Časopis pro pěstování matematiky, roč. 95 (1970), Praha

DALŠÍ POZNÁMKY O NEKONEČNÝCH HRANOVĚ DISJUNKTNÍCH SYSTÉMECH CEST V GRAFU

BOHDAN ZELINKA, Liberec

(Došlo dne 14. března 1969)

Tato práce navazuje přímo na práce [5] a [6]. Tyto práce se zabývají Diracovou hypotézou ze symposia o teorii grafů ve Smolenicích roku 1963 (viz [1]):

Dva různé uzly a a b grafu jsou spojeny nekonečným počtem δ cest, z nichž každá má a a b jako koncové uzly a z nichž žádné dvě nemají společnou hranu. Vyplývá z toho, že a a b jsou spojeny δ cestami takovými, že každá z nich má a a b jako koncové uzly, žádné dvě z nich nemají společnou hranu a společné uzly kterýchkoliv dvou cest se vždy vyskytují v témž pořadí, jdeme-li podél obou těchto cest z a do b?

V [5] je dokázáno, že tato hypotéza neplatí pro $\delta = \aleph_0$. V [6] se uvádí, že je pravdivá pro regulární δ různá od $\aleph_0$ a pro $\delta = \aleph_0$ při zesíleném předpokladu – předpokládá se, že délky daných cest jsou menší než dané přirozené číslo. Zde dokážeme platnost hypotézy pro $\delta = \aleph_0$ za předpokladu zesíleného jiným způsobem a uvedeme rovněž jistou větu o nekonečných cestách.

V této práci se pod slovem graf míní neorientovaný graf bez smyček. Mluví-li se o podmnožině uspořádané množiny, rozumí se tím, že jde opět o uspořádanou množinu, jejíž uspořádání je indukováno uspořádáním původní množiny. Jednostranně nekonečným tahem v grafu se rozumí nekonečná posloupnost, jejíž liché (v pořadí) členy jsou uzly, sudé členy hrany grafu a sousední členy jsou v tomto grafu incidentní. Jestliže se žádné členy této posloupnosti neopakují, mluvíme o jednostranně nekonečné cestě.

Nejprve dokážeme dvě lemmata.

Lemma 1. *Budiž M nekonečná uspořádaná množina. Pak existuje podmnožina N množiny M, která při uspořádání indukovaném uspořádáním množiny M má ordinální typ buď ω_0 (typ přirozeně uspořádané množiny přirozených čísel), nebo ω_0^* (typ přirozeně uspořádané množiny celých záporných čísel).*

D ů k a z. Předpokládejme nejprve, že existuje podmnožina P množiny M, která nemá největší prvek. K množině P existuje konfinální dobře uspořádaná množina R (viz [2]). Množiny P a R jsou zřejmě nekonečné. Protože ω_0 je nejmenší nekonečné ordinální číslo, množina R obsahuje úsek N o ordinálním čísle ω_0.

Nyní předpokládejme, že každá podmnožina množiny M má největší prvek. Přejdeme-li k uspořádání inversnímu k danému uspořádání množiny M, má každá podmnožina množiny M v tomto uspořádání nejmenší prvek, tedy M v tomto uspořádání je dobře uspořádaná a obsahuje úsek N o ordinálním čísle ω_0. Přejdeme-li opět k původnímu uspořádání, má množina N ordinální typ ω_0^*.

Lemma 2. *Budiž T jednostranně nekonečný tah v grafu G, v němž počet výskytů libovolného uzlu je konečný. Pak existuje jednosměrně nekonečná cesta C v G tak, že všechny její uzly a hrany náleží do T a její počáteční uzel je rovněž počátečním uzlem tahu T.*

D ů k a z. Uzly tahu T buďtež po řadě $u_0, u_1, u_2, \ldots$ Definujme rekurentně posloupnost celých čísel $\{k_n\}_{n=0}^{\infty}$. Položme $k_0 = -1$. Je-li definováno k_{n-1} pro některé přirozené n, pak k_n je takové číslo, že $u_{k_{n-1}+1} = u_{k_n}$ a přitom pro všechna přirozená čísla $l > k_n$ je $u_l \neq u_{k_{n-1}+1}$. Protože počet výskytů každého uzlu je konečný, je k_n definováno pro každé n a sestrojená posloupnost je rostoucí (neboť $k_{n+1} \geqq k_n + 1 > k_n$). Hledaná cesta se skládá z uzlů k_n pro všechna $n \geqq 1$ a z hran $u_{k_n}u_{k_{n+1}}$.

