Časopis pro pěstování matematiky

Vladimír Mahel

Zajímavá grupa transformací

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 95 (1970), No. 1, 76--85

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117687

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 95 (1970), Praha

ZAJÍMAVÁ GRUPA TRANSFORMACÍ

VLADIMÍR MAHEL, Praha

(Došlo dne 19. června 1969)

Věnováno památce akademika BOHUMILA BYDŽOVSKÉHO.

1. ÚVOD

V článku [1] byly vyšetřovány rovinné křivky šestého stupně, které jsou invariantní vůči kvadratickým inversím. V závěru tohoto článku byla nalezena síť sextik

$$a_{20}(x_3^4x_1^2 + x_2^4x_3^2 + x_1^4x_2^2) +$$
$$+ a_{22}(x_3^4x_2^2 + x_2^4x_1^2 + x_1^4x_3^2) + a_{42}x_1^2x_2^2x_3^2 = 0\,,$$

které jsou reprodukovány šesti inversemi (s týmiž hlavními body). Snadno se ukáže, že každá z těchto křivek je reprodukována dokonce celou grupou transformací řádu 24; v tomto článku ponechme stranou vlastnosti těchto sextik a věnujme se studiu vlastností oné grupy transformací.

2. GRUPA $\mathbf{G}_{24}$

Mějme dánu projektivní rovinu nad tělesem reálných čísel a v ní zvolme geom. basi $O_1(1, 0, 0)$, $O_2(0, 1, 0)$, $O_3(0, 0, 1)$ a $I(1, 1, 1)$. Pak platí následující věta:

Věta 1. *Dvanáct kolineací o rovnicích*

(1) $$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : x_2 : x_3 \equiv \mathbf{I}$$

(2) $$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : x_2 : -x_3 \equiv \mathbf{L}_2$$

(3) $$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : -x_2 : x_3 \equiv \mathbf{L}_3$$

(4) $$x_1' : x_2' : x_3' = -x_1 : x_2 : x_3 \equiv \mathbf{L}_4$$

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_2 : x_3 : x_1 \equiv \boldsymbol{L}_5 \tag{5}$$

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_2 : x_3 : -x_1 \equiv \boldsymbol{L}_6 \tag{6}$$

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_2 : -x_3 : x_1 \equiv \boldsymbol{L}_7 \tag{7}$$

$$x_1' : x_2' : x_3' = -x_2 : x_3 : x_1 \equiv \boldsymbol{L}_8 \tag{8}$$

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_3 : x_1 : x_2 \equiv \boldsymbol{L}_9 \tag{9}$$

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_3 : x_1 : -x_2 \equiv \boldsymbol{L}_{10} \tag{10}$$

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_3 : -x_1 : x_2 \equiv \boldsymbol{L}_{11} \tag{11}$$

$$x_1' : x_2' : x_3' = -x_3 : x_1 : x_2 \equiv \boldsymbol{L}_{12} \tag{12}$$

a dvanáct kvadratických transformací o rovnicích

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1x_3 : x_2x_3 : x_1x_2 \equiv \boldsymbol{T}_1 \tag{13}$$

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1x_3 : x_2x_3 : -x_1x_2 \equiv \boldsymbol{T}_2 \tag{14}$$

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1x_3 : -x_2x_3 : x_1x_2 \equiv \boldsymbol{K}_1 \tag{15}$$

$$x_1' : x_2' : x_3' = -x_1x_3 : x_2x_3 : x_1x_2 \equiv \boldsymbol{K}_2 \tag{16}$$

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1x_2 : x_1x_3 : x_2x_3 \equiv \boldsymbol{T}_3 \tag{17}$$

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1x_2 : -x_1x_3 : x_2x_3 \equiv \boldsymbol{T}_4 \tag{18}$$

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1x_2 : x_1x_3 : -x_2x_3 \equiv \boldsymbol{K}_3 \tag{19}$$

$$x_1' : x_2' : x_3' = -x_1x_2 : x_1x_3 : x_2x_3 \equiv \boldsymbol{K}_4 \tag{20}$$

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_2x_3 : x_1x_2 : x_1x_3 \equiv \boldsymbol{T}_5 \tag{21}$$

$$x_1' : x_2' : x_3' = -x_2x_3 : x_1x_2 : x_1x_3 \equiv \boldsymbol{T}_6 \tag{22}$$

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_2x_3 : x_1x_2 : -x_1x_3 \equiv \boldsymbol{K}_5 \tag{23}$$

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_2x_3 : -x_1x_2 : x_1x_3 \equiv \boldsymbol{K}_6 \tag{24}$$

tvoří grupu řádu 24.

