

Josef Kateřínák

Komplexní rozšíření některých bodových  $\{J\}_n$ -prostorů  $R^n$

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 94 (1969), No. 4, 394--400

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/117670>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1969

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

KOMPLEXNÍ ROZŠÍŘENÍ NĚKTERÝCH BODOVÝCH  
 $\{J\}_n$ -PROSTORŮ  $R_n$

JOSEF KATEŘIŇÁK, Žilina  
(Došlo dne 14. února 1968)

Vícerozměrné bodové prostory  $P_n$  (projektivní),  $E_n$  (Eukleidův),  $A_n$  (afinní),  $L_n$  (Lobačevského), atd., se většinou studují buď analyticko-diferenciální metodou, nebo v poslední době se studují jako metrické nebo topologické prostory. Jsou však různé prostory definované axiomatically, o kterých nevíme ani, zda se dají metrisovat nebo topologisovat, a jejich studium přináší zajímavé výsledky. V této práci ukážeme některé vlastnosti některých bodových  $\{J\}_n$ -prostorů  $R_n$  definovaných axiomatically pomocí teorie množin buď intuitivní z [1] nebo neformalisované axiomatically z [2].

**J.** Pro přirozená čísla  $k = 0, 1, \dots, n \geq 2$  buďte  $R_{-1} = \emptyset \neq R_k \subset R_n$  podprostory  $R_k$  dimense  $k$  bodového  $\{J\}_n$ -prostoru  $R_n$  dimense  $n$  definované zobecněnými Hilbertovými axiomy incidence J1–J5 ([6], str. 17–18).

**E, L, P** buďte axiomy Eukleidův, Lobačevského ([6], str. 19), projektivní ([5], str. 252).

**GE, GP** buďte speciální Desarguessovy axiomy.

**M.** Buď  $M_{R_n} \subset R_n \times R_n \times R_n$  oddělování (uspořádání) definované axiomy M1–M4 ([6], str. 18).

**DM** buď pro  $M_{R_n} \subset R_n \times R_n \times R_n$  Dedekindův axiom ([6], str. 18).

**N.** Buď  $N_{R_n} \subset R_n \times R_n \times R_n \times R_n$  oddělování (uspořádání) definované axiomy N1–N6 ([5], str. 265–266).

**DN** buď pro  $N_{R_n} \subset R_n \times R_n \times R_n \times R_n$  Dedekindův axiom ([5], str. 281).

**S.** Buď  $M_{R_n} \subset R_n \times R_n \times R_n$  a buď  $S_{R_n} \subset R_n \times R_n \times R_n \times R_n$  shodnost (kongruence) definovaná axiomy S1–S6 ([6], str. 18–19).<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Viz Dodatek 1.

**Úmluva 1.** Budeme nazývat a označovat  $R_n$  skupinou písmen z označení axiomů, které tento  $R_n$  splňuje, např.:  $\{J\}_n$ -prostor,  $\{J, E, GE, M, DM\}_n$ -prostor,  $\{J, P, GP, N, DN\}_n$ -prostor,  $\{J, E, M, DM, S\}_n$ -prostor,  $\{J, L, M, DM, S\}_n$ -prostor,  $\{J, M, DM, S\}_n$ -prostor, atd.

**Příklad 1.** Pro  $n \geq 2$  buď  $E'_n$  z [3], str. 13–14, a definujme:

- (1)  $E'_k \subset E'_n$  jsou z [3], str. 50;
  - (2)  $(A, B, C) \in M_{E'_n} \Leftrightarrow A, B, C \in E'_n, A \neq B \neq C \neq A$ , a vzdálenosti  $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ ;
  - (3)  $(A, B, C, D) \in S_{E'_n} \Leftrightarrow A, B, C, D \in E'_n, A \neq B, C \neq D$ , a vzdálenosti  $\overline{AB} = \overline{CD}$ .
- Potom tento  $E'_n$  (místo  $R$  píšeme  $E$ ) je  $\{J, E, GE, M, DM, S\}_n$ -prostor.

