**Časopis pro pěstování matematiky, roč. 93 (1968), Praha**

# SOLUTIONS PÉRIODIQUES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES OPÉRATIONNELLES: LA MÉTHODE DES DÉVELOPPEMENTS DE FOURIER

MIROSLAV SOVA, Praha

(Reçu le 22 juin 1967, remanié le 10 mars 1968)

Dans cet article, on cherche à trouver les conditions assez générales sous lesquelles les solutions périodiques de l'équation abstraite dans les espaces de Banach de type

$$C\,u''(t) + B\,u''(t) + A\,u(t) = \mathbf{g}(t, u(t)) \tag{1}$$

existent. Cela équivaut à résoudre l'équation (1) sur la circonférence ou sur le tore undimensionnel. Le problème se décompose en deux parties.

D'abord, il faut résoudre le problème linéaire:

$$C\,u''(t) + B\,u'(t) + A\,u(t) = h(t)\,. \tag{2}$$

Dès que l'on connaît l'intégrale complète de (2) dans un espace convenable des fonctions, on peut l'utiliser à résoudre (1) à l'aide d'un théorème sur le point fixe.

L'outil principal pour résoudre le problème (2), ce sont les developpements des fonctions périodiques vectorielles en séries de Fourier. Mais cet outil, tout en étant formellement très simple, n'est pas sans défauts en ce qui concerne la convergence. Pour surmonter les difficultés, il faudra introduire dans la première section plusieurs espaces de fonctions véctorielles dont l'espace des fonctions à semivariation bornée est considéré ici, semble-t-il, pour la première fois. Dans la deuxième section, on introduit la notion de solution généralisée de l'équation (2) et examine sa structure. La troisième section est principale pour le problème linéaire (2). On y présente quatre modèles pour résoudre ce problème et un théorème d'unicité.

La deuxième partie de ce travail est constitué par les sections 4 et 5 où l'on revient au problème (1). Deux méthodes sont utilisées — une de petit paramètre fondée sur le théorème de Banach et l'autre topologique fondée sur le théorème de Schauder. Les deux sections sont en effet indépendantes de la section 3 qui montre seulement certaines conditions spectrales sous lesquelles les hypothèses des théorèmes des sections 4 et 5 sont satisfaites.

Le présent article ne contient pas des exemples ou des applications, qui seront donnés dans un article suivant.

Signalons seulement que dans ces applications les opérateurs $B, C$ sont le plus souvent des multiples de l'identité et $A$ est un opérateur elliptique dans un certain espace de fonctions convenablement choisi.

## 1. PRÉLIMINAIRES

**1,1. Notations.** (1) $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{R}$ seront les corps des nombres complexes ou réels resp., $\boldsymbol{R}^+$ l'ensemble des nombres positifs, (2) $N$ l'ensemble des nombres entiers et $N^+$ des nombres entiers positifs, (3) $E, E_1, E_2, \ldots$ les espaces de Banach complexes (sauf avis contraire) (4) $H, H_1, H_2, \ldots$ les espaces de Hilbert complexes, (5) $\mathfrak{L}^+(E_1, E_2)$ l'ensemble de tous les opérateurs additifs et homogènes définis sur un sous-ensemble linéaire non-vide de $E_1$ avec valuers dans $E_2$ ($\mathfrak{L}^+(E) = \mathfrak{L}^+(E, E)$), (6) $\mathfrak{L}(E_1, E_2)$ l'espace de Banach usuel des opérateurs partout définis et continus de $\mathfrak{L}^+(E_1, E_2)$ (($\mathfrak{L}(E) = \mathfrak{L}(E, E)$), (7) $E^* = \mathfrak{L}(E, \boldsymbol{C})$, (8) $\Lambda$ l'intervalle fermé $\langle 0, 2\pi \rangle$, (9) $M_1 \to M_2$ l'ensemble de toutes les transformations de l'ensemble $M_1$ dans l'ensemble $M_2$.

On dira qu'un sous-ensemble $X \subseteq E^*$ est déterminant si $\|x\| = \sup_{x^* \in X} |x^* x|$ pour tout $x \in E$. On connaît bien que la boule unité $\{x^* : x^* \in E^*, \|x^*\| \leqq 1\}$ est toujours déterminante.

Pour les autres notions et notations élémentaires, voir [2], chap. 1.

Une fonction $f \in \Lambda \to E$ s'appelle périodique si $f(0) = f(2\pi)$. Notons que $f$ désigne toujours une fonction en tant qu'un tout, $f(t)$ la valeur de la fonction $f$ au point $t \in \Lambda$.

**1,2.** $C(\Lambda, E)$ désignera l'espace de Banach des fonctions continues périodiques $f \in \Lambda \to E$, muni de la norme usuelle

$$\|f\| = \|f\|_C = \sup_{t \in \Lambda} \|f(t)\| .$$

**1,3.** On dit que la fonction $f \in \Lambda \to E$ est à semivariation bornée s'il existe une constante $c$ telle que

$$(1) \qquad \Big\|\sum_{j=1}^{p} \alpha_j (f(t_j) - f(t_{j-1}))\Big\| \leqq c$$

pour tout système de points $\{t_j\}_0^p$ de $\Lambda$ tel que $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_{p-1} < t_p = 2\pi$ et pour tout système de constantes $\{\alpha_j\}_1^p$ de $\boldsymbol{C}$ tel que $|\alpha_j| \leqq 1$ pour $j = 1, 2, \ldots, p$. La plus petite de ces constantes $c$ s'appelle la semivariation de $f$ (dans l'intervalle $\Lambda$) et on la désignera par $\mathfrak{v}(f)$.

Si l'on remplace (1) par

$$(2) \qquad \sum_{j=1}^{p} \|f(t_j) - f(t_{j-1})\| \leqq c ,$$

on en obtient la définition de la fonction $f$ à variation bornée dont la variation sera désignée par $\mathfrak{var}(f)$.

**1,4. Proposition.** *Toute fonction $f \in \Lambda \to E$ à variation bornée est aussi à semivariation bornée et*

(1) $$\mathfrak{v}(f) \leqq \mathfrak{var}(f) .$$

**1,5. Proposition.** *Une fonction $f \in \Lambda \to \boldsymbol{C}$ est à semivariation bornée si et seulement s'il est à variation bornée. En outre,*

(1) $$\mathfrak{v}(f) = \mathfrak{var}(f) .$$

Preuve. La partie „si" résulte de 1,4 et il reste à démontrer la partie „seulement si".

Soit $\{t_j\}_0^p$ une décomposition de $\Lambda$. Sans restreindre la généralité, on peut supposer $f(t_j) - f(t_{j-1}) \neq 0$, $j = 1, 2, \ldots, p$. Dans ce cas, choisissons

$$\alpha_j = \frac{|f(t_j) - f(t_{j-1})|}{f(t_j) - f(t_{j-1})} .$$

Alors évidemment $|\alpha_j| = 1$ et

$$\sum_{j=1}^{p} |f(t_j) - f(t_{j-1})| = \left|\sum_{j=1}^{p} \alpha_j(f(t_j) - f(t_{j-1}))\right| \leqq \mathfrak{v}(f) .$$

Comme la décomposition $\{t_j\}_0^p$ était arbitraire, on en déduit $\mathfrak{var}(f) \leqq \mathfrak{v}(f)$, ce qui achève la preuve.

**1,6. Lemme.** *Si $f \in \Lambda \to \boldsymbol{C}$ et s'il existe une fonction $g \in \Lambda \to \boldsymbol{C}$ intégrable telle que $f(t) - f(s) = \int_s^t g(\tau)\, d\tau$ pour tout $t, s \in \Lambda$, $s \leqq t$, alors la fonction $f$ est continue à semivariation bornée et*

(1) $$\mathfrak{v}(f) = \int_\Lambda |g(\tau)|\, d\tau.$$

**1,7. Proposition.** *Une fonction $f \in \Lambda \to E$ est à semivariation bornée si et seulement s'il existe un sous-ensemble déterminant $X \subseteq E^*$ et une constante $c$ tels que les fonctions $x^*f$ sont à variation bornée pour tout $x^* \in X$ et $\mathfrak{v}(x^*f) \leqq c$. En outre*

(1) $$\mathfrak{v}(f) = \sup_{x^* \in X} \mathfrak{v}(x^*f) .$$

**1,8.** $V(\Lambda, E)$ sera l'espace de Banach de toutes les fonctions $f \in C(\Lambda, E)$, qui sont à semivariation bornée, muni de la norme

$$\|f\| = \|f\|_V = \max(\|f\|_C, \mathfrak{v}(f)) .$$

**1,9. Proposition.** *L'ensemble $\{f : f \in V(\Lambda, E), \|f\|_V \leqq 1\}$ est fermé dans $C(\Lambda, E)$.*

**1,10. Proposition.** *Si $\{a_k\}_{k \in N}$ est une suite de $E$, alors pour tout $l_1, l_2 \in N$, $l_1 \leqq l_2$, la fonction $\sum_{k=l_1}^{l_2} e^{ikt} a_k$ appartient à $V(\Lambda, E)$ et*

$$(1) \qquad \left\| \sum_{k=l_1}^{l_2} e^{ikt} a_k \right\|_V \leqq 2\pi \left[ \sum_{k=l_1}^{l_2} (|k| + 1)^2 \|a_k\|^2 \right]^{1/2}.$$

Preuve. Ecrivons $f_{l_1 l_2}(t) = \sum_{k=l_1}^{l_2} e^{ikt} a_k$ pour $t \in \Lambda$. Il suit de 1,6 que $f_{l_1 l_2} \in V(\Lambda, E)$ et il reste à démontrer (1).

Rappelons d'abord que $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$. En vertu de l'inégalité de Schwartz, on obtient

$$(2) \qquad \|f_{l_1 l_2}\|_C \leqq \sum_{k=l_1}^{l_2} \|a_k\| = \sum_{k=l_1}^{l_2} \frac{1}{|k| + 1} (|k| + 1) \|a_k\| \leqq$$

$$\leqq \left[ \sum_{k=l_1}^{l_2} \frac{1}{(|k| + 1)^2} \right]^{1/2} \left[ \sum_{k=l_1}^{l_2} (|k| + 1)^2 \|a_k\|^2 \right]^{1/2} \leqq$$

$$\leqq \frac{\pi}{\sqrt{3}} \left[ \sum_{k=l_1}^{l_2} (|k| + 1)^2 \|a_k\|^2 \right]^{1/2}.$$

Ceci étant, on va évaluer $\mathfrak{v}(f_{l_1 l_2})$. Suivant 1,7 (1)

$$(3) \qquad \mathfrak{v}(f_{l_1 l_2}) \leqq \sup_{\|x^*\| \leqq 1} \mathfrak{v}(x^* f_{l_1 l_2}).$$

Mais d'après 1,6 et l'inégalité de Schwartz, on a pour tout $x^* \in E^*$

$$(4) \qquad \mathfrak{v}(x^* f_{l_1 l_2}) \leqq \int_\Lambda |x^* f'_{l_1 l_2}(\tau)| \, d\tau \leqq \sqrt{(2\pi)} \left[ \int_\Lambda |x^* f'_{l_1 l_2}(\tau)|^2 \, d\tau \right]^{1/2}.$$

En vertu de l'orthogonalité des fonctions $e^{ikt}$, $k \in N$, on obtient

$$(5) \qquad \int_\Lambda |x^* f'_{l_1 l_2}(\tau)|^2 \, d\tau = \int_\Lambda \Big| \sum_{k=l_1}^{l_2} ik e^{ik\tau} x^* a_k \Big|^2 d\tau = \int_\Lambda \Big| \sum_{k=l_1}^{l_2} k e^{ik\tau} x^* a_k \Big|^2 d\tau =$$

$$= \int_\Lambda \Big( \sum_{k,k'=l_1}^{l_2} k k' e^{ik\tau} e^{-ik'\tau} x^* a_k \overline{x^* a_{k'}} \Big) \, d\tau = 2\pi \sum_{k=l_1}^{l_2} k^2 (x^* a_k)^2 \leqq 2\pi \sum_{k=l_1}^{l_2} k^2 \|a_k\|^2.$$

Les inégalités (3)–(5) impliquent

$$(6) \qquad \mathfrak{v}(f_{l_1 l_2}) \leqq 2\pi \Big( \sum_{k=l_1}^{l_2} k^2 \|a_k\|^2 \Big)^{1/2}.$$

La preuve est ainsi complète.

**1,11. Proposition.** *Pour tout $f \in V(\Lambda, E)$ et $k \in N$, on a*

$$\left\| \int_\Lambda e^{-ik\tau} f(\tau)\, d\tau \right\| \leqq \frac{2\pi}{|k| + 1} \|f\|_V . \tag{1}$$

Preuve. L'intégration par parties et 1,7 donnent pour tout $x^* \in E$, $\|x^*\| \leqq 1$ et $k \neq 0$:

$$\left| x^* \int_\Lambda e^{-ik\tau} f(\tau)\, d\tau \right| = \left| \int_\Lambda e^{-ik\tau} x^* f(\tau)\, d\tau \right| =$$

$$= \left| - \left[ \frac{1}{ik} e^{-ik\tau} x^* f(\tau) \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{ik} \int_\Lambda e^{-ik\tau}\, dx^* f(\tau) \right| \leqq \frac{1}{|k|} \mathfrak{v}(x^* f) \leqq \frac{2\pi}{|k| + 1} \mathfrak{v}(f) ,$$

d'où (1).

