Adolf Karger

Poznámka k definici Kleinovy kvadriky v metrické přímkové geometrii

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 94 (1969), No. 1, 70--77

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117650`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 94 (1969), Praha

POZNÁMKA K DEFINICI KLEINOVY KVADRIKY V METRICKÉ PŘÍMKOVÉ GEOMETRII

ADOLF KARGER, Praha

(Došlo dne 23. října 1967)

1. ÚVOD

V článku je podána geometrická definice Kleinovy kvadriky pro metrickou přímkovou geometrii s použitím pojmů teorie Lieových grup a algeber a je nalezeno přirozené zobrazení přímkového prostoru eliptické, hyperbolické a eukleidovské třídimensionální geometrie na tuto kvadriku.

Zmíněné přiřazení je, zhruba řečeno, následující: Každé přímce je přiřazena jednoparametrická podgrupa Lieovy grupy pohybů v uvažované geometrii, je to podgrupa rotací kolem této přímky. Této podgrupě je přiřazen vektor z Lieovy algebry (tečný vektor v jednotce grupy) příslušné Lieovy grupy. Tomuto vektoru je pak přirozenou projekcí z Lieovy algebry do projektivního prostoru $\mathscr{P}_5$ tvořeného jednodimensionálními podprostory této algebry přiřazen bod v $\mathscr{P}_5$. Tyto body vytvoří kvadriku a je ukázáno, že tato kvadrika je skutečně Kleinovou kvadrikou, známou v klasické přímkové geometrii. Vzhledem k tomu, že použitý aparát není běžně používaný v klasické diferenciální geometrii, je celá konstrukce provedena podrobně, zvláště v části týkající se Lieových grup a algeber.

2. GRUPY POHYBŮ V NEEUKLIDOVSKÝCH GEOMETRIÍCH

Buď $\mathscr{V}$ čtyřdimensionální vektorový prostor nad tělesem reálných čísel $\mathbf{R}$. Zvolme v něm basi $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ a ztotožněme vektory $e_0, \ldots, e_3$ se čtveřicemi

$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right), \quad \left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right), \quad \left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right), \quad \left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Ve $\mathscr{V}$ zvolme kvadratickou formu

$$\boldsymbol{f}_\delta = x_0^2 + \delta \sum_{\alpha=1}^{3} x_\alpha^2 , \quad \text{kde} \quad \delta = -1, 0 \text{ nebo } 1$$

a umluvme se, že kvadratickou formu a k ní příslušnou symetrickou bilineární formu budeme označovat týmž písmenem. Uvažujme nyní dále množinu vektorů $\boldsymbol{v} \in \mathscr{V}$, pro něž platí

$$\boldsymbol{f}_\delta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = \pm 1 .$$

V případě $\boldsymbol{f}_0$ jsou to dvě nadroviny $x_0 = \pm 1$. V tomto případě zvolme v podprostoru, daném rovnicí $x_0 = 0$ za metrickou formu

$$\varphi = \sum_{\alpha=1}^{3} x_\alpha^2 .$$

Ztotožníme-li ve všech třech případech vektory navzájem opačné, dostaneme hyperbolický prostor (pro jednoduchost jej označme $\mathscr{S}_{-1}$) pro $\delta = -1$, euklidovský ($\mathscr{S}_0$) pro $\delta = 0$ a eliptický prostor ($\mathscr{S}_1$) pro $\delta = 1$ dimense 3. Grupa pohybů v těchto třech prostorech je podgrupa v $GL(4)$, zachovávající formu $\boldsymbol{f}_\delta$ (a v případě $\boldsymbol{f}_0$ ještě formu φ). Označme ji G_δ a nalezněme její vyjádření. Omezíme se na případ $\mathscr{S}_{-1}$, protože u $\mathscr{S}_0$ a $\mathscr{S}_1$ je to snadné.