Nyní dokážeme větu.

Věta 1. *Budiž G graf bez nekonečných cest. Jsou-li a, b dva uzly grafu G a existuje-li systém $\aleph_0$ cest z a do b takový, že žádné dvě cesty tohoto systému nemají společnou hranu, existuje systém $\aleph_0$ cest z a do b, z nichž žádné dvě nemají společnou hranu a společné uzly libovolných dvou cest se vyskytují v témž pořadí, jdeme-li od a do b po obou cestách.*

D ů k a z. Budiž G graf splňující předpoklad věty, budiž $\mathscr{C}$ příslušný systém cest. Obdobně jako v [6] budeme sestrojovat posloupnost systémů cest $\{\mathscr{S}_k\}$, posloupnost cest $\{D_k\}$ a posloupnost uspořádaných množin uzlů $\{M_k\}$. Položíme $\mathscr{S}_0 = \mathscr{C}$, $M_0 = \emptyset$. Další členy posloupností definujeme rekurentně. Mějme definován systém cest $\mathscr{S}_{l-1}$ a uspořádanou množinu uzlů M_{l-1} pro $l \geqq 1$. O systému $\mathscr{S}_{l-1}$ předpokládejme, že má mohutnost $\aleph_0$ (pro $\mathscr{S}_0$ to platí podle výše uvedeného). Vezmeme-li libovolné dvě cesty C, C' z $\mathscr{S}_{l-1}$, pak $K_C(C')$ bude značit množinu společných uzlů cest C a C' (s výjimkou a a b) uspořádanou podle toho, v jakém pořadí se vyskytují její prvky, jdeme-li po cestě C' z a do b. Předpokládejme, že pro každé dvě cesty C, C' z $\mathscr{S}_{l-1}$ je $K_C(C') \supset M_{l-1}$. (Jde o inklusi uspořádaných množin – pro M_0 to zřejmě platí.) Přitom je-li dána cesta C, počet navzájem různých množin $K_C(C')$ je zřejmě konečný. Poněvadž $\mathscr{S}_{l-1}$ je množina mohutnosti $\aleph_0$, existuje alespoň jedna uspořádaná množina $L \supset M_{l-1}$ taková, že $K_C(C') = L$ pro $\aleph_0$ různých cest C' z $\mathscr{S}_{l-1}$. Zvolme takovou cestu D_{l-1}, že existuje vlastní uspořádaná nadmnožina M_l množiny

M_{l-1} tak, že $K_{D_{l-1}}(C') = M_l$ pro $\aleph_0$ cest C' z $\mathscr{S}_{l-1}$ (pokud taková cesta existuje). Systém cest C' z $\mathscr{S}_{l-1}$, pro které $K_{D_{l-1}}(C') = M_l$, označíme $\mathscr{S}_l$. Neexistuje-li cesta D_{l-1}, která by splňovala podmínku, není M_l ani $\mathscr{S}_l$ definováno. Z definice vyplývá, že M_k (pokud je definována) je vlastní uspořádanou nadmnožinou množiny M_l a $\mathscr{S}_k$ je podsystémem $\mathscr{S}_l$ pro $k > l$. Vidíme také, že systém $\mathscr{S}_l$ takto sestrojený má opět mohutnost $\aleph_0$ a že $M_l \subset K_C(C')$ pro libovolné dvě cesty C, C' z $\mathscr{S}_l$, platí to tedy pro všechna l. Jsou zde nyní dvě možnosti – buď jsou posloupnosti $\{M_k\}$ a $\{\mathscr{S}_k\}$ konečné, nebo jsou nekonečné. V prvním případě postupujeme jako v [6]. Existuje přirozené číslo m takové, že k žádné cestě $C \in \mathscr{S}_m$ neexistuje $\aleph_0$ cest C' takových, že $K_C(C')$ je vlastní nadmnožinou množiny M_m. Je-li C cesta z $\mathscr{S}_m$, budiž $\mathscr{P}(C)$ systém cest C' z $\mathscr{S}_m$ takových, že $K_C(C')$ je vlastní nadmnožinou M_m. Sestrojíme nyní nekonečnou posloupnost cest $\{C_i\}$. Cesta C_0 je libovolně zvolená cesta z S_m. Máme-li sestrojeny cesty C_k pro $k < i$, zvolíme za C_i libovolnou cestu ze systému $\mathscr{S}_m \dot{-} \bigcup_{k=0}^{i-1} \mathscr{P}(C_k)$. Pokračujeme takto do nekonečna; lze totiž snadno nahlédnout, že $\bigcup_{k=0}^{i-1} P(C_k)$ je vždy konečné, tedy $\mathscr{S}_m \dot{-} \bigcup_{k=0}^{i-1} \mathscr{P}(C_k)$ je pro všechna přirozená i nejen neprázdné, ale dokonce nekonečné. Posloupnost $\{C_i\}$ je tedy nekonečná; přitom pro každé dvě cesty C_i, C_k z této posloupnosti je $K_{C_i}(C_k) = M_m$ a ovšem i $K_{C_k}(C_i) = M_m$. Tedy posloupnost $\{C_i\}$ je hledaným systémem cest.