Důkaz tohoto tvrzení provedeme tak, že najdeme multiplikační tabulku a přezkoušíme její vlastnosti (viz tab. 1). Skládání transformací je provedeno obvyklým způsobem, tj. např. $\boldsymbol{L}_2\boldsymbol{L}_6$ znamená provést nejprve transformaci $\boldsymbol{L}_6$ a pak transformaci $\boldsymbol{L}_2$ (v tabulce je levý činitel psán vlevo, tj. $\boldsymbol{L}_2\boldsymbol{L}_6 = \boldsymbol{L}_5$, ale $\boldsymbol{L}_6\boldsymbol{L}_2 = \boldsymbol{L}_8$).

Poznámka 1. Je nutno mít na paměti, že jednoznačnost zobrazení kvadratickými transformacemi je porušena v tzv. hlavních bodech a na tzv. hlavních přímkách, tj. při naší volbě base v bodech O_1, O_2, O_3 a na přímkách o rovnicích $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

	I	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7	L_8	L_9	L_{10}	L_{11}	L_{12}	T_1	T_2	K_1	K_2	T_3	T_4	K_3	K_4	T_5	T_6	K_5	K_6
I	I	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7	L_8	L_9	L_{10}	L_{11}	L_{12}	T_1	T_2	K_1	K_2	T_3	T_4	K_3	K_4	T_5	T_6	K_5	K_6
L_2	L_2	I	L_4	L_3	L_6	L_5	L_8	L_7	L_{10}	L_9	L_{12}	L_{11}	T_2	T_1	K_2	K_1	K_3	K_4	T_3	T_4	K_5	K_6	T_5	T_6
L_3	L_3	L_4	I	L_2	L_7	L_8	L_5	L_6	L_{11}	L_{12}	L_9	L_{10}	K_1	K_2	T_1	T_2	T_4	T_3	K_4	K_3	K_6	K_5	T_6	T_5
L_4	L_4	L_3	L_2	I	L_8	L_7	L_6	L_5	L_{12}	L_{11}	L_{10}	L_9	K_2	K_1	T_2	T_1	K_4	K_3	T_4	T_3	T_6	T_5	K_6	K_5
L_5	L_5	L_7	L_8	L_6	L_9	L_{11}	L_{12}	L_{10}	I	L_3	L_4	L_2	T_5	K_6	T_6	K_5	T_1	K_2	K_1	T_2	T_3	K_3	T_4	K_4
L_6	L_6	L_8	L_7	L_5	L_{10}	L_{12}	L_{11}	L_9	L_2	L_4	L_3	I	K_5	T_6	K_6	T_5	T_2	K_1	K_2	T_1	K_3	T_3	K_4	T_4
L_7	L_7	L_5	L_6	L_8	L_{11}	L_9	L_{10}	L_{12}	L_3	I	L_2	L_4	K_6	T_5	K_5	T_6	K_1	T_2	T_1	K_2	T_4	K_4	T_3	K_3
L_8	L_8	L_6	L_5	L_7	L_{12}	L_{10}	L_9	L_{11}	L_4	L_2	I	L_3	T_6	K_5	T_5	K_6	K_2	T_1	T_2	K_1	K_4	T_4	K_3	T_3
L_9	L_9	L_{12}	L_{10}	L_{11}	I	L_4	L_2	L_3	L_5	L_8	L_6	L_7	T_3	K_4	K_3	T_4	T_5	K_5	T_6	K_6	T_1	K_1	K_2	T_2