Vzhledem k tomu, že zvolená base je ortonormální, musí pro každé $g \in G_{-1}$ platit

$$(1) \qquad \boldsymbol{f}_{-1}(g\boldsymbol{e}_0, g\boldsymbol{e}_0) = 1 , \quad \boldsymbol{f}_{-1}(g\boldsymbol{e}_i, g\boldsymbol{e}_j) = -\delta_{ij} ,$$

kde $i, j = 0, \ldots, 3$ a i a j nejsou současně rovna nule. Prvky z $GL(4)$ pišme ve tvaru $g = ((a_i^j + \delta_i^j))$ a čísla a_i^j považujme za souřadnice na grupě $GL(4)$. Vektoru $\boldsymbol{e}_k$ je podle hořeního přiřazena matice $((\delta_k^i))$. Pak $g\boldsymbol{e}_k = ((a_i^j + \delta_i^j)) . ((\delta_k^i)) = ((a_k^j + \delta_k^j))$.

Z (1) tedy dostaneme

$$(2) \qquad \boldsymbol{f}_{-1}(g\boldsymbol{e}_0, g\boldsymbol{e}_0) = (a_0^0 + 1)^2 - \sum_{\alpha=1}^{3} (a_0^\alpha)^2 = 1 ,$$

$$\boldsymbol{f}_{-1}(g\boldsymbol{e}_i, g\boldsymbol{e}_j) = (a_i^0 + \delta_i^0)(a_j^0 + \delta_j^0) - \sum_{\alpha=1}^{3} (a_i^\alpha + \delta_i^\alpha)(a_j^\alpha + \delta_j^\alpha) = -\delta_{ij} ,$$

kde i a j nejsou současně nuly.

Najděme nyní Lieovu algebru $\mathfrak{G}_{-1}$ grupy G_{-1}. Na G_{-1} zvolme diferencovatelnou křivku $g(\mathrm{t}) = ((a_i^j(\mathrm{t}) + \delta_i^j))$ takovou, že $g(\mathrm{o})$ je právě jednotka grupy $GL(4)$, tj. nechť

$$(3) \qquad a_i^j(\mathrm{o}) = 0 \quad \text{pro} \quad i, j = 0, 1, \ldots, 3 .$$

Křivka $g(\mathrm{t})$ splňuje rovnice (2) pro všechna t v nějakém okolí nuly. Najděme podmínky, kterým musí vyhovovat souřadnice jejího tečného vektoru pro $\mathrm{t} = 0$. Derivujme tedy pravé části vztahů (2) a dosaďme ze (3). Dostaneme

(4) $$2(a_0^0 + 1)(a_0^0)' - 2\sum_{\alpha=1}^{3} a_0^\alpha (a_0^\alpha)' = 0\,,$$

a tedy

$$(a_0^0)' = 0\,.$$

$$(a_i^0)'(a_j^0 + \delta_j^0) + (a_i^0 + \delta_i^0)(a_j^0)' - \sum_{\alpha=1}^{3}[(a_i^\alpha)'(a_j^\alpha + \delta_j^\alpha) + (a_i^\alpha + \delta_i^\alpha)(a_j^\alpha)'] = 0\,,$$

tj.

(5) $$(a_i^0)'\,\delta_j^0 + \delta_i^0(a_j^0)' - \sum_{\alpha=1}^{3}[(a_i^\alpha)'\,\delta_j^\alpha + \delta_i^\alpha(a_j^\alpha)'] = 0\,.$$

V (5) rozlišme nyní jednotlivé případy:

a) $i = 0, j \neq 0$. Pak $(a_j^0)' - \sum_{\alpha=1}^{3}(a_0^\alpha)'\,\delta_j^\alpha = 0$ tj. $(a_j^0)' - (a_0^j)' = 0$.

b) $i \neq 0, j = 0$. V tomto případě dostaneme totéž jako v a).

c) $i \neq 0, j \neq 0$. Pak $\sum_{\alpha=1}^{3}[(a_i^\alpha)'\,\delta_j^\alpha + \delta_i^\alpha(a_j^\alpha)'] = 0$, tj. $(a_i^j)' + (a_j^i)' = 0$.