Předpokládejme nyní, že posloupnosti $\{M_k\}$ a $\{S_k\}$ jsou nekonečné. Označme $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$. Budiž $x \prec y$ v M právě tehdy, je-li $x \prec y$ v některé z množin M_k. (Nastává-li toto v jedné z množin M_k, nastává to zřejmě ve všech ostatních, které obsahují x a y.) Množina M je zřejmě nekonečná. Podle lemmatu 1 existuje uspořádaná podmnožina R množiny M, jejíž ordinální typ je buď ω_0, nebo ω_0^*. Uvažujme nejprve první případ. Označme s_k největší z takových prvků, které patří do M_k a jsou menší než alespoň jeden prvek z R; protože M_k je konečná množina, existuje s_k pro každé k. Budiž S množina všech s_k, přičemž uspořádání množiny S je indukováno uspořádáním množiny M. Protože každý prvek množiny R patří do některé z množin M_k, je S konfinální s R a tedy rovněž ordinálního typu ω_0. Poněvadž pro $k < l$ je $M_k \subset M_l$ je také $s_k \leqq s_l$. Sestrojme nyní nekonečný tah T následujícím způsobem. Vezměme úsek C_1' cesty C_1 z a do s_1. Nyní najděme nejmenší přirozené číslo k_1 tak, že $s_{k_1} \succ s_1$ a vezměme úsek C_{k_1}' cesty C_{k_1} z s_1 do s_{k_1}. Pak najdeme opět nejmenší přirozené číslo k_2 tak, že $s_{k_2} \succ s_{k_1}$ a vezmeme úsek C_{k_2} cesty C_{k_2} z s_{k_1} do s_{k_2}. Analogicky pokračujeme dále. Získáme tak jednostranně nekonečný tah T. Mějme nyní uzel s_k a úsek T' tahu T z s_k do nekonečna. Úsek T' se skládá pouze z jistých úseků cest C_l pro $l > k$. Jdeme-li po kterékoliv z těchto cest od a do b, vyskytují se na ní uzly z M_k v pořadí souhlasném s uspořádáním M_k a tedy i s uspořádáním množiny M. V tahu T' se prochází každým ze zmíněných úseků tak, jako kdyby se procházelo příslušnou cestou z a do b. Předpokládejme, že se vyskytne v T' uzel t z M_k různý od počátečního uzlu tahu T. Podle výše uvedeného musí být $s_k \prec t$. Uzel t musí ležet na některém z úseků cest C_l, tedy existuje nějaké l tak, že $t \preceq s_l$. Máme tedy $s_k \prec t \preceq s_l$ a t je uzlem množiny M_k a je menší než jistý uzel z S. Přitom je větší než s_k, který je podle předpokladu největší z takovýchto uzlů. Tím dostáváme spor. Tudíž T' neobsahuje žádný uzel z M_k. Uzel z M_k se tedy může vyskytnout v tahu T pouze na určitém konečném úseku, tedy konečně mnohokrát. Protože to platí pro každé k, je počet výskytů kteréhokoliv uzlu z M v tahu T konečný. Předpokládejme nyní, že uzel x se vyskytuje v tahu T nejméně dvakrát. Pak musí být společným uzlem nejméně dvou úseků C'_l (pro přirozená l); na témže úseku se žádný uzel nemůže opakovat, neboť jde o úseky cest. Je tedy také společným uzlem nejméně dvou cest C_l a jako takový musí patřit do M. Tím jsme dokázali, že kterýkoliv uzel nepatřící do M se vyskytne v tahu T nejvýše jednou. Tah T je tedy jednostranně nekonečný tah, v němž počet výskytů každého uzlu je konečný. Existuje tedy podle lemmatu 2 nekonečná cesta v grafu G, což je spor s předpokladem věty. Případ, že posloupnost $\{M_k\}$ je nekonečná, je tedy vyloučen. V případě, že R má typ ω_0^*, postupujeme analogicky, pouze zaměníme uzly a a b a přejdeme k inversnímu uspořádání množiny M.