**Příklad 2.** Pro  $n \geq 2$  buď  $\overline{E}'_n = P'_n$  z [4], str. 12–13, a definujme:

- (4)  $P'_k \subset P'_n$  jsou z [4], str. 15;
  - (5)  $(A, B, C, D) \in N_{P'_n} \Leftrightarrow A, B, C, D \in P'_n$  a dvojpoměr  $(ACBD) < 0$  (viz [4], str. 35).
- Potom tento  $P'_n$  (místo  $R$  píšeme  $P$ ) je  $\{J, P, GP, N, DN\}_n$ -prostor.

**Příklad 3.** Pro  $n \geq 2$  buď  $Q_{n-1} \subset E'_n \subset \overline{E}'_n = P'_n$  ( $n-1$ )-rozměrná koule z [4], str. 160–161, buď  $L'_n \subset E'_n$  vnitřek  $Q_{n-1}$  z [4], str. 132, a definujme:

- (6)  $L'_k = L'_n \cap E'_k \neq \emptyset$ , kde  $E'_k \subset E'_n$ ;
- (7)  $(A, B, C) \in M_{L'_n} \Leftrightarrow A, B, C \in L'_n \subset E'_n, A \neq B \neq C \neq A$ , a vzdálenosti  $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ ;
- (8)  $(A, B, C, D) \in S_{L'_n} \Leftrightarrow A, B, C, D \in L'_n \subset P'_n, E, F, G, H \in Q_{n-1} \subset P'_n$ , a buď dvojpoměry  $(EFAB) = (GHCD)$  nebo dvojpoměry  $(EFAB) = (HGCD)$ .<sup>2)</sup>

Potom tento  $L'_n$  (místo  $R$  píšeme  $L$ ) je  $\{J, L, M, DM, S\}_n$ -prostor.

**Důsledek 1.** Skupiny axiomů  $\{J, E, GE, M, DM, S\}_n, \{J, P, GP, N, DN\}_n, \{J, L, M, DM, S\}_n$ , a všechny skupiny axiomů, které z nich dostaneme vynecháním některých axiomů, jsou bezesporné.

**Definice 1.** Pravíme, že  $R_n$  je isomorfní s  $R'_n$  (označení  $R_n \sim R'_n$ ), právě když existuje vzájemně jednoznačné (prosté) zobrazení  $f$  prostoru  $R_n$  na prostor  $R'_n$  (isomorfní zobrazení neboli isomorfismus) tak, že:

- (9)  $R_k \subset R_n \Rightarrow f(R_k) = R'_k \subset R'_n$ ;
- (10)  $f(M_{R_n}) = M_{R'_n}$ ;
- (11)  $f(N_{R_n}) = N_{R'_n}$ ;
- (12)  $f(S_{R_n}) = S_{R'_n}$ .

<sup>2)</sup> Viz Dodatek 2.

Platí věty:<sup>3)</sup>

- (13) Každé dva  $\{J, E, GE, M, DM\}_n$ -prostory  $R_n$  a  $R'_n$  jsou isomorfní.  
(14) Každé dva  $\{J, P, GP, N, DN\}_n$ -prostory  $R_n$  a  $R'_n$  jsou isomorfní.  
(15) Každý  $\{J, E, M, S\}_n$ -prostor  $R_n$  je  $\{J, E, GE, M, S\}_n$ -prostor.  
(16) Každé dva  $\{J, E, M, DM, S\}_n$ -prostory  $R_n$  a  $R'_n$  jsou isomorfní.  
(17) Každé dva  $\{J, L, M, DM, S\}_n$ -prostory  $R_n$  a  $R'_n$  jsou isomorfní.

**Úmluva 2.** Pro prostory  $\{J, E, GE, M, DM\}_n$ ,  $\{J, P, GP, N, DN\}_n$ ,  $\{J, E, M, DM, S\}_n$ ,  $\{J, L, M, DM, S\}_n$  budeme místo  $R$  psát  $A$  (afinní),  $P$  (projektivní),  $E$  (Eukleidův),  $L$  (Lobačevského). (Pro  $n = 3$  jsou  $A_3, E_3, L_3$  v soulase s [9], str. 187).