Pro tečný vektor $\mathsf{T} = A_j^i(\partial/\partial a_j^i)_0$ grupy G_{-1} v jednotce tedy platí

(6) $$A_i^i = 0\,,\quad A_j^0 = A_0^j\,,\quad A_j^i = -A_i^j\,,$$

kde v posledním vztahu je $i, j \neq 0$. Je tedy $\mathfrak{G}_{-1}$ podalgebra v $\mathfrak{G}\mathfrak{L}(4)$, pro niž platí (6). Stanovíme-li obdobně algebry $\mathfrak{G}_0$ a $\mathfrak{G}_1$, lze souhrnně napsat matici z $\mathfrak{G}_\delta$ ve tvaru

$$\left(\begin{pmatrix} 0, & -\delta a \\ a, & A \end{pmatrix}\right),$$

kde a je typu 1×3 resp. 3×1 a A je antisymetrická matice typu 3×3.

Označme E_i^j matici, pro kterou $a_i^j = 1$ a ostatní prvky jsou nuly a nechť $\varepsilon_{ijk} = \operatorname{sg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}$. Platí

$$[E_i^j, E_k^l] = \delta_i^l E_k^j - \delta_k^j E_i^l\,.$$

V $\mathfrak{G}_\delta$ zvolme basi $X_k = \varepsilon_{ijk}E_i^j$, $X_0^i = E_0^i - \delta E_i^0$, kde $i, j, k = 1, 2, 3$. Pro algebru $\mathfrak{G}_\delta$ pak platí následující tabulka násobení:

(7) $$[X_i, X_j] = \varepsilon_{ijk}X_k\,,\quad [X_0^i, X_0^j] = \delta\varepsilon_{ijk}X_k\,,\quad [X_0^i, X_j] = \varepsilon_{ijk}X_0^k\,.$$

3. ALGEBRY DUÁLNÍCH VEKTORŮ

Označme $\mathbf{D}_\delta$ okruh dvojných, duálních resp. komplexních čísel ($\delta = 1, 0$ resp. -1), tj. dvoudimensionální komutativní algebru nad $\mathbf{R}$, s jednotkovým prvkem, ve které existuje na jednotce nezávislý prvek ε, pro nějž platí $\varepsilon^2 = \delta$.

Buď nyní $\mathscr{A}$ Lieova algebra nad $\mathbf{R}$. Tensorový součin $\mathbf{D}_\delta \otimes \mathscr{A}$ je Lieovou algebrou nad $\mathbf{R}$, definujeme-li

$$[\sum_i \varrho_i \otimes a_i, \sum_j \sigma_j \otimes b_j] = \sum_{i,j} \varrho_i \sigma_j \otimes [a_i, b_j], \quad \text{kde} \quad \varrho_i, \sigma_j \in \mathbf{D}_\delta,\ a_i, b_j \in \mathscr{A},$$

pro všechny konečné součty.

Poznámka. Zavedeme-li ještě $\varrho \sum_i \varrho_i \otimes a_i = \sum_i (\varrho \varrho_i) \otimes a_i$ pro $\varrho \in \mathbf{D}_\delta$, stane se $\mathbf{D}_\delta \otimes \mathscr{A}$ $\mathbf{D}_\delta$ – rozšířením algebry $\mathscr{A}$. Je-li $e_1, \ldots, e_n$ base v $\mathscr{A}$, tvoří vektory $e_1, \ldots, e_n, \varepsilon e_1, \ldots, \varepsilon e_n$ basi v $\mathbf{D}_\delta \otimes \mathscr{A}$ a platí

$$[e_i, \varepsilon e_j] = \varepsilon[e_i, e_j], \quad [\varepsilon e_i, \varepsilon e_j] = \delta[e_i, e_j]. \tag{8}$$