Pour $k = 0$, on a

$$\left\| \int_\Lambda f(\tau)\, d\tau \right\| \leqq 2\pi \|f\|_C \leqq 2\pi \|f\|_V ,$$

ce qui achève la preuve.

**1,12.** $L_p(\Lambda, E)$, $1 \leqq p < \infty$ sera l'espace de Banach des fonctions $f \in \Lambda \to E$, mesurables avec $\int_\Lambda \|f(\tau)\|^p\, d\tau < \infty$, muni de la norme $\|f\| = \|f\|_{L_p} = [\int_\Lambda \|f(\tau)\|^p \, . \, d\tau]^{1/p}$.

On voit que $L_2(\Lambda, H)$, où $H$ est un espace de Hilbert, est aussi un espace de Hilbert.

Au lieu de $L_1(\Lambda, E)$, on écrit souvent $L(\Lambda, E)$.

En ce qui concerne l'intégration des fonctions vectorielles, nous nous appuyons sur les résultats exposés dans [2] ch. III, § 1, no 3,2–3,8.

**1,13. Proposition.** *$C(\Lambda, E)$ est dense dans $L_p(\Lambda, E)$, $p \geqq 1$.*

**1,14.** On dira qu'une fonction $f \in \Lambda \to E$ est dérivable s'il existe une fonction $g \in L(\Lambda, E)$ telle que $f(t) - f(s) = \int_s^t g(\tau)\, d\tau$ pour tout $s, t \in \Lambda$, $s \leqq t$ et $\int_\Lambda g(\tau)\, d\tau = 0$. Cette fonction $g$ sera désignée par $f'$.

**1,15. Proposition.** *Si $f \in \Lambda \to E$ est dérivable, alors $f \in V(\Lambda, E)$, $f$ est à variation bornée et $\mathfrak{v}(f) \leqq \mathfrak{var}(f) \leqq \int_\Lambda \|f'(\tau)\|\, d\tau$.*

**1,16.** Posons pour $f \in L(\Lambda, E)$, $r \in N^+$ et $0 \leqq t \leqq 2\pi - \dfrac{1}{r}$ :

$$\Gamma_r(f)(t) = n \int_t^{t+(1/r)} f(\tau)\, d\tau ,$$

et $2\pi - \dfrac{1}{r} < t \leqq 2\pi$ :

$$\Gamma_r(f)(t) = r \left[ \int_t^{2\pi} f(\tau)\, d\tau + \int_0^{t+(1/r)2\pi} f(\tau)\, d\tau \right].$$

**1,17. Lemme.** *Pour tout $f \in L(\Lambda, E)$ et $r \in N^+$, la fonction $\Gamma_r(f)$ est dérivable et*

$$(1) \qquad \|\Gamma_r(f)\|_L \leqq \|f\|_L .$$

*Pour tout $f \in L(\Lambda, E)$*

$$(2) \qquad \Gamma_r(f) \to f \ (r \to \infty) \quad dans \quad L(\Lambda, E) .$$

Preuve. Il est commode de prolonger les fonctions de $L(\Lambda, E)$ périodiquement sur tout l'axe réel $\boldsymbol{R}$. Puis on peut écrire

$$(3) \qquad \Gamma_r(f)(t) = r \int_t^{t+(1/r)} f(\tau)\, d\tau = r \int_0^{1/r} f(t + \tau)\, d\tau .$$

Ceci étant, l'inégalité (1) résulte directement de (3). Pour vérifier la dérivabilité, posons $g_r(t) = r[f(t + 1/r) - f(t)]$. Alors,

$$\int_\Lambda g_r(\tau)\, d\tau = r \int_\Lambda \left[ f\left(\tau + \frac{1}{r}\right) - f(\tau) \right] d\tau = r \left[ \int_0^{2\pi} f\left(\tau + \frac{1}{r}\right) d\tau - \int_0^{2\pi} f(\tau)\, d\tau \right] = 0 ,$$

$$\int_s^t g_r(\tau)\, d\tau = r \int_s^t \left[ f\left(\tau + \frac{1}{r}\right) - f(\tau) \right] d\tau = r \int_{s+(1/r)}^{t+(1/r)} f(\tau)\, d\tau - r \int_s^t f(\tau)\, d\tau =$$

$$= r \int_t^{t+(1/r)} f(\tau)\, d\tau - r \int_s^{s+(1/r)} f(\tau)\, d\tau = \Gamma_r(f)(t) - \Gamma_r(f)(s) \quad (0 \leqq s \leqq t \leqq 2\pi) ,$$

ce qui achève la vérification de la dérivabilité.

Quant au dernier énoncé, on se sert du théorème de Banach-Steinhaus ([2], 2, 11, 4) en utilisant 1,13, car il est immédiat, en vertu de (3), que $\Gamma_r(f) \to f$ pour tout $f \in C(\Lambda, E)$.

**1,18. Proposition.** *Pour tout $f \in L(\Lambda, E)$, il existe une suite $\{f_r\}_{r \in N^+}$ des fonctions deux fois dérivables de $L(\Lambda, E)$ telle que $\|f_r\|_L \leqq \|f\|_L$, $r \in N^+$ et $f_r \to f$ $(r \to \infty)$ dans $L(\Lambda, E)$.*

Preuve. Il suffit d'utiliser deux fois le lemme 1,17.

**1,19. Lemme.** *Pour tout $f \in V(\Lambda, E)$ et $r \in N^+$, la fonction $\Gamma_r(f)$ est dérivable et*

$$(1) \qquad \|\Gamma_r(f)\|_V \leqq \|f\|_V .$$

*Pour tout $f \in V(\Lambda, E)$,*

$$(2) \qquad \Gamma_r(f) \to f \ (r \to \infty) \quad \text{dans} \quad C(\Lambda, E) .$$

Preuve. On procède comme dans 1,17. La dérivabilité de $\Gamma_r(f)$ résulte directement de 1,17. L'inégalité (1) résulte de 1,17 (3) et (2) est immédiat en vertu de 1,17 (3).

**1,20. Proposition.** *Pour tout $f \in V(\Lambda, E)$, il existe une suite $\{f_r\}_{r \in N^+}$ de fonctions deux fois dérivables de $V(\Lambda, E)$ telle que $\|f_r\|_V \leqq \|f\|_V$, $r \in N^+$ et $f_r \to f$ $(r \to \infty)$ dans $C(\Lambda, E)$.*

Preuve. Il faut utiliser deux fois le lemme 1,19.

**1,21. Proposition.** *Soit $f \in L(\Lambda, E)$. Si $\int_\Lambda e^{-ik\tau} f(\tau)\, d\tau = 0$ pour tout $k \in N$, alors $f$ est nulle presque partout. Si $\int_\Lambda e^{-ik\tau} f(\tau)\, d\tau = 0$ pour $k \in N$, $k \neq 0$, alors $f$ est presque partout constante.*

Preuve. D'après le théorème de Weierstrass, les polynômes trigonométriques $\sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{-ikt}$ constituent un sous-ensemble dense dans $C(\Lambda, C)$. On en déduit sans peine que $\int_\Lambda \varphi(\tau) f(\tau)\, d\tau = 0$ pour tout $\varphi \in C(\Lambda, C)$. Ceci entraîne de plus que $\int_\Lambda \varphi(\tau) f(\tau)\, d\tau = 0$ pour toute fonction $\varphi \in \Lambda \to C$ mesurable et bornée. De là on déduit aisément que l'intégrale indéfinie de $f$ est identiquement nulle. Il résulte de [2] th. 3.8.5, corr. 2 que $f$ est presque partout nulle ce qui est la première assertion. La seconde en suit immédiatement.

**1,22. Lemme.** *Soit $m = 0, 1, 2, \ldots$ Si $f \in L(\Lambda, E)$ est $m$-fois dérivable, alors*

$$(1) \qquad (ik)^m \int_\Lambda e^{-ik\tau} f(\tau)\, d\tau = \int_\Lambda e^{-ik\tau} f^{(m)}(\tau)\, d\tau\,.$$

Preuve. Il suffit d'intégrer $m$-fois par parties.

**1,23. Proposition.** *Si $f \in L(\Lambda, E)$ est deux fois dérivable, alors*

$$(1) \qquad \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} \int_\Lambda e^{-ik\tau} f(\tau)\, d\tau \to f(t) \quad (n \to \infty)$$

*dans $C(\Lambda, E)$.*

Preuve. Compte tenu de 1,22 (1), on a pour $k \in N$:

$$\left\| \int_\Lambda e^{-ik\tau} f(\tau)\, d\tau \right\| \leqq \frac{2\pi}{(|k| + 1)^2} \|f^{(2)}\|_L\,,$$

ce qui nous garantit la convergence du premier membre de (1) dans $C(\Lambda, E)$ vers une fonction $g$.

Pour tout $l \in N$, on obtient grâce à l'orthogonalité des fonctions $e^{ikt}$, $k \in N$:

$$\int_\Lambda e^{-il\tau} g(\tau)\, d\tau = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in N} \int_\Lambda e^{-il\tau} e^{ik\tau}\, d\tau \int_\Lambda e^{-ik\sigma} f(\sigma)\, d\sigma = \int_\Lambda e^{-il\tau} f(\tau)\, d\tau\,,$$

d'où, d'après 1,21, $g' = f$.

**1,24. Proposition.** *Si $\{a_k\}_{k\in N}$ est une suite de $H$, alors pour tout $l_1, l_2 \in N$, $l_1 \leqq l_2$, la fonction $\sum_{k=l_1}^{l_2} e^{ikt} a_k$ appartient à $L_2(\Lambda, H)$ et*

$$\left\| \sum_{k=l_1}^{l_2} e^{ikt} a_k \right\|_{L_2}^2 = 2\pi \sum_{k=l_1}^{l_2} \|a_k\|^2 .$$

Preuve. C'est une conséquence de l'orthogonalité des fonctions $e^{ikt}$, $k \in N$.

**1,25. Proposition.** *Si $f \in L_2(\Lambda, H)$, alors*

$$\left[ \sum_{k\in N} \left\| \int_\Lambda e^{-ikt} f(\tau)\, d\tau \right\|^2 \right]^{1/2} \leqq 2\pi \|f\|_{L_2} .$$

**1,26. Proposition.** *Si $f \in L_2(\Lambda, H)$, alors*

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} \int_\Lambda e^{-ik\tau} f(\tau)\, d\tau \to f(t) \quad (n \to \infty)$$

*dans $L_2(\Lambda, H)$.*

Les preuves des propositions 1,25 et 1,26 sont analogues à celles classiques si l'on substitue le produit scalaire à la multiplication des nombres.

Remarque. On peut aussi considérer l'intervalle $\Lambda = \langle 0, 2\pi \rangle$ comme la circonférence en identifiant les points 0 et $2\pi$. Les fonctions périodiques continues sur $\Lambda$ sont simplement les fonctions continues sur la circonférence. Cela explique la condition de la périodicité dans beaucoup de définitions précédentes. Tous les espaces que nous avons introduits ci-dessus peuvent être considérés d'une façon naturelle comme le espaces des fonctions sur la circonférence.

**1,27.** L'ensemble de toutes les fonctions $\varphi \in \Lambda \to \boldsymbol{C}$ qui sont indéfiniment dérivables sur $\Lambda$ et dont toutes les dérivées sont périodiques sera désigné par $K^\infty(\Lambda)$.

**1,28.** Le trio d'opérateurs $A, B, C \in \mathfrak{L}^+(E)$ s'appelle trifermé si $x_r \in \mathfrak{D}(A)$, $y_r \in \mathfrak{D}(B)$, $z_r \in \mathfrak{D}(C)$, $r \in N^+$, $x_r \to x$, $y_r \to y$, $z_r \to z$ et $Ax_r + By_r + Cz_r \to q$ $(r \to \infty)$ entraîne $x \in \mathfrak{D}(A)$, $y \in \mathfrak{D}(B)$, $z \in \mathfrak{D}(C)$ et $Ax + By + Cz = q$.

**1,29. Proposition.** *Si l'un d'opérateurs $A, B, C \in \mathfrak{L}^+(E)$ est fermé et les deux autres sont de $\mathfrak{L}(E)$, alors le trio $A, B, C$ est trifermé.*

## 2. SOLUTIONS PÉRIODIQUES ET LEUR STRUCTURE

**2,1.** Soit $A, B, C \in \mathfrak{L}^+(E)$, $u, h \in \Lambda \to E$. On dit que la fonction $u$ est une solution du problème périodique pour $A, B, C$, excitée par $h$, si (I) $u, h \in L(\Lambda, E)$, (II) $\int_\Lambda \varphi(\tau)\,.$ $.\, u(\tau)\, d\tau \in \mathfrak{D}(A)$, $\int_\Lambda \varphi'(\tau)\, u(\tau)\, d\tau \in \mathfrak{D}(B)$ et $\int_\Lambda \varphi''(\tau)\, u(\tau)\, d\tau \in \mathfrak{D}(C)$ pour tout $\varphi \in$

$\in K^\infty(\Lambda)$, (III) $C(\int_\Lambda \varphi''(\tau)\, u(\tau)\, d\tau) - B(\int_\Lambda \varphi'(\tau)\, u(\tau)\, d\tau) + A(\int_\Lambda \varphi(\tau)\, u(\tau)\, d\tau) = \int_\Lambda \varphi(\tau)\, h(\tau)\, d\tau$ pour tout $\varphi \in K^\infty(\Lambda)$.