Je-li nyní G nekonečný graf, u jeho uzel, řekneme, že uzel u je oddělen v G od nekonečna množinou uzlů R právě tehdy, je-li R podmnožina množiny uzlů grafu G a v grafu G' vzniklém z G odstraněním uzlů množiny R a hran s nimi incidentních komponenta obsahující u neobsahuje nekonečnou cestu. (Tímto pojmem se zabývá práce [3].) Je-li každý uzel grafu G oddělen od nekonečna konečnou množinou uzlů, je také zřejmě každá konečná množina uzlů v grafu G oddělena od nekonečna konečnou množinou uzlů, přičemž daná množina a oddělující množina jsou disjunktní. (Oddělování množiny uzlů od nekonečna se definuje analogicky oddělování uzlu od nekonečna.)

Věta 2. *Budiž G nekonečný graf a nechť každý jeho uzel je oddělen od nekonečna konečnou množinou uzlů. Nechť v G existuje systém $\aleph_0$ jednostranně nekonečných hranově disjunktních cest o společném počátečním uzlu a. Pak existuje v G systém $\aleph_0$ jednostranně nekonečných hranově disjunktních cest o společném počátečním uzlu a tak, že společné uzly libovolných dvou cest tohoto systému se vyskytují v témž pořadí, jdeme-li po obou cestách od a do nekonečna.*