L_{10}	L_{10}	L_{11}	L_9	L_{12}	L_2	L_3	I	L_4	L_6	L_7	L_5	L_8	K_3	T_4	T_3	K_4	K_5	T_5	K_6	T_6	T_2	K_2	K_1	T_1
L_{11}	L_{11}	L_{10}	L_{12}	L_9	L_3	L_2	L_4	I	L_7	L_6	L_8	L_5	T_4	K_3	K_4	T_3	K_6	T_6	K_5	T_5	K_1	T_1	T_2	K_2
L_{12}	L_{12}	L_9	L_{11}	L_{10}	L_4	I	L_3	L_2	L_8	L_5	L_7	L_6	K_4	T_3	T_4	K_3	T_6	K_6	T_5	K_5	K_2	T_2	T_1	K_1
T_1	T_1	T_2	K_2	K_1	T_3	K_3	K_4	T_4	T_5	K_5	T_6	K_6	I	L_2	L_4	L_3	L_5	L_8	L_6	L_7	L_9	L_{11}	L_{10}	L_{12}
T_2	T_2	T_1	K_1	K_2	K_3	T_3	T_4	K_4	K_5	T_5	K_6	T_6	L_2	I	L_3	L_4	L_6	L_7	L_5	L_8	L_{10}	L_{12}	L_9	L_{11}
K_1	K_1	K_2	T_2	T_1	T_4	K_4	K_3	T_3	K_6	T_6	K_5	T_5	L_3	L_4	L_2	I	L_7	L_6	L_8	L_5	L_{11}	L_9	L_{12}	L_{10}
K_2	K_2	K_1	T_1	T_2	K_4	T_4	T_3	K_3	T_6	K_6	T_5	K_5	L_4	L_3	I	L_2	L_8	L_5	L_7	L_6	L_{12}	L_{10}	L_{11}	L_9
T_3	T_3	K_4	T_4	K_3	T_5	T_6	K_6	K_5	T_1	K_2	K_1	T_2	L_9	L_{12}	L_{11}	L_{10}	I	L_3	L_4	L_2	L_5	L_6	L_8	L_7
T_4	T_4	K_3	T_3	K_4	K_6	K_5	T_5	T_6	K_1	T_2	T_1	K_2	L_{11}	L_{10}	L_9	L_{12}	L_3	I	L_2	L_4	L_7	L_8	L_6	L_5
K_3	K_3	T_4	K_4	T_3	K_5	K_6	T_6	T_5	T_2	K_1	K_2	T_1	L_{10}	L_{11}	L_{12}	L_9	L_2	L_4	L_3	I	L_6	L_5	L_7	L_8
K_4	K_4	T_3	K_3	T_4	T_6	T_5	K_5	K_6	K_2	T_1	T_2	K_1	L_{12}	L_9	L_{10}	L_{11}	L_4	L_2	I	L_3	L_8	L_7	L_5	L_6
T_5	T_5	K_6	K_5	T_6	T_1	K_1	T_2	K_2	T_3	T_4	K_3	K_4	L_5	L_7	L_6	L_8	L_9	L_{10}	L_{11}	L_{12}	I	L_4	L_3	L_2
T_6	T_6	K_5	K_6	T_5	K_2	T_2	K_1	T_1	K_4	K_3	T_4	T_3	L_8	L_6	L_7	L_5	L_{12}	L_{11}	L_{10}	L_9	L_4	I	L_2	L_3
K_5	K_5	T_6	T_5	K_6	T_2	K_2	T_1	K_1	K_3	K_4	T_3	T_4	L_6	L_8	L_5	L_7	L_{11}	L_9	L_{12}	L_{10}	L_2	L_3	L_4	I
K_6	K_6	T_5	T_6	K_5	K_1	T_1	K_2	T_2	T_4	T_3	K_4	K_3	L_7	L_5	L_8	L_6	L_{10}	L_{12}	L_9	L_{11}	L_3	L_2	I	L_4

Tab. 1.

Poznámka 2. Uvedených dvanáct kolineací tvoří známou tzv. tetraedrickou grupu kolineací. Viz např. [2], kde je také ukázáno, že sextiky, uvedené v úvodním odstavci, jsou touto grupou kolineací reprodukovány.