**Příklad 4.** Pro  $n \geq 2$  buď prostor  $R'_n = E'_n(i)$  a jeho podprostory  $R'_k \subset R'_n$  z [4], str. 82–90. Potom tento  $R'_n$  je  $\{J, E, GE\}_n$ -prostor. Avšak neexistuje  $M_{R'_n} \supset M_{E'_n}$  splňující axiomy  $M$  a  $DM$ , což by podle (13) vedlo ke sporu.

**Příklad 5.** Pro  $n \geq 2$  buď prostor  $R'_n = \overline{E'_n}(i) = P'_n(i)$  a jeho podprostory  $R'_k \subset R'_n$  z [4], str. 91–93. Potom tento  $R'_n$  je  $\{J, P, GP\}_n$ -prostor. Avšak neexistuje  $N_{R'_n} \supset N_{P'_n}$  splňující axiomy  $N$  a  $DN$ , což by podle (14) vedlo ke sporu.

**Důsledek 2.** Prostory  $\{J, E, GE, M, DM\}_n$ ,  $\{J, P, GP, N, DN\}_n$ ,  $\{J, E, M, DM, S\}_n$  nelze komplexně rozšířit tak, aby splňovaly všechny axiomy, tj. jsou vždy jen reálné.

**Poznámka 1.** Studuje-li se projektivní  $P_n$  jako topologický prostor, potom podle [7] nebo [8], str. 189, jsou tři druhy spojitých  $P_n$ : a)  $P_n$  nad tělesem reálných čísel; b)  $P_n$  nad tělesem komplexních čísel; c)  $P_n$  nad tělesem kvaternionů.

Ukážeme však, že některé  $\{J\}_n$ -prostory lze komplexně rozšířit tak, aby splňovaly menší počet axiomů.

**Věta 1.** Buď  $L_n$   $\{J, L, M, DM, S\}_n$ -prostor. Potom existuje  $\{J, E, GE, M, DM\}_n$ -prostor  $A_n \supset L_n$  tak, že:

- (18)  $L_k \subset L_n \Rightarrow L_k \subset A_k \subset A_n$ ;  
(19)  $M_{L_n} \subset M_{A_n}$ .

**Důkaz.** Podle (17) existuje isomorfní zobrazení  $f$  prostoru  $L_n$  na  $L'_n \subset E'_n \subset \overline{E'_n} = P'_n$  z příkladu 3. Označme  $A_n = L_n \cup E'_n - L'_n$  a definujme zobrazení  $\tilde{f}$  takto:  $\tilde{f}(X) = f(X)$  pro  $X \in L_n$ ,  $\tilde{f}(Y) = Y$  pro  $Y \in E'_n - L'_n$ . Označme  $\tilde{f}^{-1}$  zobrazení inverzní k  $\tilde{f}$  a definujme:  $A_k = \tilde{f}^{-1}(E'_k)$  pro  $E'_k \subset E'_n$ ,  $M_{A_n} = \tilde{f}^{-1}(M_{E'_n})$ . Potom podle (1), (2), (6), (7), (9), (10) je tento  $A_n$   $\{J, E, GE, M, DM\}_n$ -prostor a platí (18) i (19).

**Věta 2.** Buď  $A_n$   $\{J, E, GE, M, DM\}_n$ -prostor. Potom existuje  $\{J, E, M, DM, S\}_n$ -prostor  $E_n = A_n$  tak, že:

- (20)  $A_k \subset A_n \Rightarrow A_k = E_k \subset E_n$ ;  
(21)  $M_{A_n} = M_{E_n}$ .

<sup>3)</sup> Viz Dodatek 3.