(Znaménko tensorového násobení je pro stručnost vynecháno.) Označíme-li $\mathscr{U}$ jednoduchou nerozštěpitelnou třídimensionální Lieovu algebru nad $\mathbf{R}$ ($\mathscr{U}$ je algebra obyčejných vektorů s násobením například $[a, b] = a \times b$ pro $a, b \in \mathscr{U}$), platí

Věta 1.

$$\mathbf{D}_\delta \otimes \mathscr{U} \textit{ je pro } \begin{matrix} \delta = 1 \\ \delta = 0 \\ \delta = -1 \end{matrix} \textit{ algebrou } \begin{matrix} \textit{dvojných} \\ \textit{duálních} \\ \textit{komplexních} \end{matrix} \textit{ vektorů.}$$

Důkaz. Vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{D}_\delta \otimes \mathscr{U}$ pišme ve tvaru $\mathbf{u} = x_2 + \varepsilon x_1$, $\mathbf{v} = y_2 + \varepsilon y_1$, kde $x_i, y_i \in \mathscr{U}$. Pak

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = [x_2 + \varepsilon x_1, y_2 + \varepsilon y_1] = x_2 \times y_2 + \delta x_1 \times y_1 + \varepsilon(x_1 \times y_2 + x_2 \times y_1)$$

podle (8) a to bylo třeba ukázat.

Snadným důsledkem této věty je

Věta 2. *$\mathbf{D}_\delta \otimes \mathscr{U}$ je isomorfní s $\mathfrak{G}_\delta$.*

Důkaz. Je-li Y_1, Y_2, Y_3 ortonormální base v $\mathscr{U}$, stačí položit

$$Y_i \equiv X_i, \quad \varepsilon Y_i \equiv X_0^i.$$

Definice. Buď $\mathbf{x} = x_2 + \varepsilon x_1$ vektor z $\mathbf{D}_\delta \otimes \mathscr{U}$. Označme (x, y) obyčejný skalární součin libovolných vektorů $x, y \in \mathscr{U}$. Na $\mathbf{D}_\delta \otimes \mathscr{U}$ zaveďme kvadratické formy

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = (x_2, x_2) + \delta(x_1, x_1), \quad \mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (x_2, x_1).$$

Poznámka. (x, y) pro x, y z $\mathscr{U}$ je bilineární forma příslušná Killingově kvadratické formě na $\mathscr{U}$ a je tedy invariantní.

Věta 3. *Formy* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ *a* $\mathsf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ *jsou invariantní kvadratické formy na* $\mathbf{D}_\delta \otimes \mathscr{U}$.

Důkaz. Kvadratická forma $F(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ je invariantní na Lieově algebře $\mathscr{A}$ právě tehdy, jestliže platí

$$F(\mathbf{x}, [\mathbf{y}, \mathbf{z}]) + F([\mathbf{x}, \mathbf{z}], \mathbf{y}) = 0 .$$

Tvrzení věty je pak snadným důsledkem invariantnosti formy $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ na $\mathscr{U}$.

4. „ISOTROPICKÁ“ ALGEBRA PŘÍMKY

Grupa G_δ je grupou lineárních transformací prostoru $\mathscr{V}$, tj. representací G_δ ve $\mathscr{V}$. Tato representace přirozeným způsobem indukuje representaci algebry $\mathfrak{G}_\delta$ ve $\mathscr{V}$, tj. $\mathfrak{G}_\delta$ lze považovat za algebru endomorfizmů prostoru $\mathscr{V}$. Base $\boldsymbol{e}_0, \ldots, \boldsymbol{e}_3$ ve $\mathscr{V}$ indukuje (opět přirozeným způsobem) basi v $\mathfrak{G}_\delta$. Označíme-li $\mathbf{R}\boldsymbol{v}$ výsledek působení zobrazení $\mathbf{R} \in \mathfrak{G}$ na vektor $\boldsymbol{v} \in \mathscr{V}$, je při takto zvolených basích $\mathbf{R}\boldsymbol{v}$ rovno součinu matice $\mathbf{R}$ a sloupce $\boldsymbol{v}$. Zapíšeme-li pro jednoduchost vektor $\boldsymbol{v} = \sum_{i=0}^{3} a_i \boldsymbol{e}_i$ ve tvaru