Poznámka 3. Transformace $\boldsymbol{T}_1$ až $\boldsymbol{T}_6$ jsou kvadratické inverse (je to oněch šest inversí, o nichž je rovněž řeč v odst. 1). $\boldsymbol{T}_1$ má střed v bodě O_3 a základní kuželosečku o rovnici

$$x_3^2 - x_1x_2 = 0\,, \tag{25}$$

T_2 je inverse se středem O_3 a se zákl. kuželosečkou

$$x_3^2 + x_1x_2 = 0\,, \tag{26}$$

T_3 inverse se středem O_2 a základní kuželosečkou

$$x_2^2 - x_1x_3 = 0\,, \tag{27}$$

T_4 inverse se středem O_2 a základní kuželosečkou

$$x_2^2 + x_1x_3 = 0\,, \tag{28}$$

T_5 inverse se středem O_1 a se základní kuželosečkou

$$x_1^2 - x_2x_3 = 0\,, \tag{29}$$

T_6 inverse se středem O_1 a se základní kuželosečkou

$$x_1^2 + x_2x_3 = 0\,. \tag{30}$$

Poznámka 4. Zbylých šest transformací $K_1 - K_6$ jsou neinvolutorní kvadratické transformace bez samodružných bodů.

3. FAKTOROVÁ GRUPA G_6

Z tvaru tabulky 1 je možno ihned vyčíst další podstatnou vlastnost naší grupy G_{24}. Transformace I, L_2, L_3, L_4 tvoří podgrupu nejen v tetraedrické grupě kolineací, ale také v celé G_{24}. Vzhledem k tomu, že levé zbytkové třídy jsou totožné s pravými, je tato podgrupa normální podgrupou celé G_{24} (v tab. 1 jsou zbytkové třídy odděleny silnější linkou). Označíme-li

$$\begin{aligned} N &\equiv \{I, L_2, L_3, L_4\} \qquad & C &\equiv \{T_1, T_2, K_1, K_2\} \\ A &\equiv \{L_5, L_6, L_7, L_8\} \qquad & D &\equiv \{T_3, T_4, K_3, K_4\} \\ B &\equiv \{L_9, L_{10}, L_{11}, L_{12}\} \qquad & E &\equiv \{T_5, T_6, K_5, K_6\}\,, \end{aligned}$$

pak multiplikační tabulka faktorové grupy $G_{24}/N = G_6$ má tvar

	N	A	B	C	D	E
N	N	A	B	C	D	E
A	A	B	N	E	C	D
B	B	N	A	D	E	C
C	C	D	E	N	A	B
D	D	E	C	B	N	A
E	E	C	D	A	B	N

Tab. 2.

Z tabulky je opět ihned vidět, že $\{N, A, B\}$ tvoří normální podgrupu celé G_6.

4. KONFIGURACE $(24_3, 18_4)$

Mějme bod $Y(y_1, y_2, y_3)$, který není samodružným bodem v žádné z transformací (1)–(24), tj. neleží na žádné z přímek $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ a na žádné z kuželoseček (25)–(30). Obrazy bodu Y ve všech transformacích grupy G_{24} vytvoří 24-bodovou skupinu, jejíž struktura nás nyní bude zajímat. Pro jednoduchost označíme body této skupiny čísly 1–24, a to tak, že $Y \equiv 1$ a jeho obraz v transformaci (i) (i = 2, 3, … …, 24) obdrží číslo i. Souřadnice těchto dvaceti čtyř bodů jsou tedy

$$
(31)\qquad
\begin{array}{ll}
1 \dots (y_1, \ y_2, \ y_3) & 13 \dots (y_1y_3, \ y_2y_3, \ y_1y_2) \\
2 \dots (y_1, \ y_2, -y_3) & 14 \dots (y_1y_3, \ y_2y_3, -y_1y_2) \\
3 \dots (y_1, -y_2, \ y_3) & 15 \dots (y_1y_3, -y_2y_3, \ y_1y_2) \\
4 \dots (-y_1, \ y_2, \ y_3) & 16 \dots (-y_1y_3, \ y_2y_3, \ y_1y_2) \\
5 \dots (y_2, \ y_3, \ y_1) & 17 \dots (y_1y_2, \ y_1y_3, \ y_2y_3) \\
6 \dots (y_2, \ y_3, -y_1) & 18 \dots (y_1y_2, -y_1y_3, \ y_2y_3) \\
7 \dots (y_2, -y_3, \ y_1) & 19 \dots (y_1y_2, \ y_1y_3, -y_2y_3) \\
8 \dots (-y_2, \ y_3, \ y_1) & 20 \dots (-y_1y_2, \ y_1y_3, \ y_2y_3) \\
9 \dots (y_3, \ y_1, \ y_2) & 21 \dots (y_2y_3, \ y_1y_2, \ y_1y_3) \\
10 \dots (y_3, \ y_1, -y_2) & 22 \dots (-y_2y_3, \ y_1y_2, \ y_1y_3) \\
11 \dots (y_3, -y_1, \ y_2) & 23 \dots (y_2y_3, \ y_1y_2, -y_1y_3) \\
12 \dots (-y_3, \ y_1, \ y_2) & 24 \dots (y_2y_3, -y_1y_2, \ y_1y_3)
\end{array}
$$