**2,2. Lemme.** *Pour tout $f \in L(\Lambda, E)$, $n = 1, 2, \ldots$, $\varphi \in K^\infty(\Lambda)$, il existe une fonction $\psi_n \in K^\infty(\Lambda)$ telle que*

$$\int_\Lambda \varphi^{(i)}(\tau)\, \Gamma_n(f)\,(\tau)\, d\tau = \int_\Lambda \psi_n^{(i)}(\tau)\, f(\tau)\, d\tau$$

*pour tout $i = 0, 1, 2, \ldots$*

Preuve. Supposons les fonctions $f$ et $\varphi$ prolongées périodiquement sur l'axe $\boldsymbol{R}$. On peut écrire (cfr. 1,17 (3))

$$\frac{1}{n}\int_\Lambda \varphi^{(i)}(\tau)\, \Gamma_n(f)\,(\tau)\, d\tau = \int_\Lambda \left(\int_0^{1/n} \varphi^{(i)}(\tau)\, f(\tau + \sigma)\, d\sigma\right) d\tau =$$

$$= \int_0^{1/n} \left(\int_\Lambda \varphi^{(i)}(\tau)\, f(\tau + \sigma)\, d\tau\right) d\sigma = \int_0^{1/n} \left(\int_\Lambda \varphi^{(i)}(\tau - \sigma)\, f(\tau)\, d\tau\right) d\sigma =$$

$$= \int_\Lambda \left(\int_0^{1/n} \varphi^{(i)}(\tau - \sigma)\, d\sigma\right) f(\tau)\, d\tau = \int_\Lambda \left(\frac{d^i}{d\tau^i}\int_0^{1/n} \varphi(\tau - \sigma)\, d\sigma\right) f(\tau)\, d\tau\,.$$

Il suffit de prendre $\psi_n(\tau) = \int_0^{1/n} \varphi(\tau - \sigma)\, d\sigma$.

**2,3. Théorème d'approximation.** *Soit $A, B, C \in \mathfrak{L}^+(E)$ et $u, h \in \Lambda \to E$. Si $u \in L(\Lambda, E)$ est une solution du probléme periodique pour $A, B, C$, excitée par $h \in L(\Lambda, E)$, il existe deux suites $\{u_n\}_{n\in N^+}^\infty$, $\{h_n\}_{n\in N^+}$ de $L(\Lambda, E)$ telles que $u_n \to u$, $h_n \to h$ $(n \to \infty)$ dans $L(\Lambda, E)$, $u_n$, $h_n$ sont des fonctions dérivables et $u_n$ est une solution du probléme périodique pour $A$, $B$, $C$, excitée par $h_n$, pour tout $n = 1, 2, \ldots$*

Preuve. Posons $u_n = \Gamma_n(u)$, $h_n = \Gamma_n(h)$, $n \in N^+$.

Notre théorème résulte immédiatement de 1,17 et 2,2.

**2,4.** Ecrivons $\varrho(t) = [\int_{|\tau|<1} \exp -1/(1 - \tau^2)\, d\tau]^{-1} \exp -1/(1 - t^2)$ pour $|t| \leqq 1$ et $\varrho(t) = 0$ pour $|t| \geqq 1$. On vérifie aisément que $\varrho$ est une fonction indéfiniment dérivable avec support $|t| \leqq 1$. En outre, $\varrho$ est non-négative et $\int_{-\infty}^\infty \varrho(\tau)\, d\tau = 1$.

**2,5. Lemme.** *Si $f \in L(\Lambda, E)$, on a pour presque tout $t \in \Lambda$*

$$(1) \qquad n\int_\Lambda \varrho(n(t - \tau))\, f(\tau)\, d\tau \to f(t) \quad (n \to \infty)\,.$$

Preuve. Pour $f \in L(\Lambda, E)$ et $n = 1, 2, \ldots$, on pose $Q_n(f)\,(t) = n\int_\Lambda \varrho(n(t - \tau))\,.\, f(\tau)\, d\tau$ $(t \in \Lambda)$.

On voit aisément, en vertu de 2.4, que

(2) $$\|Q_n(f)\|_L \leqq \|f\|_L \,.$$

Supposons maintenant que $f \in C(\Lambda, E)$. Soit $f$ prolongée périodiquement sur tout l'axe $\boldsymbol{R}$. Alors, on peut écrire $Q_n(f)(t) = n \int_\Lambda \varrho(n\tau) f(t - \tau)\, \mathrm{d}\tau$, d'où on obtient (1) en utilisant la continuité uniforme de $f$ (prolongée sur $\boldsymbol{R}$).

Comme $C(\Lambda, E)$ est dense dans $L(\Lambda, E)$ (voir 1,13), on obtient en vertu de (2) et du théorème de Banach-Steinhaus que $Q_n(f) \to f$ $(n \to \infty)$ dans $L(\Lambda, E)$ pour tout $f \in L(\Lambda, E)$.

Mais ceci entraîne que $Q_n(f) \to f$ presque partout sur $\Lambda$, ce qui était à vérifier.

**2,6. Premier théorème de localisation.** *Soit $A, B \in \mathfrak{L}^+(E)$, $u, h \in \Lambda \to E$. Si le trio d'opérateurs $A, B, 0$ est trifermé, $u$ est une fonction dérivable de $L(\Lambda, E)$, $h \in L(\Lambda, E)$ et $u$ est une solution périodique pour $A, B, 0$, excitée par $h$, alors, pour presque tout $t \in \Lambda$, $u(t) \in \mathfrak{D}(A)$, $u'(t) \in \mathfrak{D}(B)$ et $Bu'(t) + A\,u(t) = h(t)$.*

Preuve. Suivant 2,5, il existe un sous-ensemble négligeable $S \subseteq \Lambda$ tel que

(1) $$n \int_\Lambda \varrho(n(t - \tau))\, h(\tau)\, \mathrm{d}\tau \to h(t) \quad (n \to \infty)\,,$$

(2) $$n \int_\Lambda \varrho(n(t - \tau))\, u(\tau)\, \mathrm{d}\tau \to u(t) \quad (n \to \infty)\,,$$

(3) $$n \int_\Lambda \varrho'(n(t - \tau))\, u(\tau)\, \mathrm{d}\tau \to u'(t) \quad (n \to \infty)$$

pour tout $t \in \Lambda \setminus S$.

Soit $t \in \Lambda \setminus S$, $0 < t < 2\pi$ et posons $\varphi_n(s) = n\varrho(n(t - s))$ pour $n \in N$, $s \in \Lambda$. On voit que, pour $n$ suffisamment grand, la restriction $\varphi_n \mid \Lambda \in K^\infty(\Lambda)$ et, par suite, $\int_\Lambda \varphi_n(\tau)\, u(\tau)\, \mathrm{d}\tau \in \mathfrak{D}(A)$, $\int_\Lambda \varphi'_n(\tau)\, u(\tau)\, \mathrm{d}\tau \in \mathfrak{D}(B)$ et $-B \int_\Lambda \varphi'_n(\tau)\, u(\tau)\, \mathrm{d}\tau + A \int_\Lambda \varphi_n(\tau)\, .$ $.\, u(\tau)\, \mathrm{d}\tau = \int_\Lambda \varphi_n(\tau)\, h(\tau)\, \mathrm{d}\tau$. Comme le trio d'opérateurs $A, B, 0$ est trifermé, on obtient le résultat voulu en augmentant $n$ indéfiniment et en utilisant (1)–(3).

**2,7. Second théorème de localisation.** *Soit $A, B, C \in \mathfrak{L}^+(E)$, $u, h \in \Lambda \to E$. Si le trio d'opérateurs $A, B, C$ est trifermé, $u$ est une focntion deux fois dérivable de $L(\Lambda, E)$, $h \in L(\Lambda, E)$ et $u$ est une solution du problème périodique pour $A, B, C$, excitée par $h$, alors, pour presque tout $t \in \Lambda$, on a $u(t) \in \mathfrak{D}(A)$, $u'(t) \in \mathfrak{D}(B)$, $u''(t) \in \mathfrak{D}(C)$, $C\,u''(t) + B\,u'(t) + A\,u(t) = h(t)$.*

La preuve est tout à fait analogue à celle de 2,6.

**2,8. Théorème de lissage.** *Soit $A, B, C \in \mathfrak{L}^+(E)$, $u, v, h \in \Lambda \to E$. Si* (a) *les opérateurs $-k^2C + ikB + A$ sont biunivoques pour $k \in N$,* (b) *la fonction $h \in$*

$\in L(\Lambda, E)$ *est dérivable,* (c) *les fonctions* $u, v \in L(\Lambda, E)$ *sont des solutions du problème périodique pour* $A, B, C$, *excitées par* $h$ *et* $h'$ *resp., alors* $u$ *est dérivable et* $u' = v$.

Preuve. Ecrivons $a_k = \int_\Lambda e^{-ik\tau} u(\tau)\, d\tau$, $b_k = \int_\Lambda e^{-ik\tau} v(\tau)\, d\tau$ et $c_k = \int_\Lambda e^{-ik\tau} h(\tau)\, d\tau$, $k \in N$.

Comme les fonctions $e^{-ik\tau}$ appartiennent à $K^\infty(\Lambda)$, on obtient aisément

(1)
$$(-k^2C + ikB + A)\, a_k = c_k\,,$$
$$(-k^2C + ikB + A)\, b_k = ikc_k\,,$$

car $\int_\Lambda e^{-ik\tau} h'(\tau)\, d\tau = ikc_k$, $k \in N$.

Il suit de l'hypothèse (a) et de (1) que

(2)
$$ika_k = b_k\,.$$

Posons $\bar{v}(t) = \int_0^t v(\tau)\, d\tau$.

Ensuite, d'après (2),

(3)
$$\bar{v}(0) = 0\,, \quad \bar{v}(2\pi) = \int_0^{2\pi} v(\tau)\, d\tau = b_0 = 0\,.$$

Maintenant, d'après (3), $\int_\Lambda e^{-ik\tau} \bar{v}(\tau)\, d\tau = \int_\Lambda e^{-ik\tau} \int_0^\tau v(\sigma)\, d\sigma\, d\tau = (1/ik) \int_\Lambda e^{-ik\tau}\,.$ $.\, v(\tau)\, d\tau = b_k/ik = a_k$ pour tout $k \in N$, $k \neq 0$, d'où résulte, en vertu de 1,21, que $u - \bar{v}$ est constante, ce qui équivaut à $u' = v$.

## 3. EXISTENCE ET UNICITÉ DES SOLUTIONS PÉRIODIQUES DES ÉQUATIONS LINÉAIRES

**3,1.** Soit $\{T_k\}_{k\in N}$ une suite d'opérateurs de $\mathfrak{L}(E)$. On y associe une suite $\{P_n\}_{n\in N^+}$ d'opérateurs de $\mathfrak{L}(L(\Lambda, E))$ de la façon suivante: pour $f \in L(\Lambda, E)$, $t \in \Lambda$ et $n \in N^+$, on pose
$$P_n(f)(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} T_k \left( \int_\Lambda e^{-ik\tau} f(\tau)\, d\tau \right).$$

**3,2. Lemme.** *Pour tout* $n \in N^+$, *on a* $P_n \in \mathfrak{L}(L(\Lambda, E), V(\Lambda, E))$.

**3,3. Lemme.** *Si* $\sum_{k\in N} \|T_k\| < \infty$, *alors* ($\alpha$) *la suite* $\{P_n\}_{n\in N^+}$ *est convergente dans l'espace* $\mathfrak{L}(L(\Lambda, E), C(\Lambda, E))$,

($\beta$)
$$\|P_n(f)\|_C \leqq \sum_{k=-n}^{n} \|T_k\|\, \|f\|_L$$

*pour tout* $f \in L(\Lambda, E)$ *et* $n \in N^+$.

La preuve est presque évidente.

**3,4. Lemme.** *Si* $\sum_{k\in N} \|T_k\|^2 < \infty$, *alors* $(\alpha)$ *la suite* $\{P_n\}_{n\in N^+}$ *est convergente dans l'espace* $\mathfrak{L}(V(\Lambda, E))$,

$$(\beta) \qquad \|P_n(f)\|_V \leqq 2\pi\Big[\sum_{k=-n}^{n} \|T_k\|^2\Big]^{1/2} \|f\|_V$$

*pour* $f \in V(\Lambda, E)$, $n \in N^+$.

Preuve. Posons $a_k = \int_\Lambda e^{-ik\tau} f(\tau)\, d\tau$ $(f \in V(\Lambda, E),\ k \in N)$.

Rappelons d'abord que, suivant 1,11,

$$(1) \qquad \|a_k\| \leqq \frac{2\pi}{|k| + 1} \|f\|_V .$$

Ensuite, d'après (1) et 1,10, pour $l_1, l_2 \in N$, $l_1 \leqq l_2$

$$\Big\|\sum_{k=l_1}^{l_2} e^{ikt} T_k a_k\Big\|_V \leqq 2\pi\Big[\sum_{k=l_1}^{l_2} (|k| + 1)^2 \|T_k a_k\|^2\Big]^{1/2} \leqq$$

$$\leqq 2\pi\Big[\sum_{k=l_1}^{l_2} (|k| + 1)^2 \|T_k\|^2 \|a_k\|^2\Big]^{1/2} \leqq 4\pi^2\Big[\sum_{k=l_1}^{l_2} \|T_k\|^2\Big]^{1/2} \|f\|_V ,$$

d'où immédiatement $(\alpha)$, $(\beta)$.