$$\boldsymbol{v} = a_0 + \boldsymbol{a}\,, \quad \text{kde} \quad \boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i \boldsymbol{e}_i$$

a vektor $\mathbf{R}$ ve tvaru

$$\mathbf{R} = \boldsymbol{x}_2 + \varepsilon \boldsymbol{x}_1\,,$$

je

$$\mathbf{R}\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{x}_2 + \varepsilon \boldsymbol{x}_1)(a_0 + \boldsymbol{a}) = (\delta \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{a}) + a_0 \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \times \boldsymbol{a}\,. \tag{9}$$

Buď nyní $p \equiv \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$ přímka v $\mathscr{S}_\delta$, určená vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathscr{V}$. Existuje jediná (až na transformace kanonického parametru) jednoparametrická podgrupa v G_δ, zachovávající bodově přímku p. Skutečně; řešme rovnice

$$\mathbf{R}\boldsymbol{u} = 0\,, \quad \mathbf{R}\boldsymbol{v} = 0 \tag{10}$$

pro neznámé $\mathbf{R} \in \mathfrak{G}_\delta$. Píšeme-li $\mathbf{R} = \boldsymbol{x}_2 + \varepsilon \boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{u} = a_0 + \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{v} = b_0 + \boldsymbol{b}$, dávají rovnice (10) po dosazení z (9):

$$(\delta \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{a}) + a_0 \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \times \boldsymbol{a} = 0\,, \quad (\delta \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{b}) + b_0 \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \times \boldsymbol{b} = 0\,. \tag{11}$$

Předpokládejme nejdříve, že $\delta \neq 0$ a že $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ jsou lineárně nezávislé vektory. Pak první část rovnic (11) dává $(\delta \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{a}) = 0$ a $(\delta \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{b}) = 0$ tj. $\boldsymbol{x}_1 = \lambda \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, kde $\lambda \in \mathbf{R}$. Dosaďme nyní $\boldsymbol{x}_1$ do druhé části rovnic (11):

$$\lambda a_0 \,.\, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{x}_2 \times \boldsymbol{a} = 0 \quad \text{tj.} \quad \boldsymbol{a} \times (\lambda a_0 \boldsymbol{b} - \boldsymbol{x}_2) = 0\,,$$

$$\lambda b_0 \,.\, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{x}_2 \times \boldsymbol{b} = 0 \quad \text{tj.} \quad \boldsymbol{b} \times (-\lambda b_0 \boldsymbol{a} - \boldsymbol{x}_2) = 0\,.$$

To znamená, že existují $\mu, \nu \in \mathbf{R}$ taková, že platí

$$\lambda a_0 \boldsymbol{b} - \boldsymbol{x}_2 = \mu \boldsymbol{a}, \quad \text{a tedy} \quad \boldsymbol{x}_2 = \lambda a_0 \boldsymbol{b} - \mu \boldsymbol{a},$$

$$-\lambda b_0 \boldsymbol{a} - \boldsymbol{x}_2 = \nu \boldsymbol{b}, \quad \text{a tedy} \quad \boldsymbol{x}_2 = -\nu \boldsymbol{b} - \lambda b_0 \boldsymbol{a}.$$