Důkaz. Podle (13) existuje isomorfní zobrazení  $f$  prostoru  $A_n$  na  $E'_n$  z příkladu 1. Označme  $E_n = A_n$  a  $f^{-1}$  zobrazení inverzní k  $f$ , a definujme:  $E_k = f^{-1}(E'_k)$  pro  $E'_k \subset E'_n$ ,  $M_{E_n} = f^{-1}(M_{E'_n})$ ,  $S_{E_n} = f^{-1}(S_{E'_n})$ . Potom podle (9), (10) je tento  $E_n\{J, E, M, DM, S\}_n$ -prostor a platí (20) i (21).

**Věta 3.** *Bud'  $E_n\{J, E, M, DM, S\}_n$ -prostor. Potom existuje  $\{J, P, GP, N, DN\}_n$ -prostor  $P_n \supset E_n$  tak, že:*

$$(22) E_k \subset E_n \Rightarrow E_k \subset P_k \subset P_n;$$

$$(23) (A, B, C) \in M_{E_n} \Leftrightarrow (A, B, C, D) \in N_{P_n} \text{ a } D \in P_n - E_n.$$

Důkaz. Podle (16) existuje isomorfní zobrazení  $f$  prostoru  $E_n$  na  $E'_n \subset \overline{E'_n} = P'_n$  z příkladů 1, 2. Označme  $P_n = E_n \cup P'_n - E'_n$  a definujme zobrazení  $\tilde{f}$  takto:  $\tilde{f}(X) = f(X)$  pro  $X \in E_n$ ,  $\tilde{f}(Y) = Y$  pro  $Y \in P'_n - E'_n$ . Označme  $\tilde{f}^{-1}$  zobrazení inverzní k  $\tilde{f}$  a definujme:  $P_k = \tilde{f}^{-1}(P'_k)$  pro  $P'_k \subset P'_n$ ,  $N_{P_n} = \tilde{f}^{-1}(N_{P'_n})$ . Potom podle (4), (5), (9) a [4], věta 78.4, str. 35, je tento  $P_n\{J, P, GP, N, DN\}_n$ -prostor a platí (22) i (23).

**Důsledek 3.** *Každý z prostorů  $L_n, A_n, E_n, P_n$  a jejich podprostorů lze studovat ve vztazích  $L_n \subset A_n = E_n \subset P_n$  a  $L_k \subset A_k = E_k \subset P_k$  ve smyslu vět 1, 2, 3.*

**Věta 4.** *Bud'  $E_n\{J, E, M, DM, S\}_n$ -prostor. Potom existuje  $\{J, E, GE\}_n$ -prostor  $R_n \supset E_n$  tak, že existuje isomorfní zobrazení  $\tilde{f}$  prostoru  $R_n$  na  $R'_n = E'_n(i) \supset E'_n$  z příkladů 1 a 4, a platí:*

$$(24) E_k \subset E_n \Rightarrow E_k \subset R_k \subset R_n;$$

$$(25) E_k \subset E_n \Rightarrow \tilde{f}(E_k) = E'_k \subset E'_n \text{ a } E_k \subset R_k \subset R_n.$$

Důkaz. Podle (16) existuje isomorfní zobrazení  $f$  prostoru  $E_n$  na  $E'_n$ . Označme  $R_n = E_n \cup R'_n - E'_n$  a definujme zobrazení  $\tilde{f}$  takto:  $\tilde{f}(X) = f(X)$  pro  $X \in E_n$ ,  $\tilde{f}(Y) = Y$  pro  $Y \in R'_n - E'_n$ . Označme  $\tilde{f}^{-1}$  zobrazení inverzní k  $\tilde{f}$  a definujme:  $R_k = \tilde{f}^{-1}(R'_k)$  pro  $R'_k \subset R'_n$ . Potom podle (9) a [4], str. 82–90, je tento  $R_n\{J, E, GE\}_n$ -prostor a  $\tilde{f}$  je takové isomorfní zobrazení, že platí (24) i (25).