**3,5. Lemme.** *Si* $\sum_{k\in N} \|T_k\|^2 < \infty$, *alors* $(\alpha)$ *la suite* $\{P_n\}_{m\in N^+}$ *est convergente dans l'espace* $\mathfrak{L}(L_2(\Lambda, H), C(\Lambda, H))$,

$$(\beta) \qquad \|P_n(f)\|_C \leqq \Big[\sum_{k=-n}^{n} \|T_k\|^2\Big]^{1/2} \|f\|_{L_2}$$

*pour tout* $f \in L_2(\Lambda, H)$, $n \in N^+$.

Preuve. Soit $\{a_k\}_{k\in N}$ comme dans 3,4. Suivant 1,25, on a $\Big[\sum_{k\in N} \|a_k\|^2\Big]^{1/2} \leqq 2\pi\|f\|_{L_2}$.

Ensuite, l'inégalité de Schwartz donne

$$\Big\|\sum_{k=l_1}^{l_2} e^{ikt} T_k a_k\Big\|_C \leqq \sum_{k=l_1}^{l_2} \|T_k a_k\| \leqq \sum_{k=l_1}^{l_2} \|T_k\| \|a_k\| \leqq$$

$$\leqq \Big[\sum_{k=l_1}^{l_2} \|T_k\|^2\Big]^{1/2} \Big[\sum_{k=l_1}^{l_2} \|a_k\|^2\Big]^{1/2} \leqq 2\pi\Big[\sum_{k=l_1}^{l_2} \|T_k\|^2\Big]^{1/2} \|f\|_{L_2} ,$$

d'où l'on obtient aisément $(\alpha)$, $(\beta)$.

**3,6. Lemme.** *Si* $\sup_{k\in N} \|T_k\| < \infty$, *alors* $(\alpha)$ *la suite* $\{P_n(f)\}_{n\in N^+}$ *est convergente dans* $L_2(\Lambda, H)$ *pour tout* $f \in L_2(\Lambda, H)$,

$$(\beta) \qquad \|P_n(f)\|_{L_2} \leqq \big(\sup_{k\in N} \|T_k\|\big) \|f\|_{L_2}$$

*pour tout* $f \in L_2(\Lambda, H)$, $n \in N^+$.

Preuve. Soit $\{a_k\}_{k\in N}$ comme dans la preuve de 3,4. En utilisant 1,24 et 1,25, on en déduit pour $l_1, l_2 \in N$, $l_1 \leqq l_2$:

$$\left\| \sum_{k=l_1}^{l_2} e^{ikt} T_k a_k \right\|_{L_2} = 2\pi \left[ \sum_{k=l_1}^{l_2} \|T_k a_k\|^2 \right]^{1/2} \leqq$$

$$\leqq 2\pi \left( \sup_{k\in N} \|T_k\| \right) \left[ \sum_{k=l_1}^{l_2} \|a_k\|^2 \right]^{1/2} \leqq 2\pi \left( \sup_{k\in N} \|T_k\| \right) \|f\|_{L_2},$$

d'où on obtient ($\alpha$), ($\beta$).

**3,7. Lemme.** *Si les opérateurs $T_k$, $k \in N$ sont compacts et la suite $\{h_r\}_{r\in N^+}$ est bornée dans $L(\Lambda, E)$, alors la suite $\{P_n(h_r)\}_{r\in N^+}$ est compacte dans $V(\Lambda, E)$ pour tout $n \in N^+$.*

Preuve. Ecrivons $a_{kr} = \int_\Lambda e^{ik\tau} h_r(\tau)\, d\tau$ et soit $n \in N^+$ fixe. Comme $T_k$, $k \in N$, sont compacts, on peut trouver $r_j \in N^+$ pour tout $j \in N^+$ tels que $r_j \to \infty$ ($j \to \infty$) et que les suites $\{T_k a_{kr_j}\}_{j\in N^+}$ sont convergentes pour tout $k \in N$, $-n \leqq h \leqq n$. Ainsi la suite $\{P_n(h_{r_j})\}_{j\in N^+}$ est évidemment convergente dans $V(\Lambda, E)$ et cela achève la preuve.

**3,8. Théorème d'existence pour le problème périodique de la classe ($l_1$) dans les espaces de Banach.** *Soit $A, B, C, \Theta \in \mathfrak{L}^+(E)$. Si* (a) *le trio d'opérateurs $A, B, C$ est trifermé,* (b) *les opérateurs $-k^2C + ikB + A$ sont biunivoques et $(-k^2C + ikB + A)^{-1} \in \mathfrak{L}(E)$ pour $k \in N$,* (c) *$\Theta$ est un opérateur fermé,* (d) *$\Theta(-k^2C + ikB + A)^{-1} \in \mathfrak{L}(E)$ pour $k \in N$,* (e)

(1) $$\sum_{k\in N} \|(-k^2C + ikB + A)^{-1}\| < \infty,$$

(2) $$\sum_{k\in N} \|\Theta(-k^2C + ikB + A)^{-1}\| < \infty,$$

*alors, pour tout $h \in L(\Lambda, E)$, il existe une solution $u \in C(\Lambda, E)$ du problème périodique pour $A, B, C$, excitée par $h$, telle que*

(3) $$\|u\|_C \leqq \left[ \sum_{k\in N} \|(-k^2C + ikB + A)^{-1}\| \right] \|h\|_L,$$

*$\Theta u \in C(\Lambda, E)$ et*

(4) $$\|\Theta u\|_C \leqq \left[ \sum_{k\in N} \|\Theta(-k^2C + ikB + A)^{-1}\| \right] \|h\|_L.$$

Preuve. 1° Ecrivons $a_k = \int_\Lambda e^{-ik\tau} h(\tau)\, d\tau$, $k \in N$ et $h_n(t) = (1/2\pi) \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} a_k$, $t \in \Lambda$, $n \in N^+$.

2° Soit $T_k = (-k^2C + ikB + A)^{-1}$, $k \in N$ et $\{P_n\}_{n\in N^+}$ la suite associé à $\{T_k\}_{k\in N}$ d'après 3,1.

3° La suite $\{P_n\}_{n\in N^+}$ est convergente dans l'espace $\mathfrak{L}(L(\Lambda, E), C(\Lambda, E))$.

Cela résulte de 3,3 et de (1).

4° Posons $P = \lim_{n\to\infty} P_n$ (au sens de 4°).

5° Pour tout $h \in L(\Lambda, E)$: $P(h) \in C(\Lambda, E)$ et $\|P(h)\|_C \leqq [\sum_{k\in N} \|(-k^2C + ikB + A)^{-1}\|] \|h\|_L$.

Cela résulte de (1), 3,3 et 3°.

6° $P_n(h)$ est une solution du problème périodique pour $A$, $B$, $C$, excitée par $h_n$, pour tout $h \in L(\Lambda, E)$, $n \in N^+$.

7° Pour tout $h \in L(\Lambda, E)$, $P(h)$ est une solution du problème périodique pour $A$, $B$, $C$, excitée par $h$.

D'abord, soit $h$ deux fois dérivable. Ensuite, d'après 1,23, $h_n \to h$ $(n \to \infty)$ dans $C(\Lambda, E)$. Vu 3°, $P_n(h) \to P(h)$ $(n \to \infty)$ dans $C(\Lambda, E)$. Comme le trio d'opérateurs $A$, $B$, $C$ est trifermé, on obtient 7° de 6° en passant à la limite.

Dans le cas général $h \in L(\Lambda, E)$, soit $\{g_r\}_{r\in N^+}$ une suite de $L(\Lambda, E)$ telle que, d'après 1,18, $g_r \to h$ $(r \to \infty)$ dans $L(\Lambda, E)$ et les fonctions $g_r$, $r \in N^+$ sont deux fois dérivables. Par conséquent, $P(g_r)$ est une solution du problème périodique pour $A$, $B$, C, excitée par $g_r$, $r \in N^+$. Mais $P(g_r) \to P(h)$ dans $C(\Lambda, E)$ d'après 3° et il suffit de nouveau de passer à la limite $r \to \infty$.

8° Soit $\{Q_n\}_{n\in N^+}$ la suite associée à $\{\Theta T_k\}_{k\in N}$ d'après 3,1.

9° La suite $\{Q_n\}_{n\in N^+}$ est convergente dans l'espace $\mathfrak{L}(L(\Lambda E), C(\Lambda, E))$.

C'est une conséquence immédiate de 3,3 et (2).

10° Posons $Q = \lim_{n\to\infty} Q_n$ (au sens de 9°).

11° Pour tout $h \in L(\Lambda, E)$: $Q(h) \in C(\Lambda, E)$ et $\|Q(h)\|_C \leqq [\sum_{k\in N} \|\Theta(-k^2C + ikB + A)^{-1}\|] \|h\|_L$.

Cela résulte de (2), 3,3 et 10°.

12° $P(h)(t) \in \mathfrak{D}(\Theta)$ et $\Theta\, P(h)(t) = Q(h)(t)$ pour tout $t \in \Lambda$, $h \in L(\Lambda, E)$.

On vérifie aisément que l'assertion 12° est vrai pour $P_n(h)$ et $Q_n(h)$. Comme $\Theta$ est fermé, il suffit de passer à la limite $n \to \infty$.

13° Conclusion. Les assertions de notre théorème sont contenues dans 7°, 5°, 12° et 11°, si l'on écrit $u = P(h)$.

**3,9. Complément sur la compacité.** *Soit $A, B, C, \Theta \in \mathfrak{L}^+(E)$. Si les hypothèses* (a)–(e) *de* 3,8 *ont lieu et* (f) *les opérateurs $(-k^2C + ikB + A)^{-1}$, $\Theta(-k^2C + ikB + A)^{-1}$ sont compacts pour $k \in N$, alors, pour toute suite bornée $\{h_r\}_{r\in N^+}$, de $L(\Lambda, E)$, il existe une suite $\{u_r\}_{r\in N^+}$ des solutions du problème périodique pour $A$, $B$, $C$, excitées par $h_r$, $r \in N^+$ resp., telle que $u_r \in C(\Lambda, E)$ pour $r \in N^+$, la suite $\{u_r\}_{r\in N^+}$ est compacte dans $C(\Lambda, E)$, $\Theta u_r \in C(\Lambda, E)$ pour $r \in N^+$ et la suite $\{\Theta u_r\}_{r\in N^+}$ est compacte dans $C(\Lambda, E)$.*

Preuve. On continuera la preuve de 3,8:

14° Les opérateurs $P$, $Q$ sont des opérateurs compacts de $\mathfrak{L}(L(\Lambda, E), C(\Lambda, E))$.

D'après 3,7, les opérateurs $P_n$, $Q_n$, $n \in N^+$ sont des opérateurs compacts de $\mathfrak{L}(L(\Lambda, E), C(\Lambda, E))$ et, d'après 3° et 9°, $P_n \to P$, $Q_n \to Q$ $(n \to \infty)$ dans l'espace $\mathfrak{L}(L(\Lambda, E), C(\Lambda, E))$, d'où notre assertion.

15° L'assertion de notre complément est contenue dans 14°, 7° et 12°.

**3,10. Théorème d'existence pour le problème périodique de la classe $(l_2)$ dans les espaces de Banach.** *Soit* $A, B, C, \Theta \in \mathfrak{L}^+(E)$. *Si les hypothèses* (a)–(d) *de* 3,8 *ont lieu et* (e)

$$\sum_{k \in N} \|(-k^2C + ikB + A)^{-1}\|^2 < \infty , \tag{1}$$

$$\sum_{k \in N} \|\Theta(-k^2C + ikB + A)^{-1}\|^2 < \infty , \tag{2}$$

*alors, pour tout* $h \in V(\Lambda, E)$, *il existe une solution* $u \in V(\Lambda, E)$ *du problème périodique pour* $A$, $B$, $C$, *excitée par* $h$, *telle que*

$$\|u\|_V \leqq 2\pi\big[\sum_{k \in N} \|(-k^2C + ikB + A)^{-1}\|^2\big]^{1/2} \|h\|_V , \tag{3}$$

$\Theta u \in V(\Lambda, E)$ *et*

$$\|\Theta u\|_V \leqq 2\pi \big[\sum_{k \in N} \|\Theta(-k^2C + ikB + A)^{-1}\|^2\big]^{1/2} \|h\|_V . \tag{4}$$

Preuve. 1°, 2° comme dans 3,8.

3° La suite $\{P_n\}_{n \in N^+}$ est convergente dans l'espace $\mathfrak{L}(V(\Lambda, E))$.
Cela résulte de 3,4 et (1).

4° Comme dans 3,8.

5° Pour tout $h \in V(\Lambda, E)$: $P(h) \in V(\Lambda, E)$ et

$$\|Ph\|_V \leqq \big[\sum_{k \in N} \|(-k^2C + ikB + A)^{-1}\|^2\big]^{1/2} \|h\|_V .$$

Cela résulte de (1), 3,4 et 4°.

5°° Pour toute suite bornée $\{h_r\}_{r \in N^+}$ telle que $\|h_r\|_L \to 0$ $(r \to \infty)$, on a $\|P(h_r)\|_V \to 0$ $(r \to \infty)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il résulte de 3° qu'il existe un $n_0 \in N$, tel que $\|P_{n_0}(h_r) - P(h_r)\|_V \leqq \varepsilon/2$ pour tout $r \in N^+$. Il s'ensuit de 3,2 qu'il existe un $r_0 \in N^+$ tel que $\|P_{n_0}(h_r)\|_V \leqq \varepsilon/2$ pour $r \geqq r_0$. Donc, $\|P(h_r)\|_V \leqq \varepsilon$ pour $r \geqq r_0$ ce qui était à démontrer.

6° Comme dans 3,8.