Přitom předpokládáme, že

$$(32)\qquad y_i \neq 0\,, \quad y_i^2 \pm y_j y_k \neq 0\,, \quad \text{kde} \quad (i, j, k = 1, 2, 3\,, \quad i \neq j \neq k \neq i)\,.$$

Poznámka 4. Je ihned vidět, že jsou-ti čísla y_1, y_2, y_3 racionální, jsou racionální také souřadnice všech 24 bodů.

Zmíněných 24 bodů je možno rozdělit na šest čtveřic podle zbytkových tříd faktorové grupy $\boldsymbol{G}_6$. Pro označení těchto bodových čtveřic použijeme stejných písmen jako pro označení zbytkových tříd, tedy

$$(33)\qquad \begin{array}{ll} \boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, 4\} & \boldsymbol{C} = \{13, 14, 15, 16\} \\ \boldsymbol{A} = \{5, 6, 7, 8\} & \boldsymbol{D} = \{17, 18, 19, 20\} \\ \boldsymbol{B} = \{9, 10, 11, 12\} & \boldsymbol{E} = \{21, 22, 23, 24\} \end{array}$$

Jádro tohoto odstavce tvoří následující věta:

Věta 2. *24-bodová skupina* (31) *za předpokladů* (32) *má tyto vlastnosti:*

a) *je tvořena šesti úplnými čtyřrohy se společným diagonálním trojúhelníkem;*

b) *každé dvě čtyřbodové skupiny z* (33) *leží na kuželosečce; z* 15 *takto vytvořených kuželoseček je* 6 *kuželoseček regulárních* (*kuželosečky obsahující skupiny* $\boldsymbol{N} \cup \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{N} \cup \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{N} \cup \boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D} \cup \boldsymbol{E}$);

c) *zbylých* 9 *kuželoseček jsou kuželosečky složené vždy z dvojice různých přímek.*

Důkaz tvrzení a): vzhledem k tomu, že transformace (2), (3), (4) jsou involutorní homologie se středem v bodě O_i ($i = 1, 2, 3$) a s osou v přímce o rovnici $x_i = 0$, tvoří čtveřice $\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, 4\}$ úplný čtyřroh s diagonálním trojúhelníkem $O_1O_2O_3$; kolineace $\boldsymbol{L}_5$ a $\boldsymbol{L}_9$ převádějí čtyřroh $\boldsymbol{N}$ v čtyřrohy $\boldsymbol{A} = \{5, 6, 7, 8\}$ a $\boldsymbol{B} = \{9, 10, 11, 12\}$. Z vlastností kvadr. transformací (viz např. [3], str. 616, tvrzení d)) plyne pak také, že čtveřice $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{E}$ jsou opět úplnými čtyřrohy se spol. diagonálním trojúhelníkem $O_1O_2O_3$.

Pro důkaz tvrzení b) najdeme rovnice zmíněných kuželoseček. Po snadném ale delším výpočtu zjistíme, že kuželosečka obsahující osmibodovou skupinu $\boldsymbol{N} \cup \boldsymbol{A}$ má rovnici

$$(34)\qquad \boldsymbol{N} \cup \boldsymbol{A} \ \ldots\ x_1^2(y_3^4 - y_1^2y_2^2) + x_2^2(y_1^4 - y_2^2y_3^2) + x_3^2(y_2^4 - y_1^2y_3^2) = 0$$

podobně

$$(35)\qquad \boldsymbol{N} \cup \boldsymbol{B} \ \ldots\ x_1^2(y_2^4 - y_1^2y_3^2) + x_2^2(y_3^4 - y_1^2y_2^2) + x_3^2(y_1^4 - y_2^2y_3^2) = 0$$