**Věta 5.** *Bud'  $P_n\{J, P, GP, N, DN\}_n$ -prostor. Potom existuje  $\{J, P, GP\}_n$ -prostor  $R_n \supset P_n$  tak, že existuje isomorfní zobrazení  $\tilde{f}$  prostoru  $R_n$  na  $R'_n = P'_n(i) \supset P'_n$  z příkladů 2 a 5, a platí:*

$$(26) P_k \subset P_n \Rightarrow P_k \subset R_k \subset R_n;$$

$$(27) P_k \subset P_n \Rightarrow \tilde{f}(P_k) = P'_k \subset P'_n \text{ a } P_k \subset R_k \subset R_n.$$

Důkaz je obdobný jako pro větu 4.

**Důsledek 4.** *Ke každému z prostorů  $L_n, A_n, E_n, P_n$  existuje buď  $\{J, E, GE\}_n$ -prostor nebo  $\{J, P, GP\}_n$ -prostor  $R_n$  jako jeho komplexní rozšíření ve smyslu vět 1, 2, 3, 4, 5.*

**Problém 1.** Existuje  $\{J, E, GE, M\}_n$ -prostor  $R_n \supset E_n$  a isomorfní zobrazení  $\tilde{f}$  z věty 4 tak, že platí (24), (25) a  $M_{E_n} \subset M_{R_n}$ ?

Problém 2. Existuje  $\{J, P, GP, N\}_n$ -prostor  $R_n \supset P_n$  a isomorfní zobrazení  $f$  z věty 5 tak, že platí (26), (27) a  $N_{P_n} \subset N_{R_n}$ ?

DODATEK

1. Definujeme;  $B_0, \dots, B_k \in R_n$  nezávislé v  $R_n$  (píšeme  $B_0 \dots B_k$ )  $\Leftrightarrow$  pro každý  $R_{k-1} \subset R_n$  aspoň jeden  $B_j \notin R_{k-1}$ .

J1.  $R_1 \subset R_n \Rightarrow$  existují nezávislé  $B_0, B_1 \in R_1$ .

J2. Pro každé  $k = 0, 1, \dots, n$  existují nezávislé  $B_0, \dots, B_k \in R_n$ .

J3. Nezávislé  $B_0, \dots, B_k \in R_n \Rightarrow$  existuje právě jeden  $R_k \subset R_n$  tak, že  $B_0, \dots, B_k \in R_k$  (píšeme  $R_k = B_0 \dots B_k$ ).

J4.  $R_k, R_{k+1} \subset R_n$  a nezávislé  $B_0, \dots, B_k \in R_k \cap R_{k+1} \Rightarrow R_k \subset R_{k+1}$ .

J5.  $R_k, R'_k \subset R_{k+1} \subset R_n$  a  $R_k \cap R'_k \neq \emptyset \Rightarrow$  existují nezávislé  $B_0, \dots, B_{k-1} \in R_k \cap R'_k$ .

E.  $R_1 \subset R_2 \subset R_n, B \in R_2 - R_1 \Rightarrow$  existuje právě jedna  $R'_1 \subset R_2$  tak, že  $B \in R'_1$  a  $R'_1 \cap R_1 = \emptyset$ .

L.  $R_1 \subset R_2 \subset R_n, B \in R_2 - R_1 \Rightarrow$  existují aspoň dvě různé  $R'_1 \subset R_2$  tak, že  $B \in R'_1$  a  $R'_1 \cap R_1 = \emptyset$ .

P.  $R_1, R'_1 \subset R_2 \subset R_n \Rightarrow R_1 \cap R'_1 \neq \emptyset$ .

GE. Nezávislé  $A, B, C \in R_2 \subset R_n$ , nezávislé  $D, E, F \in R_2, AD \cap BE = AD \cap CF = BE \cap CF = \emptyset, AB \cap DE = \emptyset, AC \cap DF = \emptyset \Rightarrow BC \cap EF = \emptyset$ .

GP. Nezávislé  $A, B, C \in R_2 \subset R_n$ , nezávislé  $D, E, F \in R_2, AD \cap BE = AD \cap CF = BE \cap CF = Q \in R_1 \subset R_2, AB \cap DE = X \in R_1, AC \cap DF = Y \in R_1 \Rightarrow BC \cap EF = Z \in R_1$ .