7° Pour tout $h \in V(\Lambda, E)$, $P(h)$ est une solution du problème périodique pour $A$, $B$, $C$, excitée par $h$.

D'abord, soit $h \in V(\Lambda, E)$ deux fois dérivable. Ensuite, d'après 1,23, $h_n \to h$ $(n \to \infty)$ dans $C(\Lambda, E)$. Vu 3°, $P_n(h) \to P(h)$ $(n \to \infty)$ dans $V(\Lambda, E)$ ce qui entraîne aussi dans $C(\Lambda, E)$. Comme le trio $A$, $B$, $C$ est trifermé, il suffit de passer à la limite $n \to \infty$ sous l'usage de 6°.

Dans le cas générale de $h \in V(\Lambda, E)$, soit $\{g_r\}_{r\in N^+}$ une suite de $V(\Lambda, E)$ telle que, d'après 1,20, $g_r \to h$ $(r \to \infty)$ dans $C(\Lambda, E)$, $\|g_r\|_V \leqq \|g\|_V$ et les fonctions $g_r$ sont deux fois dérivables pour tout $r \in N^+$. Comme on vient de démontrer, $P(g_r)$ est une solution du problème périodique pour $A$, $B$, $C$, excitée par $g_r$, $r \in N^+$. Mais, d'après $5^{\circ\circ}$, $P(g_r) \to P(h)$ $(r \to \infty)$ dans $V(\Lambda, E)$ et, par suite, aussi dans $C(\Lambda, E)$ et il suffit donc de nouveau de passer à la limite $r \to \infty$ comme ci-dessus.

8° Comme dans 3,8.

9° La suite $\{Q_n\}_{n\in N^+}$ est convergente dans l'espace $\mathfrak{L}(V(\Lambda, E))$.

Conséquence de 3,4 et (2).

10° Comme dans 3,8.

11° Pour tout $h \in V$, $Q(h) \in V(\Lambda, E)$ et $\|Q(h)\|_V \leqq [\sum_{k\in N} \|\Theta(-k^2C + ikB + A)^{-1}\|^2]^{1/2} \|h\|_V$.

Cela résulte de (2), 3,4 et 10°.

$11^{\circ\circ}$ Pour toute suite bornée $\{h_r\}_{r\in N^+}$ de $V(\Lambda, E)$ telle que $\|h_r\|_L \to 0$ $(r \to \infty)$, on a $\|Q(h_r)\|_V \to 0$ $(r \to \infty)$.

La preuve est analogue à celle de $5^{\circ\circ}$ en vertu de 9°.

12° Comme dans 3,8 avec $h \in V(\Lambda, E)$.

13° La conclusion est la même que dans 3,8.

**3,11. Complément sur la continuité.** *Soit $A, B, C, \Theta \in \mathfrak{L}^+(E)$. Si les hypothèses de* 3,10 *ont lieu, alors pour toute suite bornée $\{h_r\}_{r\in N^+}$ de $V(\Lambda, E)$ telle que $\|h_r\|_L \to 0$ $(r \to \infty)$, il existe une suite $\{u_r\}_{r\in N^+}$ de solutions du problème périodique pour $A, B, C$, excitées par $h_r$, $r \in N^+$ resp., telle que $u_r \in V(\Lambda, E)$, pour $r \in N^+$, $\|u_r\|_V \to 0$ $(r \to \infty)$, $\Theta u_r \in V(\Lambda, E)$ pour $r \in N^+$* et *$\|\Theta u_r\|_V \to 0$ $(r \to \infty)$.*

Preuve. Ce complément n'est qu'une paraphrase des points $5^{\circ\circ}$ et $11^{\circ\circ}$ de la preuve de 3,10.

**3,12. Complément sur la compacité.** *Soit $A, B, C, \Theta \in \mathfrak{L}^+(E)$. Si les hypothèses* (a)–(e) *de* 3,10 *et l'hypothèse* (f) *de* 3,9 *ont lieu, alors, pour toute suite bornée $\{h_r\}_{r\in N^+}$ de $V(\Lambda, E)$, il existe une suite $\{u_r\}_{r\in N^+}$ de solutions du problème périodique pour $A, B, C$, excitées par $h_r$, $r \in N^+$ resp., telle que $u_r \in V(\Lambda, E)$ pour $r \in N^+$, la suite $\{u_r\}_{r\in N^+}$ est compacte dans $V(\Lambda, E)$, $\Theta u_r \in V(\Lambda, E)$ pour $r \in N^+$ et la suite $\{\Theta u_r\}_{r\in N^+}$ est compacte dans $V(\Lambda, E)$.*

Preuve. On continuera la preuve de 3,10.

14° Les opérateurs $P$, $Q$ sont des opérateurs compacts de $\mathfrak{L}(V(\Lambda, E))$.

D'après 3,7, les opérateurs $P_n$, $Q_n$ sont compacts dans $\mathfrak{L}(V(\Lambda, E))$ pour tout $n \in N^+$, car tout ensemble borné dans $V(\Lambda, E)$ est aussi borné dans $L(\Lambda, E)$. D'autre part, d'après 3° et 9°, $P_n \to P$, $Q_n \to Q$ $(n \to \infty)$ dans l'espace de Banach $\mathfrak{L}(V(\Lambda, E))$ ce qui garantit 14°.

15° L'assertion du second complément est contenue dans 7°, 12° et 14°.

**3,13. Théorème d'existence pour le problème périodique de la classe $(l_2)$ dans les espaces de Hilbert.** *Soit $A$, $B$, $C$, $\Theta \in \mathfrak{L}^+(H)$. Si les hypothèses* (a)–(e) *de* 3,10 *ont lieu avec $H$ au lieu de $E$, alors, pour tout $h \in L_2(\Lambda, H)$, il existe une solution $u \in$ $\in C(\Lambda, H)$ du problème périodique pour $A$, $B$, $C$, excitée par $h$, telle que*

$$\|u\|_C \leqq [\sum_{k\in N} \|(-k^2C + ikB + A)^{-1}\|^2]^{1/2} \|h\|_{L_2}, \tag{3}$$

*$\Theta u \in C(\Lambda, H)$ et*

$$\|\Theta u\|_C \leqq [\sum_{k\in N} \|\Theta(-k^2C + ikB + A)^{-1}\|^2]^{1/2} \|h\|_{L_2}. \tag{4}$$

Preuve. 1°, 2° comme dans 3,8.

3° La suite $\{P_n\}_{n\in N^+}$ est convergente dans l'espace $\mathfrak{L}(L_2(\Lambda, H), C(\Lambda, H))$.

Cela résulte de 3,5 et 3,10 (1).

4° comme dans 3,8.

5° Pour tout $h \in L_2(\Lambda, H)$, $P(h) \in C(\Lambda, H)$ et

$$\|P(h)\|_C \leqq [\sum_{k\in N} \|(-k^2C + ikB + A)^{-1}\|^2]^{1/2} \|h\|_{L_2}.$$

Cela résulte de 3,5 et 3,10 (1).

5°° Pour toute suite bornée $\{h_r\}_{r\in N^+}$ de $L_2(\Lambda, H)$ telle que $\|h_r\|_L \to 0$ $(r \to \infty)$, on a $\|P(h_r)\|_C \to 0$ $(r \to \infty)$.

On utilise le même procédé que dans 5°° de la preuve 3,10.

6° comme dans 3,8.

7° Pour tout $h \in L_2(\Lambda, H)$, $P(h)$ est une solution du problème périodique pour $A$, $B$, $C$, excitée par $h$.

On procède pas à pas comme dans le point 7° de 3,8.

8° Comme dans 3,8.

9° La suite $\{Q_n\}_{n\in N^+}$ est convergente dans l'espace $\mathfrak{L}(L_2(\Lambda, H), C(\Lambda, H))$.

Cela résulte de 3,5 et 3,10 (2).

10° Comme dans 3,8.

11° Pour tout $h \in L_2(\Lambda, H)$: $Q(h) \in C(\Lambda, H)$ et

$$\|Q(h)\|_C \leqq [\sum_{k\in N} \|\Theta(-k^2C + ikB + A)^{-1}\|^2]^{1/2} \|h\|_{L_2}.$$

Cela résulte de 3,5 et 3,10(2).

11°° Pour toute suite bornée $\{h_r\}_{r\in N^+}$ de $L_2(\Lambda, H)$ telle que $\|h_r\|_L \to 0$ $(r \to \infty)$, on a $\|Qh_r\|_C \to 0$ $(r \to \infty)$.

On procède comme dans 5°° en vertu de 9°.

12° Comme dans 3,8 avec $h \in L_2(\Lambda, H)$.

13° La conclusion est la même que dans 3,8.

**3,14. Complément sur la continuité.** *Soit* $A, B, C, \Theta \in \mathfrak{L}^+(E)$. *Si les hypothèses de* 3,13 *ont lieu, alors pour toute suite bornée* $\{h_r\}_{r\in N^+}$ *de* $L_2(\Lambda, H)$ *telle que* $\|h_r\|_L \to \to 0\ (r \to \infty)$, *il existe une suite* $\{u_r\}_{r\in N^+}$ *des solutions du problème périodique pour* $A, B, C$, *excitées par* $h_r$, $r \in N^+$ *resp. telle que* $u_r \in C(\Lambda, E)$ *pour* $r \in N^+$, $\|u_r\|_C \to 0$ $(r \to \infty)$, $\Theta u_r \in C(\Lambda, E)$ *pour* $r \in N^+$, $\|\Theta u_r\|_C \to 0\ (r \to \infty)$.

Preuve. L'enoncé est contenu dans les points $5^{\circ\circ}$ et $11^{\circ\circ}$ de la preuve précédente.

**3,15. Complément sur la compacité.** *Soit* $A, B, C, \Theta \in \mathfrak{L}^+(E)$. *Si les hypothèses* (a)–(e) *de* 3,12 *et* (f) *de* 3,9 *ont lieu, alors, pour toute suite bornée* $\{h_r\}_{r\in N^+}$ *de* $L_2(\Lambda, H)$, *il existe une suite* $\{u_r\}_{r\in N^+}$ *de solutions du problème périodique pour* $A, B, C$, *excitées par* $h_r$, $r \in N^+$ *resp., telle que* $u_r \in C(\Lambda, H)$ *pour* $r \in N^+$, *la suite* $\{u_r\}_{r\in N^+}$ *est compacte dans* $C(\Lambda, H)$, $\Theta u_r \in C(\Lambda, H)$ *pour* $r \in N^+$ *et la suite* $\{\Theta u_r\}_{r\in N^+}$ *est compacte dans* $C(\Lambda, H)$.

Preuve. On continuera la preuve de 3,13.

14° Les opérateurs $P, Q$ sont des opérateurs compacts de $\mathfrak{L}(L_2(\Lambda, H), C(\Lambda, H))$. D'après 3,7, les opérateurs $P_n, Q_n$ sont des opérateurs compacts de $\mathfrak{L}(L_2(\Lambda, H), C(\Lambda, H))$ pour tout $n \in N^+$, car les ensembles bornés dans $L_2(\Lambda, H)$ sont aussi bornés dans $L(\Lambda, H)$. D'après 3° et 9°, $P_n \to P$, $Q_n \to Q$ dans l'espace $\mathfrak{L}(L_2(\Lambda, H), C(\Lambda, H))$ ce qui donne 14°.

15° L'assertion du complément est contenue dans 7°, 12° et 14°.

**3,16. Théorème d'existence pour le problème périodique de la classe $(l_\infty)$ dans les espaces de Hilbert.** *Soit* $A, B, C, \Theta \in \mathfrak{L}^+(E)$. *Si les hypothèses* $(a)$–$(d)$ *de* 3,8 *ont lieu avec* $H$ *au lieu de* $E$ *et* $(e)$

(1) $$\sup_{k\in N} \|(-k^2C + ikB + A)^{-1}\| < \infty ,$$

(2) $$\sup_{k\in N} \|\Theta(-k^2C + ikB + A)^{-1}\| < \infty ,$$

*alors, pour tout* $h \in L_2(\Lambda, H)$, *il extiste une solution* $u \in L_2(\Lambda, H)$ *du problème périodique pour* $A, B, C$, *excitée par* $h$, *telle que*

(3) $$\|u\|_{L_2} \leqq (\sup_{k\in N} \|(-k^2C + ikB + A)^{-1}\|)\, \|h\|_{L_2} ,$$

$\Theta u \in L_2(\Lambda, H)$ *et*

(4) $$\|\Theta u\|_{L_2} \leqq (\sup_{k\in N} \|\Theta(-k^2C + ikB + A)^{-1}\|)\, \|h\|_{L_2} .$$

Preuve. 1°, 2° comme dans 3,8.

3° La suite $\{P_n(h)\}_{n\in N^+}$ est convergente dans $L_2(\Lambda, H)$ pour tout $h \in L_2(\Lambda, H)$. Cela résulte de 3,6 et (1).

4° Comme dans 3,8.

5° Pour tout $h \in L_2(\Lambda, H)$, $P(h) \in L_2(\Lambda, H)$ et $\|P(h)\|_{L_2} \leqq (\sup_{k \in N} \|(-k^2C + ikB + A)^{-1}\|) \|h\|_{L_2}$.

6°–8° Comme dans 3,13.

9° La suite $\{Q_n(h)\}_{n \in N^+}$ est convergente dans $L_2(\Lambda, H)$ pour tout $h \in L_2(\Lambda, H)$. Cela résulte de 3,6 et (2).

10° Comme dans 3,8.