Po porovnání dostaneme

$$\boldsymbol{x}_2 = \lambda(a_0 \boldsymbol{b} - b_0 \boldsymbol{a}).$$

Stejný vztah dostaneme i pro $\delta = 0$. Rovněž tak pro $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ lineárně závislá. Přímce $p \equiv \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$ lze tedy přiřadit jednodimensionální podprostor v $\mathfrak{G}_\delta$, označme jej $\mathfrak{H}_p$, tvořený vektory

$$X = \lambda\{(a_0 \boldsymbol{b} - b_0 \boldsymbol{a}) + \varepsilon \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\}.$$

(Toto přiřazení je invariantní, neboť rovnice ad $g\mathbf{R} \,.\, g\boldsymbol{u} = 0$ pro $g \in G_\delta$ je ekvivalentní s rovnicí $\mathbf{R}\boldsymbol{u} = 0$, invariantnost je ostatně zřejmá z geometrického významu vektoru $\mathbf{R}$.)

Věta 4. *Vektor* $\mathbf{X} \in \mathfrak{H}_p$ *je isotropický vzhledem k formě* $\mathbf{K}$, *tj. platí* $\mathbf{K}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = 0$. *Obráceně nechť* $0 \neq \mathbf{X} \in \mathfrak{G}_\delta$, $\mathbf{K}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = 0$ *a nechť ještě* $\langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle \neq 0$ *v případě* $\delta = 0$. *Pak existuje jediná přímka* p *z* $\mathscr{S}_\delta$ *taková, že* $\mathbf{X}$ *generuje její algebru* $\mathfrak{H}_p$.

Důkaz. První část je zřejmá z vyjádření algebry $\mathfrak{H}_p$ pomocí vektorů přímky. Obráceně nechť tedy $(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1) = 0$. Řešme rovnici

$$(\delta \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{a}) + a_0 \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \times \boldsymbol{a} = 0$$

pro neznámé a_0 a $\boldsymbol{a}$. Předpokládejme nejdříve, že $\boldsymbol{x}_1 \neq 0$ a $\boldsymbol{x}_2 \neq 0$. Pak $\boldsymbol{a} = \alpha \boldsymbol{x}_2 + \beta \boldsymbol{x}_2 \times \boldsymbol{x}_1$, kde $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, neboť $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2 \perp \boldsymbol{x}_1$ a $\boldsymbol{x}_2 \times \boldsymbol{x}_1 \perp \boldsymbol{x}_1$. Dosadíme-li, dostaneme $a_0 \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \times (\alpha \boldsymbol{x}_2 + \beta \boldsymbol{x}_2 \times \boldsymbol{x}_1) = a_0 \boldsymbol{x}_1 + \beta \boldsymbol{x}_2 \times (\boldsymbol{x}_2 \times \boldsymbol{x}_1) = a_0 \boldsymbol{x}_1 - \beta(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_2)\, \boldsymbol{x}_1 = (a_0 - \beta(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_2))$. $\boldsymbol{x}_1 = 0$. Je tedy $a_0 = \beta(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_2)$ a máme řešení $\boldsymbol{u} = a_0 + \boldsymbol{a} = \beta(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_2) + \alpha \boldsymbol{x}_2 + \beta \boldsymbol{x}_2 \times \boldsymbol{x}_1$ pro všechna $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Lineárně nezávislá řešení jsou např.:

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{x}_2, \quad \boldsymbol{u}_2 = (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_2) + \boldsymbol{x}_2 \times \boldsymbol{x}_1.$$

Tato $\boldsymbol{u}_1$ a $\boldsymbol{u}_2$ tvoří basi řešení i v případě kdy $\boldsymbol{x}_1 = 0$. Zabývejme se tedy ještě případem $\boldsymbol{x}_2 = 0$.

a) $\delta = 0$. Pak $a_0 = \pm 1$ a $a_0 \boldsymbol{x}_1 = 0$, a tedy $x_1 = 0$ a to je spor. Vektory s $\langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle = 0$ je tedy skutečně u $\mathfrak{G}_0$ třeba vyloučit.

b) $\delta \neq 0$. Rovnice se pak redukují na $(\delta x_1, \boldsymbol{a}) = 0$ a $a_0 \boldsymbol{x}_1 = 0$. Z nich plyne $a_0 = 0$ a $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{x}_1$. Řešením je tedy opět jediná přímka, jak vyžaduje tvrzení věty. Tím je důkaz proveden.