$$(36)\qquad \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} \ \ldots\ x_1^2(y_1^4 - y_2^2y_3^2) + x_2^2(y_2^4 - y_1^2y_3^2) + x_3^2(y_3^4 - y_1^2y_2^2) = 0$$

$$(37) \qquad \mathbf{C} \cup \mathbf{D} \ldots x_1^2 y_2^2 y_3^2 (y_1^4 - y_2^2 y_3^2) + x_2^2 y_1^2 y_2^2 (y_3^4 - y_1^2 y_2^2) + \\ + x_3^2 y_1^2 y_3^2 (y_2^4 - y_1^2 y_3^2) = 0$$

$$(38) \qquad \mathbf{C} \cup \mathbf{E} \ldots x_1^2 y_1^2 y_2^2 (y_3^4 - y_1^2 y_2^2) + x_2^2 y_1^2 y_3^2 (y_2^4 - y_1^2 y_3^2) + \\ + x_3^2 y_2^2 y_3^2 (y_1^4 - y_2^2 y_3^2) = 0$$

$$(39) \qquad \mathbf{D} \cup \mathbf{E} \ldots x_1^2 y_1^2 y_3^2 (y_2^4 - y_1^2 y_3^2) + x_2^2 y_2^2 y_3^2 (y_1^4 - y_2^2 y_3^2) + \\ + x_3^2 y_1^2 y_2^2 (y_3^4 - y_1^2 y_2^2) = 0$$

Vzhledem k předpokladům (32) je ihned vidět, že všechny tyto kuželosečky jsou regulární a z tvaru rovnic je patrné, že všechny tyto kuželosečky mají $O_1 O_2 O_3$ za společný polární trojúhelník.

K důkazu tvrzení c) najdeme opět rovnice těchto kuželoseček:

$$(40) \qquad \mathbf{N} \cup \mathbf{C} \text{ leží na kuželosečce } y_2^2 x_1^2 - y_1^2 x_2^2 = 0$$

$$(41) \qquad \mathbf{N} \cup \mathbf{D} \ldots \qquad y_3^2 x_1^2 - y_1^2 x_3^2 = 0$$

$$(42) \qquad \mathbf{N} \cup \mathbf{E} \ldots \qquad y_3^2 x_2^2 - y_2^2 x_3^2 = 0$$

$$(43) \qquad \mathbf{A} \cup \mathbf{C} \ldots \qquad y_1^2 x_2^2 - y_3^2 x_3^2 = 0$$

$$(44) \qquad \mathbf{A} \cup \mathbf{D} \ldots \qquad y_3^2 x_1^2 - y_2^2 x_2^2 = 0$$

$$(45) \qquad \mathbf{A} \cup \mathbf{E} \ldots \qquad y_2^2 x_2^2 - y_1^2 x_3^2 = 0$$

$$(46) \qquad \mathbf{B} \cup \mathbf{C} \ldots \qquad y_2^2 x_1^2 - y_3^2 x_3^2 = 0$$

$$(47) \qquad \mathbf{B} \cup \mathbf{D} \ldots \qquad y_1^2 x_1^2 - y_2^2 x_3^2 = 0$$

$$(48) \qquad \mathbf{B} \cup \mathbf{E} \ldots \qquad y_1^2 x_1^2 - y_3^2 x_2^2 = 0$$

Je ihned vidět, že za předpokladu $y_i \neq 0$, $(i = 1, 2, 3)$ je každá z těchto kuželoseček složena z dvojice různých přímek; singulární body všech těchto kuželoseček jsou v bodech O_1, O_2 a O_3.

Tvrzení c) předchozí věty lze však ještě značně prohloubit. O tom nám blíže poví následující věta:

Věta 3. *Za předpokladů* (32) *tvoří* 24 *bodová skupina* (31) *konfiguraci* $(24_3, 18_4)$.

D ů k a z. Všimneme si blíže singulárních kuželoseček (40)—(48). Dvojice přímek (40), (44) a (48) procházejí bodem O_3; podobně dvojice přímek (41), (45) a (46) procházejí bodem O_2 a konečně dvojice přímek (42), (43) a (47) bodem O_1.