M1.  $(A, B, C) \in M_{R_n} \Rightarrow A, B, C \in R_1 \subset R_n, A \neq B \neq C \neq A, (C, B, A) \in M_{R_n}$ .

M2.  $A, B \in R_n, A \neq B \Rightarrow$  existuje  $(A, B, C) \in M_{R_n}$ .

M3.  $(A, B, C) \in M_{R_n} \Rightarrow (B, A, C), (A, C, B) \notin M_{R_n}$ .

M4.  $R_1 \subset R_2 \subset R_n \Rightarrow$  existují  $C', C'' \subset R_2 - R_1$  tak, že:

a)  $C' \cup C'' = R_2 - R_1, C' \cap C'' = \emptyset$ ;

b)  $X \in C', Y \in C'' \Rightarrow$  existuje  $B \in R_1, (X, B, Y) \in M_{R_n}$ ;

c)  $X, Y \in C'$  nebo  $X, Y \in C'' \Rightarrow$  neexistuje  $B \in R_1, (X, B, Y) \in M_{R_n}$ .

DM. Jestliže  $A, B \in R_n, A \neq B, X \in D \Leftrightarrow (A, X, B) \in M_{R_n}, \emptyset \neq D' \subset D, \emptyset \neq D'' \subset D$ ,

a)  $D' \cup D'' = D, D' \cap D'' = \emptyset$ ,

b)  $Y \in D', (A, X, Y) \in M_{R_n} \Rightarrow X \in D'$ ,

c)  $Y \in D'', (Y, X, B) \in M_{R_n} \Rightarrow X \in D''$ ,

potom existuje  $H \in D$  tak, že:

d)  $(A, X, H) \in M_{R_n} \Rightarrow X \in D'$ ,

$(H, X, B) \in M_{R_n} \Rightarrow X \in D''$ .

N1.  $(A, B, C, D) \in N_{R_n} \Rightarrow A, B, C, D \in R_1 \subset R_n$  navzájem různé,  $(C, B, A, D), (B, A, D, C) \in N_{R_n}$ .