11° Pour tout $h \in L_2(\Lambda, H)$, $Q(h) \in L_2(\Lambda, H)$ et $\|Q(h)\|_{L2} \leqq (\sup_{k \in N} \|\Theta(-k^2C + ikB + A)^{-1}\|) \|h\|_{L_2}$.
C'est une conséquence de 3,6 et (2).

12°, 13° Comme dans 3,13.

Remarque 1. Nous avons examiné quatre modèles de la théorie d'existence pour les solutions périodiques de l'équation $C\,u''(t) + B\,u'(t) + A\,u(t) = h(t)$. On peut classifier ces quatre modèles de deux points de vue. L'un concerne le comportement de la suite spectrale $(-k^2C + ikB + A)^{-1}$ et l'autre concerne le type d'espace. La différence qui existe entre les espaces de Banach généraux et les espaces de Hilbert est profonde, car dans les espaces de Hilbert on peut directement utiliser l'orthogonalité des fonctions $e^{ikt}$, $k \in N$, $x \in H$.

Dans le premier modèle 3,8, on suppose que l'espace est un Banach général, mais la restriction concernant la suite spectrale est assez sévère. On suppose que ses normes appartiennent à $(l_1)$. La spécialisation aux espaces de Hilbert n'apporte aucune simplification ou renforcement du résultat.

Les deux modèles centraux 3,10 et 3,13 sont bien proches, le deuxième concerne les espaces de Banach généraux, le troisième les espaces de Hilbert, les hypothèses étant dans les deux cas les mêmes, c'est-à-dire que les normes de la suite spectrale appartiennent à $(l_2)$. On voit que le résultat est (en un certain sens) plus simple et plus fort dans le troisième modèle.

Le quatrième modèle 3,16 s'applique exclusivement aux espaces de Hilbert, les hypothèses étant les plus faibles de tous les quatre cas, puisque les normes de la suite spectrale appartiennent à $(l_\infty)$. Mais si l'on abandonnait les espaces de Hilbert, on perdrait, semble-t-il, tout le résultat.

Notons encore que le théorème d'existence pour le quatrième modèle 3,16 peut être inverti (les hypothèses sont aussi nécessaires) dans le cadre des espaces de Hilbert. Par contre le „complément compact“ (cf. 3,9, 3,12, 3,15) ne peut être construit dans ce cas (la convergence de la suite $P_n$ dans 3,16 n'est pas uniforme).

Remarque 2. Si l'on traduisait les résultats de Staude [1] dans le cadre abstrait (ce qui n'apporte aucune difficulté), on verrait (au moins pour le cas linéaire) que le problème considéré par lui peut être subordonné à notre modèle abstrait 3,8. Il suffit de choisir convenablement l'espace $E$ et les opérateurs $A$, $B$, $C$ ce qui est facile. L'auteur ne connaît aucune autre application du théorème 3,8, le plus restrictif en ce qui concerne le comportement asymptotique de la suite spectrale.

**3,17. Théorème d'unicité pour le problème périodique.** *Soit* $A, B, C \in \mathfrak{L}^+(E)$, $u, h \in \Lambda \to E$. *Si* (a) *comme dans* 2,8, (b) *h est presque partout nulle,* (c) $u \in L(\Lambda, E)$ *est une solution du problème périodique pour* $A, B, C$, *excitée par* $h$, *alors* $u$ *est presque partout nulle.*

Preuve. Prenant $\varphi(\tau) = e^{-ik\tau}$, $k \in N$, on obtient selon 2,1

$$(-k^2C + ikB + A)\left(\int_\Lambda e^{-ik\tau} u(\tau)\, d\tau\right) = 0\,,$$

d'où $\int_\Lambda e^{-ik\tau} u(\tau)\, d\tau = 0$, ce qui donne notre résultat en vertu de 1,21.

**3,18.** Un espace de Banach $\Phi(\Lambda, E)$ s'appelle un *espace standard des fonctions de* $\Lambda \to E$ si

(I) $\Phi(\Lambda, E) \subseteq L(\Lambda, E)$,

(II) il existe une constante $c_1$ telle que pour tout $f \in \Phi(\Lambda, E)$

$$\|f\|_L \leqq c_1 \|f\|_\Phi\,,$$

(III) pour tout $x \in E$ et $k \in N$ la fonction $e^{ikt}x$ appartient à $\Phi(\Lambda, E)$,

(IV) il existe une constante $c_2$ telle que pour tout $x \in E$ et $k \in N$

$$\|e^{ikt}x\|_\Phi \leqq c_2 \|x\|\,.$$

Si $\Phi(\Lambda, E)$ est un espace standard et $q = 0, 1, 2, \dots$ on désignera par $\Phi^{(q)}(\Lambda, E)$ l'ensemble $\{f : f$ est $q$-fois dérivable au sens de 1,14 et $f^{(j)} \in \Phi(\Lambda, E)$, $j = 0, 1, \dots, q\}$ La norme dans $\Phi^{(q)}(\Lambda, E)$ soit définie par

$$\|f\|_{\Phi^{(q)}} = \max_{j=0,1,\dots,q} \left(\|f^{(j)}\|_\Phi\right).$$

On peut vérifier facilement que les espaces $C(\Lambda, E)$, $V(\Lambda, E)$, $L_p(\Lambda, E)$, $1 \leqq p < \infty$ sont standards.

**3,19.** Les lemmes et théorèmes 3,3–3,16 peuvent être généralisés. Nous avons préféré une présentation plus simple ci-dessus, qui montre les traits essentiels, et maintenant, nous allons montrer, à titre d'exemple, les généralisations du lemme 3,4 et des théorèmes 3,10, 3,11 et 3,12. Les autres lemmes et théorèmes en question peuvent être étendus d'une façon analogue.

**3,20. Lemme.** *Soit* $q = 0, 1, 2, \dots$ *Si* $\sum_{k \in N} k^{2q} \|T_k\|^2 < \infty$, *alors pour tout* $m = 0, 1, 2, \dots$

($\alpha$) *la suite* $\{P_n\}_{n \in N^+}$ *est convergente dans l'espace* $\mathfrak{L}(V^{(m)}(\Lambda, E), V^{(m+q)}(\Lambda, E))$,

($\beta$) $\|P_n(f)\|_{V^{(m+q)}} \leqq 2\pi\left[\sum_{k=-n}^{n} k^{2q} \|T_k\|^2\right]^{1/2} \|f\|_{V^{(m)}}$ *pour* $f \in V^{(m)}(\Lambda, E)$, $n \in N^+$.

Preuve. Posons $a_k = \int_\Lambda e^{-ik\tau} f(\tau)\, d\tau$ pour $f \in V^{(m)}(\Lambda, E)$, $k \in N$. D'après 1,22, $(-ik)^m a_k = \int_\Lambda e^{-ik\tau} f^{(m)}(\tau)\, d\tau$, d'où, en vertu de 1,11,

$$(1) \qquad |k|^m \|a_k\| \leqq \frac{2\pi}{|k| + 1} \|f^{(m)}\|_V \leqq \frac{2\pi}{|k| + 1} \|f\|_{V^{(m)}} .$$

Ensuite, d'après (1) et 1,10, pour $l_1, l_2 \in N$, $l_1 \leqq l_2$ et $j = 0,1, \dots, m + q$:

$$\begin{aligned}
\|(\sum_{k=l_1}^{l_2} e^{ikt} T_k a_k)^{(j)}\|_V &= \|\sum_{k=l_1}^{l_2} (ik)^j e^{ikt} T_k a_k\|_V \leqq \\
&\leqq 2\pi[\sum_{k=l_1}^{l_2} (|k| + 1)^2 \| k^j T_k a_k\|^2]^{1/2} = \\
&= 2\pi[\sum_{k=l_1}^{l_2} (|k| + 1)^2 k^{2j} \|T_k a_k\|^2]^{1/2} \leqq \\
&\leqq 2\pi[\sum_{k=l_1}^{l_2} (|k| + 1)^2 k^{2j} \|T_k\|^2 \|a_k\|^2]^{1/2} \leqq \\
&\leqq 2\pi[\sum_{k=l_1}^{l_2} (|k| + 1)^2 k^{2(m+q)} \|T_k\|^2 \|a_k\|^2]^{1/2} = \\
&= 2\pi[\sum_{k=l_1}^{l_2} ((|k| + 1) k^m \|a_k\|)^2 k^{2q} \|T_k\|^2]^{1/2} \leqq \\
&\leqq 4\pi^2[\sum_{k=l_1}^{l_2} k^{2q} \|T_k\|^2]^{1/2} \|f\|_{V^{(m)}} ,
\end{aligned}$$

d'où aussitôt ($\alpha$), ($\beta$).

**3,21. Théorème d'existence pour le problème périodique de la classe ($l_2$) dans les espaces de Banach.** *Soit* $A, B, C, \Theta \in \mathfrak{L}^+(E)$, $\varkappa, \nu = 0, 1, 2, \dots$ *Si les hypothèses* (a)–(d) *de* 3,8 *ont lieu et* (e)

$$(1) \qquad \sum_{k \in N} k^{2\varkappa} \|(-k^2 C + ikB + A)^{-1}\|^2 < \infty ,$$

$$(2) \qquad \sum_{k \in N} k^{2\nu} \|\Theta(-k^2 C + ikB + A)^{-1}\|^2 < \infty ,$$

*alors, pour tout* $m = 0, 1, 2, \dots$ *et* $h \in V(\Lambda, E)$, *il existe une solution* $u \in V^{(m+\varkappa)}(\Lambda, E)$ *du problème périodique pour* $A$, $B$, $C$, *excitée par* $h$, *telle que*

$$(3) \qquad \|u\|_{V^{(m+\varkappa)}} \leqq 2\pi[\sum_{k \in N} k^{2\varkappa} \|(-k^2 C + ikB + A)^{-1}\|^2]^{1/2} \|h\|_{V^{(m)}} ,$$

$\Theta u \in V^{(m+\nu)}(\Lambda, E)$ *et*

$$(4) \qquad \|\Theta u\|_{V^{(m+\nu)}} \leqq 2\pi[\sum_{k \in N} k^{2\nu} \|\Theta(-k^2 C + ikB + A)^{-1}\|^2]^{1/2} \|h\|_{V^{(m)}} .$$

La preuve se construit facilement à l'instar de 3,10 en vertu du lemme 3,20.

**3,22. Complément sur la continuité.** *Soit* $A, B, C, \Theta \in \mathfrak{L}^+(E)$, $\varkappa, \nu = 0, 1, 2 \ldots$ *Si les hypothèses de* 3,21 *ont lieu, alors, pour tout* $m = 0, 1, 2, \ldots$ *et toute suite bornée* $\{h_r\}_{r\in N^+}$ *de* $V^{(m)}(\Lambda, E)$ *telle que* $\|h_r\|_L \to 0$ $(r \to \infty)$, *il existe une suite* $\{u_r\}_{r\in N^+}$ *de solutions du problème périodique pour* $A, B, C$, *excitées par* $h_r$, $r \in N^+$ *resp., telle que* $u_r \in V^{(m+\varkappa)}(\Lambda, E)$ *pour* $r \in N^+$, $\|u_r\|_{V^{(m+\varkappa)}} \to 0$ $(r \to \infty)$, $\Theta u_r \in$ $\in V^{(m+\nu)}(\Lambda, E)$ *pour* $r \in N^+$, $\|\Theta u_r\|_{V^{(m+\nu)}} \to 0$ $(r \to \infty)$.

**3,23. Complément sur la compacité.** *Soit* $A, B, C, \Theta \in \mathfrak{L}^+(E)$, $\varkappa, \nu = 0, 1, 2, \ldots$ *Si les hypothèses* (a)$-$(e) *de* 3,21 *et l'hypothèse* (f) *de* 3,9 *ont lieu, alors, pour tout* $m = 0, 1, 2, \ldots$ *et pour toute suite bornée* $\{h_r\}_{r\in N^+}$ *de* $V^{(m)}(\Lambda, E)$, *il existe une suite* $\{u_r\}_{r\in N^+}$ *de solutions du problème périodique pour* $A, B, C$, *excitées par* $h_r$, $r \in N^+$ *resp., telle que* $u_r \in V^{(m+\varkappa)}(\Lambda, E)$ *pour* $r \in N^+$, *la suite* $\{u_r\}_{r\in N^+}$ *est compacte dans* $V^{(m+\varkappa)}(\Lambda, E)$, $\Theta u_r \in V^{(m+\nu)}(\Lambda, E)$ *pour* $r \in N^+$ *et la suite* $\{\Theta u_r\}_{r\in N^+}$ *est compacte dans* $V^{(m+\nu)}(\Lambda, E)$.

Les preuves de 3,22 et 3,23 sont analogues à celles de 3,11 et 3,12.