Kuželosečka (40) je složena z přímek

$$y_2 x_1 - y_1 x_2 = 0 \tag{49}$$

a

$$y_2 x_1 + y_1 x_2 = 0 \,. \tag{50}$$

Podobně kuželosečka (44) je složena z přímek

$$y_3 x_1 - y_2 x_2 = 0 \tag{51}$$

a

$$y_3 x_1 + y_2 x_2 = 0 \tag{52}$$

a konečně kuželosečka (48) z přímek

$$y_1 x_1 - y_3 x_2 = 0 \tag{53}$$

a

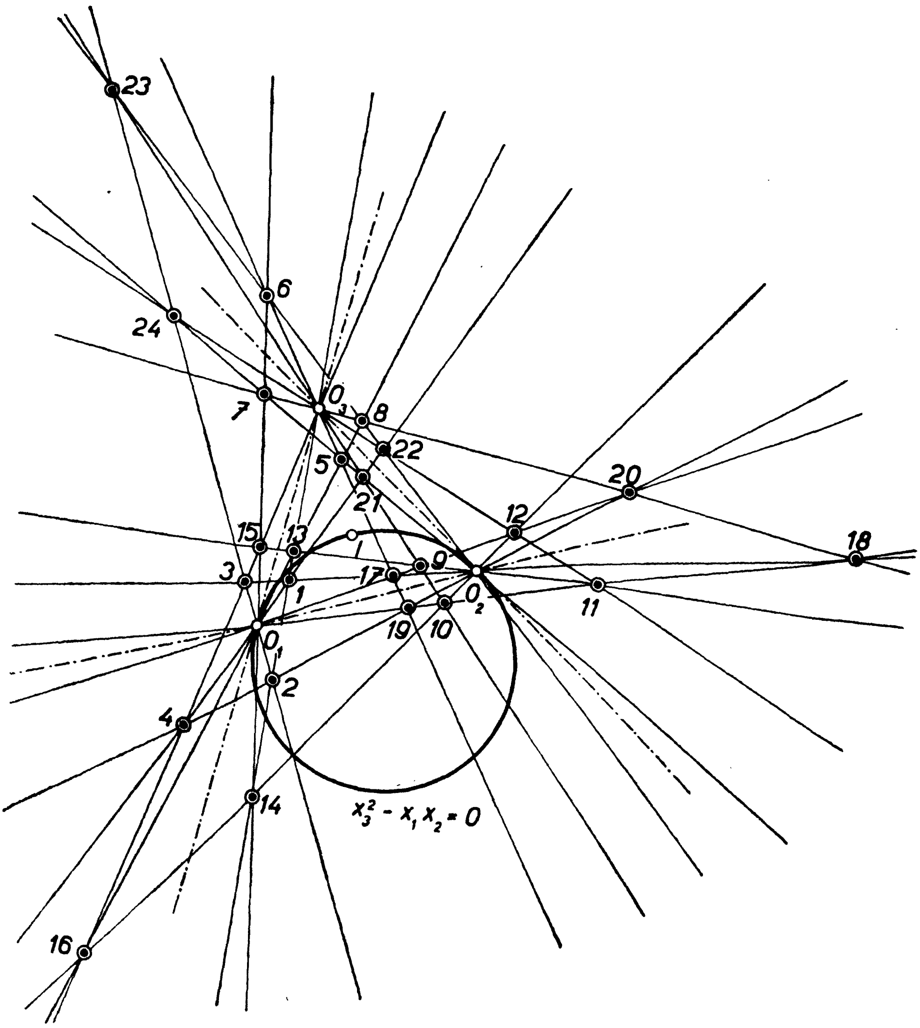
$$y_1 x_1 + y_3 x_2 = 0 \,. \tag{54}$$

Už v předchozí větě bylo ukázáno, že za předpokladu $y_i \neq 0$ $(i = 1, 2, 3)$ nemůže splynout přímka (49) s přímkou (50). Přímka (49) však nemůže splynout ani s přímkou (51), neboť toto splynutí je ekvivalentní s požadavkem, aby pro koeficienty v rovnicích těchto přímek platil vztah $y_2^2 - y_1 y_3 = 0$, což je předpoklady (32) vyloučeno; analogickou úvahou se přesvědčíme, že splynutí kterýchkoliv dvou přímek (49)–(54) by bylo možné pouze tehdy, kdyby bod $Y(y_1, y_2, y_3)$ ležel na některé ze základních kuželoseček inversí $\boldsymbol{T}_1 - \boldsymbol{T}_6$. Žádná z přímek (49)–(54) nemůže však také splynout s některou ze zbývajících dvanácti přímek, neboť by musela procházet bodem O_2 resp. O_1. Analogická úvaha o druhých dvou šesticích přímek nás vede k závěru, že všech 18 přímek, na které se rozpadají složené kuželosečky (40)–(48) jsou vesměs různé. Každým bodem naší konfigurace procházejí právě tři přímky (totiž spojnice uvažovaného bodu s hlavními body O_1, O_2 a O_3). Snadno se také přesvědčíme, že na každé z těchto konfiguračních přímek leží právě čtyři body konfigurace, např. na přímce (49) leží body 1, 2, 13 a 14, atd. Tvoří tedy skupina (31) za předp. (32) konfiguraci $(24_3, 18_4)$ bodů a přímek v klasickém významu slova.

Pro úplnost uveďme ještě schéma celé konfigurace, které ukáže souvislost i s nejnovější literaturou (viz např. [4]).

1	1	1	2	2	3	5	5	5	6	6	7	9	9	9	10	11	12
2	3	4	3	4	4	6	7	8	7	8	8	10	11	12	11	12	12
13	17	21	23	19	15	17	21	13	14	22	18	21	13	17	18	14	22
14	18	22	24	20	16	19	24	16	15	23	20	23	15	20	19	16	24