Zabývejme se nyní poněkud podrobněji případem $\delta = -1$. Označme $\mathscr{S}^+$ množinu bodů z $\mathscr{S}_{-1}$ danou vztahem $\boldsymbol{f}_{-1}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = -1$, $\boldsymbol{v} \in \mathscr{V}$; množinu bodů z $\mathscr{S}_{-1}$ danou vztahem $\boldsymbol{f}_{-1}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = +1$ označme $\mathscr{S}^-$. $\mathscr{S}^+(\mathscr{S}^-)$ je hyperbolický prostor kladné (záporné) křivosti. Mějme v $\mathscr{S}_{-1}$ přímku $p \equiv \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$; $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathscr{V}$. Vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ lze volit tak, aby platilo $\boldsymbol{f}_{-1}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \neq 0$ a $\boldsymbol{f}_{-1}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$. Snadno se ukáže, že pro vektory $\mathbf{X} \in \mathfrak{H}_p$ pak platí $\langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle = -\lambda^2 \boldsymbol{f}_{-1}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \,.\, \boldsymbol{f}_{-1}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$, kde $\lambda \in \mathbf{R}$. Nechť nejdříve $\boldsymbol{f}_{-1}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 1$. Pak nutně $\boldsymbol{f}_{-1}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = -1$ a $\langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle > 0$; přímky $p \cap \mathscr{S}^-$ a $p \cap \mathscr{S}^+$ jsou hyperbolické. V $\mathscr{S}^-$ jsou tímto vyčerpány všechny přímky. Je-li $\boldsymbol{f}_{-1}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}_{-1}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = -1$, je $\langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle < 0$ a $p \cap \mathscr{S}^+ = p$ je eliptická přímka; je-li $\boldsymbol{f}_{-1}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0$, je i $\langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle = 0$ a $p \cap \mathscr{S}^+ = p$ je parabolická. Celkem tedy platí: Přímkám z $\mathscr{S}^-$ odpovídají ty vektory z $\mathfrak{G}_{-1}$, pro které je

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle > 0 \quad \text{a} \quad \mathbf{K}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = 0 \,.$$

Přímkám z $\mathscr{S}^+$ odpovídají všechny vektory z $\mathfrak{G}_{-1}$, pro které $\mathbf{K}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = 0$ a to tak, že pro hyperbolické je $\langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle > 0$, pro eliptické je $\langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle < 0$ a pro parabolické je $\langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle = 0$. Přímkám z $\mathscr{S}_0$ odpovídají vektory z $\mathfrak{G}_0$, pro něž $\mathbf{K}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = 0$ a $\langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle \neq 0$. Přímkám z $\mathscr{S}_1$ odpovídají všechny vektory z $\mathfrak{G}_1$, pro něž $\mathbf{K}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = 0$ (rozumí se nenulové).

5. DEFINICE KLEINOVY NADKVADRIKY

Buď $\mathscr{P}_5$ projektivní prostor všech jednodimensionálních podprostorů v $\mathfrak{G}_\delta$. Označme π přirozenou projekci z $\mathfrak{G}_\delta$ do $\mathscr{P}_5$. Rovnicí $\mathbf{K}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = 0$ je v $\mathscr{P}_5$ definována kvadrika, označme ji $\mathbf{K}$. V části 4. jsme definovali přiřazení, označme je $\boldsymbol{k}$, které každé přímce p z $\mathscr{S}_\delta$ přiřadilo 1-dimensionální podprostor $\mathfrak{H}_p$ v $\mathfrak{G}_\delta$. Tomuto $\mathfrak{H}_p$ je projekcí π přiřazen bod $\mathbf{K}(p) = \pi \mathfrak{H}_p$. Podle věty 4 je $\mathbf{K}(p) \in \mathbf{K}$. Snadno se nahlédne, že souřadnice vektorů z $\mathfrak{H}_p$ jsou skutečně Plückerovými souřadnicemi (bodovými) přímky p a z definice formy $\mathbf{K}(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ je vidět, že $\mathbf{K}$ je skutečně Kleinova nadkvadrika v $\mathscr{P}_5$. Poznamenejme ještě, že diagram