**3,24. Théorème sur le problème correctement posé.** *Soit* $A, B, C, \Theta \in \mathfrak{L}^+(E)$, $\Phi(\Lambda, E)$ *un espace standard des fonctions de* $\Lambda \to E$ *et* $\varkappa, \nu = 0, 1, 2, \ldots$ *Si* (a) *pour tout* $h \in \Phi(\Lambda, E)$, *il existe une et une seule solution* $u \in L(\Lambda, E)$ *du problème périodique pour* $A, B, C$, *excitée par* $h$, (b) *on peut trouver une constante* $a$ *qui possède la propriété suivante: pour tout* $h \in \Phi(\Lambda, E)$ *et* $u \in L(\Lambda, E)$ *tels que* $u$ *est une solution du problème périodique pour* $A, B, C$, *excitée par* $h$, *on a* $u \in \Phi^{(\varkappa)}(\Lambda, E)$, $\Theta u \in \Phi^{(\nu)}(\Lambda, E)$ *et*

$$\|u\|_{\Phi^{(\varkappa)}} \leqq a\|h\|_{\Phi}\,, \tag{1}$$

$$\|\Theta u\|_{\Phi^{(\nu)}} \leqq a\|h\|_{\Phi}\,, \tag{2}$$

(c) *l'opérateur* $\Theta$ *est fermé, alors,* ($\alpha$) *pour tout* $k \in N$, *l'opérateur* $-k^2C + ikB + A$ *est biunivoque,* $(-k^2C + ikB + A)^{-1} \in \mathfrak{L}(E)$ *et* $\Theta(-k^2C + ikB + A)^{-1} \in \mathfrak{L}(E)$ *et* ($\beta$) *il existe une constante* $c$ *telle que pour* $k \in N$

$$|k|^{\varkappa}\,\|(-k^2C + ikB + A)^{-1}\| \leqq c\,, \tag{3}$$

$$|k|^{\nu}\,\|\Theta(-k^2C + ikB + A)^{-1}\| \leqq c\,. \tag{4}$$

Preuve. Supposons d'abord que $(-k^2C + ikB + A)\,x = 0$ pour un $x \in E$, $k \in N$. Par conséquent,

si l'on désigne $u(t) = e^{ikt}x$, on vérifiera facilement que $u$ est une solution du problème périodique pour $A, B, C$, excitée par 0. Ceci entraîne, grâce à l'hypothèse (a), que $u = 0$ ce qui équivaut à $x = 0$. La biunivocité de l'opérateur $-k^2C + ikB + A$ est ainsi démontrée.

Maintenant, soient $k \in N$ et $x \in E$ quelconques, mais fixes, et posons $h(t) = e^{ikt}x$.

Alors, $h \in \Phi(\Lambda, E)$ d'après 3,18 (III). D'autre part, d'après (a), (b), il existe une solution $u \in L(\Lambda, E)$ du problème périodique pour $A$, $B$, $C$, excitée par $h$, pour laquelle $u \in \Phi^{(\varkappa)}(\Lambda, E)$, $\Theta u \in \Phi^{(\nu)}(\Lambda, E)$, les inégalités (1), (2) ont lieu.

Par conséquent, si l'on prend $\varphi(t) = e^{-ikt}$ dans 2,1, on a

$$(-k^2C + ikB + A)\left(\int_\Lambda^t e^{-ik\tau} u(\tau)\,d\tau\right) = \int_\Lambda e^{-ik\tau} h(\tau)\,d\tau = 2\pi x\,,$$

d'où

$$(5)\qquad (ik)^\varkappa (-k^2C + ikB + A)^{-1} x = \frac{1}{2\pi}(ik)^\varkappa \int_\Lambda e^{-ik\tau}\,d\tau\,,$$

d'où d'après 1,22,

$$(ik)^\varkappa (-k^2C + ikB + A)^{-1} x = \frac{1}{2\pi}\int_\Lambda e^{-ik\tau} u^{(\varkappa)}(\tau)\,d\tau\,,$$

ce qui donne grâce à (1) et 3,18 (IV)

$$(6)\qquad |k|^\varkappa \,\|(-k^2C + ikB + A)^{-1}\| \leqq \|u\|_{\Phi^{(\varkappa)}} \leqq a\|h\|_\Phi \leqq ac_2\|x\|\,.$$

D'autre part, comme $\Theta$ est fermé d'après (c) et $\Theta u \in \Phi^{(\nu)}(\Lambda, E)$, on obtient de (5)

$$(7)\qquad (ik)^\nu\, \Theta(-k^2C + ikB + A)^{-1} x = \frac{1}{2\pi}(ik)^\nu \int_\Lambda e^{-ik\tau}\Theta\, u(\tau)\,d\tau\,,$$

d'où, d'après 1,22,

$$(ik)^\nu\, \Theta(-k^2C + ikB + A)^{-1} = \frac{1}{2\pi}\int_\Lambda e^{-ik\tau}(\Theta u)^{(\nu)}(\tau)\,d\tau\,,$$

ce qui donne grâce à (2) et 3,18 (IV)

$$(8)\qquad |k|^\nu \,\|\Theta(-k^2C + ikB + A)^{-1}\| \leqq \|\Theta u\|_{\Phi^{(\nu)}} \leqq a\|h\|_\Phi \leqq ac_2\|x\|\,.$$

Ceci étant, notre théorème est prouvé, ce qui est à voir de (5)–(8) ($c = ac_2$).

Remarque. Les hypothèses (a)–(c) du théorème précédent représentent les traits caractéristiques du problème périodique linéaire correctement posé dont les données sont des opérateurs $A$, $B$, $C$, $\Theta \in \mathfrak{L}^+(E)$, un espace standard $\Phi(\Lambda, E)$ et deux nombres $\varkappa$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$

Si l'on y prend $H$ au lieu de $E$, $\Phi(\Lambda, E) = L_2(\Lambda, H)$ et $\varkappa$, $\nu = 0$, on obtient aussitôt l'inversion du théorème 3,16. Dans le cas de $\varkappa$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ quelconques, on obtient l'inversion de la généralisation du théorème 3,16 mentionnée dans 3,19.

## 4. EXISTENCE DES SOLUTIONS PÉRIODIQUES DES ÉQUATIONS FAIBLEMENT NON-LINÉAIRES – LA MÉTHODE DU PETIT PARAMÈTRE

**4,1. Théorème d'existence: $L_p$-modèle.** *Soit* $A, B, C, \Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_d \in \mathfrak{L}^+(E)$, $g \in \langle 0, 1 \rangle \times \Lambda \times \underset{1}{E} \times \ldots \times \underset{d+1}{E} \to E$, $1 \leqq p < \infty$, $M \subseteq L_p(\Lambda, E)$. *Si* (a) *pour tout* $h \in L_p(\Lambda, E)$ *il existe une et une seule solution* $u$ *du problème périodique pour* $A, B, C$, *excitée par* $h$, (b) *pour toutes* $u, h \in L_p(\Lambda, E)$ *telles que* $\|h\|_{L_p} \leqq 1$ *et* $u$ *est une solution du problème périodique pour* $A, B, C$, *excitée par* $h$, *on a* $u \in M$ *et* $\Theta_j u \in M$, $j = 1, 2, \ldots, d$, (c) *l'ensemble* $M$ *est borné dans* $L_p(\Lambda, E)$, (d) *les opérateurs* $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_d$ *sont fermés,* (e) *les fonctions* $g(\varepsilon, ., 0, 0, \ldots, 0)$, $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$ *constituent un sous-ensemble borné dans* $L_p(\Lambda, E)$, (f) *pour tout* $\alpha > 0$, *il existe une constante* $b_\alpha$ *telle que pour tout* $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$, $t \in \Lambda$, $\|x_1\| \leqq \alpha$, $\|x_2\| \leqq \alpha$, $\|p_1^{(j)}\| \leqq \alpha$, $\|p_2^{(j)}\| \leqq \alpha$, $j = 1, 2, \ldots, d$,

$$(1) \qquad \|g(\varepsilon, t, x_1, p_1^{(1)}, \ldots, p_1^{(d)}) - g(\varepsilon, t, x_2, p_2^{(1)}, \ldots, p_2^{(d)})\| \leqq$$
$$\leqq b_\alpha[\|x_1 - x_2\| + \sum_{j=1}^{d} \|p_1^{(j)} - p_2^{(j)}\|]\,,$$

*alors, pour tout* $\alpha > 0$, *on peut trouver deux constantes* $0 < \varepsilon_\alpha \leqq 1$ *et* $c_\alpha$ *jouissant des propriétés suivantes: pour tout* $0 \leqq \varepsilon \leqq \varepsilon_\alpha$ *il existe une et une seule fonction* $u_\alpha(\varepsilon) \in \Lambda \to E$ *telle que*

$$(\alpha) \qquad u_\alpha(\varepsilon) \in \varepsilon c_\alpha M\,, \quad \Theta_j\, u_\alpha(\varepsilon) \in \varepsilon c_\alpha M\,, \quad j = 1, 2, \ldots, d$$

($\beta$) $u_\alpha(\varepsilon)$ *est une solution du problème périodique pour* $A, B, C$, *excitée par la fonction*

$$\varepsilon g(\varepsilon, t, u_\alpha(\varepsilon)(t), \Theta_1\, u_\alpha(\varepsilon)(t), \ldots, \Theta_d\, u_\alpha(\varepsilon)(t))\,.$$

Preuve. Soit $\mathscr{E} = \mathscr{E}(L_p(\Lambda, E)) = \{u : u \in L_p(\Lambda, E),\ \Theta_j u \in L_p(\Lambda, E),\ j = 1, 2, \ldots \ldots, d\}$. Dans $\mathscr{E}$, on introduit la norme suivante: $\|u\|_{\mathscr{E}} = \|u\|_{L_p} + \sum_{j=1}^{d} \|\Theta_j u\|_{L_p}$. On vérifie sans peine que $\mathscr{E}$ est un espace de Banach, grâce à l'hypothèse (d).

Soit $\mathscr{M} = \mathscr{M}(L_p(\Lambda, E)) = \{u : u \in M,\ \Theta_j u \in M,\ j = 1, 2, \ldots, d\}$. D'après (c), $\mathscr{M}$ est un sous-ensemble borné de $\mathscr{E}$.

Pour $h \in L_p(\Lambda, E)$, soit $P(h)$ la solution du problème periodique pour $A, B, C$, excitée par $h$, qui existe et est unique d'après (a).

En vertu de (b), $P(h) \in \mathscr{M}$ pour tout $h \in L_p(\Lambda, E)$, $\|h\|_{L_p} \leqq 1$. Comme $\mathscr{M}$ est borné dans $\mathscr{E}$, il existe une constante $a$ telle que

$$(2) \qquad \|P(h)\|_{\mathscr{E}} \leqq a\|h\|_{L_p} \quad \text{pour} \quad h \in L_p(\Lambda, E).$$

Soit $b_0 = \sup_{0 \leqq \varepsilon \leqq 1} \|g(\varepsilon, ., 0, 0, \ldots, 0)\|_{L_p}$.

Soit $\alpha > 0$ fixe et $\mathscr{K}_\alpha = \{u : u \in \mathscr{E},\ \|u\|_{\mathscr{E}} \leqq \alpha\}$. Ainsi $\mathscr{K}_\alpha$ est un espace métrique complet par rapport à la métrique $\varrho(u_1, u_2) = \|u_1 - u_2\|_{\mathscr{E}}$.

Pour tout $u \in \mathscr{E}$, $t \in \Lambda$, $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$, écrivons

$$G(\varepsilon, u)(t) = g(\varepsilon, t, u(t), \Theta_1 u(t), \ldots, \Theta_d u(t)) .$$

Ceci étant, on déduit aisément de (e), (f) pour $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$, $u, u_1, u_2 \in \mathscr{K}_\alpha$

(3) $$G(\varepsilon, u) \in L_p(\Lambda, E) ,$$

(4) $$\|G(\varepsilon, u)\|_{L_p} \leqq b_0 + b_\alpha \alpha ,$$

(5) $$\|G(\varepsilon, u_1) - G(\varepsilon, u_2)\|_{L_p} \leqq b_\alpha \varrho(u_1, u_2) .$$

En vertu de (4)–(7), on obtient pour $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$, $u, u_1, u_2 \in \mathscr{K}_\alpha$:

(6) $$PG(\varepsilon, u) \in \frac{a}{\alpha} (b_0 + b_\alpha \alpha) \mathscr{K}_\alpha ,$$

(7) $$PG(\varepsilon, u) \in (b_0 + b_\alpha \alpha) M , \quad \Theta_j PG(\varepsilon, u) \in (b_0 + b_\alpha \alpha) M , \quad j = 1, 2, \ldots, d ,$$

(8) $$\varrho(PG(\varepsilon, u_1), PG(\varepsilon, u_2)) \leqq a b_\alpha \varrho(u_1, u_2) .$$

Soit $\varepsilon_\alpha = [1 + a/\alpha(b_0 + b_\alpha \alpha) + 2ab_\alpha]^{-1}$.
Il suit de (6) et (8) pour $0 \leqq \varepsilon \leqq \varepsilon_\alpha$, $u, u_1, u_2 \in \mathscr{K}_\alpha$:

(9) $$\varepsilon PG(\varepsilon, u) \in \mathscr{K}_\alpha$$

(10) $$\varrho(PG(\varepsilon, u_1), PG(\varepsilon, u_2)) \leqq \tfrac{1}{2}\varrho(u_1, u_2) .$$

Envisageons maintenant l'opérateur $\varepsilon PG(\varepsilon, .)$, $0 \leqq \varepsilon \leqq \varepsilon_\alpha$. On observe, en vertu de (9) et (10) qu'on peut appliquer le théorème de Banach à cet opérateur dans l'espace $\mathscr{K}_\alpha$, $\alpha > 0$. On en déduit qu'il existe une et une seule fonction $u_\alpha(\varepsilon)$ telle que

(11) $$u_\alpha(\varepsilon) = \varepsilon PG(\varepsilon, u_\alpha(\varepsilon)) .$$

En outre, d'après (7)

(12) $$u_\alpha(\varepsilon) \in \varepsilon(b_0 + b_\alpha \alpha) M , \quad \Theta_j u_\alpha(\varepsilon) \in (b_0 + b_\alpha \alpha) M , \quad j = 1, 2, \ldots, d .$$

Ainsi notre théorème découle de (11) et (12) si l'on prend $c_\alpha = b_0 + b_\alpha \alpha$.