- N2.  $A, C \in \mathbf{R}_1 \subset \mathbf{R}_n, A \neq C \Rightarrow$  existuje  $(A, B, C, D) \in \mathbf{N}_{\mathbf{R}_n}$ .
- N3. Navzájem různé  $A, B, C, D \in \mathbf{R}_1 \subset \mathbf{R}_n \Rightarrow$  právě jeden ze tří vztahů:  
 $(A, B, C, D) \in \mathbf{N}_{\mathbf{R}_n}, (A, C, B, D) \in \mathbf{N}_{\mathbf{R}_n}, (A, B, D, C) \in \mathbf{N}_{\mathbf{R}_n}$ .
- N4.  $A, B, C, D, E \in \mathbf{R}_1 \subset \mathbf{R}_n, A \neq C \neq B, (A, C, B, D), (A, C, B, E) \notin \mathbf{N}_{\mathbf{R}_n} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow (A, D, B, E) \notin \mathbf{N}_{\mathbf{R}_n}$ .
- N5.  $(A, C, B, D), (A, C, B, E) \in \mathbf{N}_{\mathbf{R}_n} \Rightarrow (A, D, B, E) \notin \mathbf{N}_{\mathbf{R}_n}$ .
- N6.  $A, B, C, D \in \mathbf{R}_1 \subset \mathbf{R}_2 \subset \mathbf{R}_n, E, F, G, H \in \mathbf{R}'_1 \subset \mathbf{R}_2, Q \in \mathbf{R}_2, Q \notin \mathbf{R}_1, Q \notin \mathbf{R}'_1$ .  
 $E \in AQ, F \in BQ, G \in CQ, H \in DQ, (A, B, C, D) \in \mathbf{N}_{\mathbf{R}_n} \Rightarrow (E, F, G, H) \in \mathbf{N}_{\mathbf{R}_n}$ .
- DN. Jestliže  $A, B, C \in \mathbf{R}_1 \subset \mathbf{R}_n, A \neq B \neq C \neq A, X \in \mathbf{D} \Leftrightarrow (A, X, B, C) \in \mathbf{N}_{\mathbf{R}_n}, \emptyset \neq$   
 $\neq \mathbf{D}' \subset \mathbf{D}, \emptyset \neq \mathbf{D}'' \subset \mathbf{D}$ ,  
 a)  $\mathbf{D}' \cup \mathbf{D}'' = \mathbf{D}, \mathbf{D}' \cap \mathbf{D}'' = \emptyset$ ,  
 b)  $Y \in \mathbf{D}', (A, X, Y, C) \in \mathbf{N}_{\mathbf{R}_n} \Rightarrow X \in \mathbf{D}'$ ,  
 c)  $Y \in \mathbf{D}'', (Y, X, B, C) \in \mathbf{N}_{\mathbf{R}_n} \Rightarrow X \in \mathbf{D}''$ ,  
 potom existuje  $H \in \mathbf{D}$  tak, že:  
 d)  $(A, X, H, C) \in \mathbf{N}_{\mathbf{R}_n} \Rightarrow X \in \mathbf{D}'$ ,  
 $(H, X, B, C) \in \mathbf{N}_{\mathbf{R}_n} \Rightarrow X \in \mathbf{D}''$ .
- S1.  $(A, B, C, D) \in \mathbf{S}_{\mathbf{R}_n} \Rightarrow A \neq B, C \neq D. A, B \in \mathbf{R}_n, A \neq B \Rightarrow (A, B, B, A) \in \mathbf{S}_{\mathbf{R}_n}$ .
- S2.  $A, B, C, F \in \mathbf{R}_n, A \neq B, C \neq F \Rightarrow$  existuje právě jeden  $D \in CF = \mathbf{R}_1 \subset \mathbf{R}_n$ ,  
 $(D, C, F) \notin \mathbf{M}_{\mathbf{R}_n}, (A, B, C, D) \in \mathbf{S}_{\mathbf{R}_n}$ .
- S3.  $(A, B, C, D), (C, D, E, F) \in \mathbf{S}_{\mathbf{R}_n} \Rightarrow (A, B, E, F) \in \mathbf{S}_{\mathbf{R}_n}$ .
- S4.  $(A, B, C), (D, E, F) \in \mathbf{M}_{\mathbf{R}_n}, (A, B, D, E), (B, C, E, F) \in \mathbf{S}_{\mathbf{R}_n} \Rightarrow (A, C, D, F) \in \mathbf{S}_{\mathbf{R}_n}$ .
- S5. Jestliže nezávislé  $A, B, C \in \mathbf{R}_n$ , nezávislé  $D, E, G \in \mathbf{R}_n, (A, B, D, E) \in \mathbf{S}_{\mathbf{R}_n}$ , potom  
 existuje právě jeden  $F \in DEG = \mathbf{R}_2 \subset \mathbf{R}_n, F \notin DE = \mathbf{R}_1 \subset \mathbf{R}_2, (A, C, D, F),$   
 $(B, C, E, F) \in \mathbf{S}_{\mathbf{R}_n}, X \in DE \Rightarrow (F, X, G) \notin \mathbf{M}_{\mathbf{R}_n}$ .
- S6. Nezávislé  $A, B, C \in \mathbf{R}_n$ , nezávislé  $D, E, F \in \mathbf{R}_n, (A, B, D, E), (A, C, D, F),$   
 $(B, C, E, F) \in \mathbf{S}_{\mathbf{R}_n}, (A, G, B), (D, H, E) \in \mathbf{M}_{\mathbf{R}_n}, (A, G, D, H) \in \mathbf{S}_{\mathbf{R}_n} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow (C, G, F, H) \in \mathbf{S}_{\mathbf{R}_n}$ .

