzikální fakulta KU).

Summary

ON BAIRE CLASSES

LUDĚK ZAJÍČEK, Praha

The set $U \subset \langle 0, 1\rangle \times E_1$ is said to have property C when for all x the set $\{y, [x, y] \in U\}$ is an open bounded interval.

In the paper the following theorem is proved: *Let f be a bounded function defined on $\langle 0, 1\rangle$. Let α be an ordinal number. Then f is an element of Baire class α if and only if $G_f = \bigcap_{m=1}^{\infty} U_m$ where G_f is the graph of f and all U_m have property C and are of Borel class β where $\beta = \alpha - 1$ for finite α and $\beta = \alpha$ for infinite α.*