$$\begin{tikzcd}
p \arrow[r, "\mathbf{k}"] \arrow[d, "g"'] & \mathfrak{H}_p \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\operatorname{ad} g"] & \mathbf{K}(p) \arrow[d, "\pi \operatorname{ad} g"] \\
p' \arrow[r, "\mathbf{k}"] & \mathfrak{H}_{p'} \arrow[r, "\pi"] & \mathbf{K}(p')
\end{tikzcd}$$

je komutativní (π ad g značí zobrazení indukované zobrazením ad g v $\mathscr{P}_5$).

Forma $\langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle$ dává pak v $\mathscr{P}_5$ metriku eliptickou pro $\delta = 1$, pseudoeliptickou pro $\delta = 0$ a hyperbolickou pro $\delta = -1$. Tím je invariantním způsobem každé přímce z $\mathscr{S}_\delta$ přiřazen bod na Kleinově nadkvadrice a obráceně (s omezením pro $\mathscr{S}_0$ na $\langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle \neq 0$; $\langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle = 0$ je v tomto případě nevlastní prostor dimense 3 v pseudoeliptickém prostoru dimense 5). Z toho všeho plyne, že naše definice Kleinovy nadkvadriky je shodná s definicí běžně užívanou.

Seznam literatury

[1] *Розенфелд Б. А.:* Неевклидовы геометрии, Moskva 1955.
[2] *Jacobson N.:* Lie Algebras, ruský překlad, Moskva 1964.
[3] *Понтрягин Л. С.:* Непрерывные группы, Moskva 1954.

Adresa autora: Praha 2, Horská 4 (České vysoké učení technické).

Zusammenfassung

EINE BEMERKUNG ZUR DEFINITION DER KLEIN'SCHEN QUADRIK IN DER METRISCHEN LINIENGEOMETRIE

ADOLF KARGER, Praha

In der Arbeit wird die Definition der Klein'schen Quadrik für die hyperbolische, elliptische und euklidische Liniengeometrie unter Verwendung der Theorie Lie'scher Gruppen und Lie'scher Algebras vorgelegt. Es wird eine natürliche Zuordnung zwischen den Geraden dieser Räume und den Punkten der Klein'schen Quadrik gefunden. Wenn die Lie'sche Gruppe der Bewegungen in elliptischer, hyperbolischer, oder euklidischer Geometrie als G_6, ihre Lie'sche Algebra als $\mathfrak{G}_6$ und der projektive Raum eindimensionaler Unterräume in $\mathfrak{G}_6$ als $\mathscr{P}_5$ bezeichnet wird, kann man die erwähnte Zuordnung folgenderweise beschreiben: Es wird jeder Geraden p eine einparametrige Untergruppe aus G_6, die Gruppe der Drehungen um diese Gerade zugeordnet. Der Lie'schen Algebra $\mathfrak{H}_p$ aus $\mathfrak{G}_6$ dieser Untergruppe wird dann ein Punkt aus $\mathscr{P}_5$ durch die natürliche Projektion zugeordnet. Diese Punkte bilden eine Quadrik in $\mathscr{P}_5$ (der elliptisch, hyperbolisch oder pseudoelliptisch metrisiert wird) und es wird gezeigt, daß diese Quadrik gerade die Klein'sche Quadrik ist, welche aus der klassichen Liniengeometrie bekannt ist.