Konkrétní zmínku o této konfiguraci se v literatuře nepodařilo nalézt. Na závěr připojme ještě geometrickou konstrukci konfigurace. V dané proj. rovině je zvolena geom. base O_1, O_2, O_3 a I (viz obr. 1). K libovolně zvolenému bodu 1 (zvolen tak, aby neležel na žádné z hlavních přímek a na žádné zákl. kuželosečce) jsou nalezeny body 2, 3, 4 jako obrazy bodu 1 v homologiích $\boldsymbol{L}_2$, $\boldsymbol{L}_3$ a $\boldsymbol{L}_4$. Úplné čtyřrohy $\boldsymbol{A} = \{5, 6, 7, 8\}$ a $\boldsymbol{B} = \{9, 10, 11, 12\}$ jsou sestrojeny jako obrazy čtyřrohu $\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, 4\}$ v kolineacích $\boldsymbol{L}_5$ a $\boldsymbol{L}_9$. V kvadratické inversi $\boldsymbol{T}_1$ (střed O_3 a zákl. kuželosečka $x_3^2 - x_1x_2 = 0$) jsou pak nalezeny obrazy 13–24 bodů 1–12.



Obr. 1.

Literatura

[1] *V. Mahel:* Sextiky invariantní vzhledem ke kvadratickým inversím s třemi body hlavními. Čas. pěst. mat. *80*, (1955), 284—298.
[2] *J. Vojtěch:* Konečné grupy kolineací a rovinné sextiky k sobě příslušné. Rozpravy ČAV 1913, č. 42.
[3] *B. Bydžovský:* Úvod do algebraické geometrie, JČMF Praha 1948.
[4] *С. А. Широкова:* Блок-схемы, Успехи математических наук, XXIII, 5, (143), 1968, стр. 51—98.

Adresa autora: Praha 6, Technická 1902 (elektrotech. fakulta ČVUT).

Zusammenfassung

EINE INTERESSANTE TRANSFORMATIONSGRUPPE

VLADIMÍR MAHEL, Praha

In der vorgelegten Arbeit befasst sich der Autor mit der Transformationsgruppe, die aus 12 Kollineationen (1) – (12) und 12 quadratischen Transformationen (13) – (24) der projektiven Ebene besteht.

Die Bilder des Punktes, der in keiner von diesen Transformationen koinzident ist, bilden eine Gruppe von 24 Punkten (31) mit folgenden Eigenschaften:

a) sie wird von 6 Vierecken mit gemeinsamem Polardreieck gebildet;

b) jede zwei Punktquadrupeln von (33) liegen auf einem Kegelschnitt; so entstehen 15 Kegelschnitte; sechs von ihnen sind regulär und die übrigen neun bestehen aus zwei verschiedenen Geraden.

Abschliessend wird der Beweis geliefert, dass diese Gruppe von 24 Punkten eine Konfiguration $(24_3, 18_4)$ ist.