2. Místo (8) lze  $S_{L_n}$  definovat pomocí grupy všech kolineací  $K$  prostoru  $P'_n$  ([4], str. 132) zobrazujících  $K(\mathbf{Q}_{n-1}) = \mathbf{Q}_{n-1}, K(A) = C, K(B) = D$ .

3. Důkazy (13)–(17) jsou v pracích: *Kateřina J.*: „Některé  $n$ -rozměrné prostory definované axiomatically a analyticky“ a „O isomorfismu  $n$ -rozměrných prostorů Lobačevského“, které autor předložil k publikaci v *Matematickém časopise SAV* v Bratislavě v roce 1964 a 1965, avšak dosud nebyly publikovány.

#### Literatura

- [1] Čech E.: *Bodové množiny*. Academia, Praha 1966. 1. vydání JČMF, Praha 1936.  
 [2] Čech E.: *Topological Spaces*. Revised by Z. Frolík and M. Katětov. Academia, Prague 1966.  
 [3] Čech E.: *Základy analytické geometrie I*. Přírodovědecké vydavatelství, Praha 1951.

- [4] Čech E.: Základy analytické geometrie II. Přírodovědecké vydavatelství, Praha 1952.  
 [5] Ефимов Н. В.: Высшая геометрия. Физматгиз, Москва 1961.  
 [6] Kateřinařák J.: Axiomatická metoda v  $n$ -rozměrné geometrii Lobačevského. Sborník prací Vysoké školy dopravní a Výzkumného ústavu dopravního, rok 1967, číslo 5, str. 17–29. Nakladatelství dopravy a spojů, Praha 1967.  
 [7] Kolmogoroff A.: Zur Begründung der projektiven Geometrie. Ann. of Math., 33, No 1 (1932), str. 175–176.  
 [8] Понтрягин Л. С.: Непрерывные группы. Гостехиздат, Москва 1954.  
 [9] Vyšín J.: Soustava axiomů eukleidovské geometrie. Nakladatelství ČSAV, Praha 1959.

*Adresa autora:* Žilina, Rauchova 9 (Vysoká škola dopravní).

### Summary

#### COMPLEX EXTENSION OF SOME POINT $\{J\}_n$ -SPACES $R_n$

JOSEF KATEŘINAŘÁK, Žilina

Under the point  $\{J\}_n$ -space  $R_n$  of dimension  $n \geq 2$  we understand non-empty set (its elements are called points) with  $n - 1$  systems of non-empty subsets (subspaces) fulfilling the generalized Hilbert axioms of incidence J1 – J5. If we presuppose for  $R_n$  validity of any further axioms E, L, P, GE, GP and the existence of the subsets  $M_{R_n} \subset R_n \times R_n \times R_n$ ,  $N_{R_n} \subset R_n \times R_n \times R_n \times R_n$ ,  $S_{R_n} \subset R_n \times R_n \times R_n \times R_n$  fulfilling the corresponding axioms M1 – M4, DM, N1 – N6, DN, S1 – S6, we get  $\{J, E, GE, M, DM\}_n$ -space  $A_n$  (affine),  $\{J, P, GP, N, DN\}_n$ -space  $P_n$  (projective),  $\{J, E, M, DM, S\}_n$ -space  $E_n$  (Euclidean),  $\{J, L, M, DM, S\}_n$ -space  $L_n$  (Lobachevskian). To each of the four spaces  $L_n, A_n, E_n, P_n$  is given the construction of the three remaining spaces that they are in a set-relation  $L_n \subset A_n = E_n \subset P_n$  (extension-space or restriction-space) according to theorems 1, 2, 3. To each of the four spaces  $L_n, A_n, E_n, P_n$  is given the construction of  $\{J, E, GE\}_n$ -space  $R_n$  or  $\{J, P, GP\}_n$ -space  $R_n$  isomorphic with analytical complex space  $E_n(i)$  or  $P_n(i)$  in [4] as its complex extension  $R_n \supset L_n, R_n \supset A_n, R_n \supset E_n, R_n \supset P_n$  according to theorems 1, 2, 3, 4, 5.