Důkaz. Daný systém cest označme $\mathscr{C}'$. Definujme nyní rekurentně nekonečnou posloupnost $\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ podgrafů grafu G a posloupnost $\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$ podmnožin množiny uzlů grafu G. Na počátku položíme $G_0 = G$, $R_0 = \{a\}$. Mějme nyní sestrojen graf G_{n-1} a množinu R_{n-1} pro některé přirozené číslo n. O grafu G_{n-1} předpokládejme, že obsahuje množinu R_{n-1} a zbytky všech cest z $\mathscr{C}'$. (Zbytkem jednostranně nekonečné cesty nazýváme podgraf této cesty, který je sám nekonečnou cestou.) Pro graf G_0 tento předpoklad zřejmě platí. Označme nyní R_n konečnou množinu uzlů grafu G_{n-1} disjunktní s R_{n-1}, která odděluje R_{n-1} od nekonečna v grafu G_{n-1}. Odstraňme nyní množinu R_n z grafu G_{n-1}. Získáme graf, jehož žádná komponenta obsahující uzly z R_{n-1} neobsahuje nekonečnou cestu. Vezměme nyní všechny komponenty získaného grafu, které obsahují nekonečné cesty, dále množinu uzlů R_n a všechny hrany spojující uzly z R_n s uzly těchto komponent. Získaný graf označme G_n. Tento graf zřejmě obsahuje zbytky všech cest $\mathscr{C}'$ a množinu R_n. V tomto postupu lze pokračovat do nekonečna. Nyní opět sestrojujeme nekonečnou posloupnost grafů $\{\tilde{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ a nekonečnou posloupnost systémů konečných cest $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$. Graf $\tilde{G}_1$ sestává z té komponenty grafu vzniklého z G_0 odstraněním množiny R_1, která obsahuje uzel a, dále z množiny R_1 a hran spojujících uzly z R_1 s uzly zmíněné komponenty, a konečně z uzlu w_1 nepatřícího do G, který je spojen s každým uzlem x z R_1 tolika hranami, kolik cest z $\mathscr{C}'$ v G prochází uzlem x. Graf G_1 zřejmě neobsahuje nekonečné cesty a existuje v něm nekonečný hranově disjunktní systém cest $\mathscr{C}'_1$ z a do w_1 (jsou to příslušné úseky cest z $\mathscr{C}'$ mezi a a uzly z R_1 s přidanými hranami z R_1 do w_1). Proto podle věty 1 existuje systém $\hat{\mathscr{C}}_1$ cest z a do w_1 v $\tilde{G}_1$ takový, že žádné dvě z těchto cest nemají společnou hranu a u každých dvou z nich se vyskytují společné uzly těchto cest v témž pořadí, jdeme-li podél obou od a do w_1. Odstraněním uzlu w_1 a hran s ním incidentních dostáváme z cest systému $\hat{\mathscr{C}}_1$ cesty systému $\mathscr{C}_1^{(1)}$ které spojují a s uzly množiny R_1 a mají rovněž požadovanou vlastnost. Předpokládejme nyní, že máme sestrojen graf $\tilde{G}_{n-1}$ a systém cest $\mathscr{C}_{n-1}^{(1)}$ pro nějaké přirozené n. Graf $\tilde{G}_n$ se bude skládat ze všech komponent grafu vzniklého z G_{n-1} odstraněním množiny R_n, které obsahují uzly z R_{n-1}; dále se bude skládat z množin R_{n-1} a R_n a hran spojujících uzly těchto množin s uzly zmíněných komponent a konečně z uzlů v_n, w_n nepatřících do G, přičemž uzel v_1 je spojen s každým uzlem x množiny R_{n-1} tolika hranami, kolik cest systému $\mathscr{C}_n^{(1)}$ má koncový uzel x, a uzel w_n je spojen s každým uzlem $y \in R_n$ tolika hranami, kolik cest systému $\mathscr{C}'$ prochází uzlem y. Podobně jako v $\tilde{G}_1$ sestrojíme i v $\tilde{G}_n$ systém $\hat{\mathscr{C}}_n$ cest z v_n do w_n splňujících tvrzení Diracovy hypotézy. Odstraněním uzlů v_n a w_n z $\tilde{G}_n$ vznikne ze systému cest $\hat{\mathscr{C}}_n$ systém $\mathscr{C}_n^{(1)}$. Takto sestrojíme systémy $\mathscr{C}_n^{(1)}$ pro všechna přirozená n. Množinu koncových uzlů cest z $\mathscr{C}_n^{(1)}$ ležících v R_n označíme $R_n^{(1)}$ a položíme $R_0^{(1)} = \{a\}$. Budiž nyní $\prec^{(1)}$ uspořádání množiny $\bigcup_{n=0}^{\infty} R_n^{(1)}$ definované následujícím způsobem. Je-li $x \in R_n^{(1)}$, $y \in R_{n+1}^{(1)}$ pro některé celé nezáporné n, je $x \prec^{(1)} y$ právě tehdy, existuje-li cesta z $\mathscr{C}_n^{(1)}$ spojující x a y. Je-li $x \in R_m^{(1)}$, $y \in R_n^{(1)}$, $n - m \geqq 2$, pak $x \prec^{(1)} y$ právě tehdy, existují-li prvky $z_1, z_2, \ldots, z_{n-m+1}$ tak, že $z_1 = x$, $z_{n-m+1} = y$, $z_i \in R_{m+i-1}^{(1)}$ a $z_i \prec^{(1)} z_{i+1}$ pro $i = 1, \ldots, n - m$. Je-li $x \in R_m^{(1)}$, $y \in R_n^{(1)}$, $m \geqq n$, pak $x \prec^{(1)} y$ nemůže nastat. Zřejmě $R_n^{(1)}$ je konečné pro každé n a ke každému $y \in R_{n+1}^{(1)}$ existuje $x \in R_n^{(1)}$ tak, že $x \prec^{(1)} y$ (pro libovolné celé nezáporné n). Jsou tedy splněny předpoklady Königova lemmatu (Unendlichkeitslemma) z [4], kap. 13. Podle zmíněného lemmatu existuje nekonečný řetězec $z_0, z_1, z_2, \ldots$ tak, že $z_n \in R_n^{(1)}$ a $z_n \prec^{(1)} z_{n+1}$ pro každé celé nezáporné n. Označme $C_n^{(1)}$ cestu z $\mathscr{C}_{n+1}$ spojující z_n a z_{n+1}. Sjednocení všech cest $C_n^{(1)}$ je zřejmě jednostranně nekonečná cesta $C^{(1)}$ počínající v a. Nyní budeme opět definovat pro každé přirozené k rekurentně jednostranně nekonečné cesty $C^{(k)}$, konečné cesty $C_n^{(k)}$ (pro libovolné n), systémy konečných cest $\mathscr{C}_n^{(k)}$ a množiny uzlů $R_n^{(k)}$. Cestu $C^{(1)}$ a systém $\mathscr{C}^{(1)}$ máme sestrojeny. Předpokládejme nyní, že máme sestrojenu jednostranně nekonečnou cestu $C^{(k-1)}$, konečné cesty $C_n^{(k-1)}$ pro každé n a systém $\mathscr{C}^{(k-1)}$ pro některé přirozené číslo $k \geqq 2$. Položme $\mathscr{C}_n^{(k)} = \mathscr{C}_n^{(k-1)} \dot{-} \{C_n^{(k-1)}\}$ a $R_n^{(k)}$ budiž množina všech koncových uzlů cest z $\mathscr{C}_n^{(k-1)}$ obsažených v R_n. Definujme uspořádání $\prec^{(k)}$ analogicky jako $\prec^{(1)}$, pouze místo $R_n^{(1)}, R_{n+1}^{(1)}, R_m^{(1)}$ budeme klást po řadě $R_n^{(k)}, R_{n+1}^{(k)}, R_m^{(k)}$ a místo $\mathscr{C}_n^{(1)}$ budeme klást $\mathscr{C}_n^{(k)}$. Podle Königova lemmatu opět lze sestrojit konečné cesty $C_n^{(k)}$ a jednostranně nekonečnou cestu $C^{(k)}$ počínající v a. Takto postupujeme do nekonečna. Protože grafy $\tilde{G}_n$ jsou po dvou hranově disjunktní, je $\mathscr{C} = \{C^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ hledaný systém cest.

Literatura

[1] Problem No 6. Theory of Graphs and Its Applications, Proceedings of the Symposium held in Smolenice in June 1963. Praha 1964.

[2] *E. Čech:* Topologické prostory. Praha 1959.

[3] *R. Halin:* Über trennende Eckenmengen in Graphen und den Mengerschen Satz. Math. Ann. *157* (1964), 34–41.

[4] *D. König:* Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig 1936.

[5] *B. Zelinka:* Poznámka o nekonečných hranově disjunktních systémech cest v grafu. Čas. pěst. mat. *92* (1967), 289–293.

[6] *B. Zelinka:* Nespočetné systémy hranově disjunktních cest v grafu. Čas. pěst. mat. *93* (1968), 251–255.

Adresa autora: Liberec, Studentská 5 (Vysoká škola strojní a textilní).

Summary

FURTHER REMARKS ON INFINITE EDGE-DISJOINT SYSTEMS OF PATHS IN A GRAPH

BOHDAN ZELINKA, Liberec

The paper contains further contributions to the conjecture of Dirac concerning infinite systems of edge-disjoint paths joining two given vertices of a graph. The following theorems are proved.

Theorem 1. *Let G be a graph without infinite paths, let a, b be two of its vertices. Let the vertices a, b be joined by $\aleph_0$ pairwise edge-disjoint paths. Then a and b are joined by a system of $\aleph_0$ pairwise edge-disjoint paths such that the common vertices of any two of these paths occur in the same order passing along both of them from a to b.*

Theorem 2. *Let G be an infinite graph and let any of its vertices be separated from the infinity by a finite vertex set. Let there exist a system of $\aleph_0$ one-way infinite pairwise disjoint elementary paths with a common initial vertex a in G. Then in G there exists a system of $\aleph_0$ one-way infinite pairwise disjoint elementary paths with the common initial vertex a such that the common vertices of any two of these paths occur in the same order passing along both of them from a to infinity.*