**4,2. Théorème d'existence:** $C$**-modèle.** *Soit* $A, B, C, \Theta_1, \ldots, \Theta_d \in \mathfrak{L}^+(E)$, $g \in \langle 0, 1 \rangle \times \Lambda \times \underset{1}{E} \times \ldots \times \underset{d+1}{E} \to E$, $M \subseteq C(\Lambda, E)$. *Si les hypothèses* (a)–(f) *de* 4,1 *ont lieu lorsqu'on remplace* $L_p(\Lambda, E)$ *par* $C(\Lambda, E)$,

(g) $$g(\varepsilon, 0, x, p^{(1)}, \ldots, p^{(d)}) = g(\varepsilon, 2\pi, x, p^{(1)}, \ldots, p^{(d)})$$

*pour tout* $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$, $x \in E$, $p^{(j)} \in E$, $j = 1, 2, \ldots, d$, *alors l'assertion de* 4,1 *reste en vigueur.*

Preuve. On peut procéder pas à pas comme dans 4,1; à l'exception de quelques détails, il suffit de remplacer $L_p(\Lambda, E)$ par $C(\Lambda, E)$.

**4,3. Théorème d'existence: $V$-modèle.** *Soit* $A, B, C, \Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_d \in \mathfrak{L}^+(E)$, $g \in \langle 0, 1\rangle \times \Lambda \times \underset{1}{E} \times \dots \times \underset{d+1}{E} \to E$. *Si les hypothèses* (a)–(d) *de* 4,1 *ont lieu lorsqu'on remplace* $L_p(\Lambda, E)$ *par* $V(\Lambda, E)$, (e) *l'ensemble* $\{g(\varepsilon, 0, 0, \dots, 0) : 0 \leqq \varepsilon \leqq 1\}$ *est borné dans* $E$, (f) *pour tout* $\alpha > 0$, *on peut trouver une constante* $b_\alpha$ *et un ensemble déterminant* $X_\alpha \subseteq E^*$ *tels que pour tout* $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$, $t_1, t_2, s_1, s_2 \in \Lambda$, $x_i, y_i \in E$, $\|x_i\| \leqq \alpha$, $\|y_i\| \leqq \alpha$, $i = 1, 2$, $p_i^{(j)}, q_i^{(j)} \in E$, $\|p_i^{(j)}\| \leqq \alpha$, $\|q_i^{(j)}\| \leqq \alpha$, $i = 1, 2, j = 1, 2, \dots, d$ *et pour tout* $x^* \in X_\alpha$

$$\begin{aligned}
(1)\qquad & |x^*[g(\varepsilon, t_1, x_1, p_1^{(1)}, \dots, p_1^{(d)}) - g(\varepsilon, s_1, y_1, q_1^{(1)}, \dots, q_1^{(d)}) - \\
& - g(\varepsilon, t_2, x_2, p_2^{(1)}, \dots, p_2^{(d)}) + g(\varepsilon, s_2, y_2, q_2^{(1)}, \dots, q_2^{(d)})]| \leqq \\
& \leqq b_\alpha[|t_1 - s_1 - t_2 + s_2| + |x^*(x_1 - y_1 - x_2 + y_2)| + \\
& + \sum_{j=1}^{d} |x^*(p_1^{(j)} - q_1^{(j)} - p_2^{(j)} + q_2^{(j)})|] + \\
& + b_\alpha[|t_1 - s_1| + |t_2 - s_2| + \|x_1 - y_1\| + \|x_2 - y_2\| + \\
& + \sum_{j=1}^{d} (\|p_1^{(j)} - q_1^{(j)}\| + \|p_2^{(j)} - q_2^{(j)}\|)] \times \\
& \times [|t_1 - t_2| + |s_1 - s_2| + |x^*(x_1 - x_2)| + |x^*(y_1 - y_2)| + \\
& + \sum_{j=1}^{d} (|x^*(p_1^{(j)} - p_2^{(j)})| + |x^*(q_1^{(j)} - q_2^{(j)})|)],
\end{aligned}$$

(g) *comme dans* 4,2, *alors l'assertion du théorème* 4,1 *reste en vigueur.*

Preuve. Le commencement est le même que dans 4,1 avec $V(\Lambda, E)$ au lieu de $L_p(\Lambda, E)$, c'est-à-dire la définition de $\mathscr{E}$, $\mathscr{M}$, $P$, de la constante $a$ avec l'inégalité

$$(2)\qquad \|P(h)\|_{\mathscr{E}} \leqq a\|h\|_V \quad \text{pour} \quad h \in V(\Lambda, E),$$

la définition de l'espace $\mathscr{K}_\alpha$ et de la transformation $G$. La définition de la constante $b_0$ doit être changée.

Soit $b_0 = \sup_{0 \leqq \varepsilon \leqq 1} \|g(\varepsilon, 0, 0, \dots, 0)\|$.

On a d'après (1) pour tout $t \in \Lambda$ ($t = t_1$, $t_2 = s_1 = s_2 = 0$, $x_i = y_i = p_i^{(j)} = q_i^{(j)} = 0, i = 1, 2, j = 1, 2, \dots, d$) $\|g(\varepsilon, t, 0, 0, \dots, 0) - g(\varepsilon, 0, 0, 0, \dots, 0)\| \leqq (2\pi + (2\pi)^2)\, b_\alpha \leqq 46 b_\alpha$, d'où

$$(3)\qquad \|g(\varepsilon, t, 0, 0, \dots, 0)\| \leqq b_0 + 46 b_\alpha.$$

Maintenant, nous allons évaluer $\|G(\varepsilon, u)\|_V$ pour $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$, $u \in \mathscr{K}_\alpha$.

Il résulte de (1) pour $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$, $t \in \Lambda$, $\|x\| + \sum_{j=1}^{d} \|p^{(j)}\| \leqq \alpha$ $(t = t_1 = t_2,\ s_1 = s_2 = 0,\ x_1 = x,\ p_1^{(j)} = p^{(j)},\ x_2 = y_i = p_2^{(j)} = q_i^{(j)} = 0,\ i = 1, 2,\ j = 1, 2, \ldots, d)$ $\|g(\varepsilon, t, x, p^{(1)}, \ldots, p^{(d)}) - g(\varepsilon, t, 0, 0, \ldots, 0)\| \leqq b_\alpha(\alpha + \alpha^2)$, d'où, en vertu de (3),

$$\|g(\varepsilon, t, x, p^{(1)}, \ldots, p^{(d)})\| \leqq b_0 + b_\alpha(46 + \alpha + \alpha^2)\,,$$

ce qui donne pour $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$, $u \in \mathscr{K}_\alpha$ $(x = u(t),\ p^{(j)} = \Theta_j\, u(t),\ j = 1, 2, \ldots, d)$

$$\|G(\varepsilon, u)\|_C \leqq b_0 + b_\alpha\ (46 + \alpha + \alpha^2)\,. \tag{4}$$

En vertu de (1), on peut écrire pour $\|x_1\| + \sum_{j=1}^{d} \|p_1^{(j)}\| \leqq \alpha$, $\|x_2\| + \sum_{j=1}^{d} \|p_2^{(j)}\| \leqq \alpha$, $t_1, t_2 \in \Lambda$ $(s_1 = s_2 = 0,\ y_1 = y_2 = 0,\ q_1^{(j)} = q_2^{(j)} = 0,\ j = 1, 2, \ldots, d)$

$$\begin{aligned} &|x^*[(g(\varepsilon, t_1, x_1, p_1^{(1)}, \ldots, p_1^{(d)}) - g(\varepsilon, t_2, x_2, p_2^{(1)}, \ldots, p_2^{(d)})]| \leqq \\ &\leqq b_\alpha(4\pi + 2\alpha + 1)\,[|t_1 - t_2| + |x^*(x_1 - x_2)| + \sum_{j=1}^{d} |x^*(p_1^{(j)} - p_2^{(j)})|]\,, \end{aligned} \tag{5}$$

ce qui donne d'après 1,4 pour $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$, $u \in \mathscr{K}_\alpha$ $(x_1 = u(t_1),\ x_2 = u(t_2),\ p_1^{(j)} = \Theta_j\, u(t_1),\ p_2^{(j)} = \Theta_j\, u(t_2),\ j = 1, 2, \ldots, d)$

$$\begin{aligned} \mathfrak{v}(G(\varepsilon, u)) &\leqq b_\alpha(4\pi + 2\alpha + 1)\,[2\pi + \mathfrak{v}(u) + \sum_{j=1}^{d} \mathfrak{v}(\Theta_j u)] \leqq \\ &\leqq b_\alpha(4\pi + 2\alpha + 1)\,(2\pi + \alpha)\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Donc, il résulte de (4) et (6) pour $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$, $u \in \mathscr{K}_\alpha$

$$\|G(\varepsilon, u)\|_V \leqq b_0 + b_\alpha(46 + \alpha + \alpha^2) + b_\alpha(4\pi + 2\alpha + 1)\,(2\pi + \alpha) = \bar{b}_\alpha\,. \tag{7}$$

Reste à évaluer $G(\varepsilon, u_1) - G(\varepsilon, u_2)$ pour $u_1, u_2 \in \mathscr{K}_\alpha$.

En utilisant (5) et 1,4, on obtient $(t_1 = t_2 = t,\ x_1 = u_1(t),\ x_2 = u_2(t),\ p_1^{(j)} = \Theta_j\, u_1(t),\ p_2^{(j)} = \Theta_j\, u_2(t),\ j = 1, 2, \ldots, d)$

$$\begin{aligned} &\|G(\varepsilon, u_1) - G(\varepsilon, u_2)\|_C \leqq \\ &\leqq b_\alpha(4\pi + 2\alpha + 1)\,[\|u_1 - u_2\|_C + \sum_{j=1}^{d} \|\Theta_j(u_1 - u_2)\|_C] \leqq \\ &\leqq b_\alpha(4\pi + 2\alpha + 1)\,\varrho(u_1, u_2)\,. \end{aligned} \tag{8}$$

D'autre part, il résulte de (1) pour $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$, $u_1, u_2 \in \mathscr{K}_\alpha$ $(t_i = s_i,\ x_i = u_1(t_i),\ y_i = u_2(t_i),\ p_i^{(j)} = \Theta_j\, u_1(t_i),\ q_i^{(j)} = \Theta_j\, u_2(t_i),\ i = 1, 2,\ j = 1, 2, \ldots, d)$

$$\begin{aligned} \mathfrak{v}(G(\varepsilon, u_1) - G(\varepsilon, u_2)) &\leqq b_\alpha[\mathfrak{v}(u_1 - u_2) + \sum_{j=1}^{d} \mathfrak{v}(\Theta_j(u_1 - u_2))] + \\ &+ 2b_\alpha[\|u_1 - u_2\|_C + \sum_{j=1}^{d} \|\Theta_j(u_1 - u_2)\|_C]\,[2\pi + \mathfrak{v}(u_1) + \mathfrak{v}(u_2) + \end{aligned} \tag{9}$$

$$+ \sum_{j=1}^{d} (\mathfrak{v}(\Theta_j u_1) + \mathfrak{v}(\Theta_j u_2))] \leqq b_\alpha[\|u_1 - u_2\|_V + \sum_{j=1}^{d} \|\Theta_j(u_1 - u_2)\|_V] +$$

$$+ 2b_\alpha[\|u_1 - u_2\|_V + \sum_{j=1}^{d} \|\Theta_j(u_1 - u_2)\|_V] [2\pi + \|u_1\|_V + \|u_2\|_V +$$

$$+ \sum_{j=1}^{d} (\|\Theta_j u_1\|_V + \|\Theta_j u_2\|_V)] \leqq b_\alpha[1 + 4\pi + 4\alpha] \varrho(u_1, u_2) .$$

Enfin, (8) et (9) entraînent pour $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$, $u_1, u_2 \in \mathscr{K}_\alpha$

(10) $$\|G(\varepsilon, u_1) - G(\varepsilon, u_2)\|_V \leqq b_\alpha(1 + 8\pi + 6\alpha) \varrho(u_1, u_2) \leqq \bar{b}_\alpha \varrho(u_1, u_2) .$$

Il suit de (7) et (10) pour $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$, $u, u_1, u_2 \in \mathscr{K}_\alpha$:

(11) $$PG(\varepsilon, u) \in \frac{a}{\alpha} \bar{b}_\alpha \mathscr{K}_\alpha ,$$

(12) $$PG(\varepsilon, u) \in \bar{b}_\alpha M , \quad \Theta_j PG(\varepsilon, u) \in \bar{b}_\alpha M , \quad j = 1, 2, \ldots, d ,$$

(13) $$\varrho(PG(\varepsilon, u_1), PG(\varepsilon, u_2)) \leqq a\bar{b}_\alpha \varrho(u_1, u_2) .$$

Posons $\varepsilon_\alpha = [1 + (a/\alpha) \bar{b}_\alpha + 2a\bar{b}_\alpha]^{-1}$ et envisageons la transformation $\varepsilon PG(\varepsilon, .)$ pour $0 \leqq \varepsilon \leqq \varepsilon_\alpha$, $u \in \mathscr{K}_\alpha$. Il résulte de (11) et (13) pour $0 \leqq \varepsilon \leqq \varepsilon_\alpha$, $u, u_1, u_2 \in \mathscr{K}_\alpha$:

(14) $$\varepsilon PG(\varepsilon, u) \in \mathscr{K}_\alpha ,$$

(15) $$\varrho(PG(\varepsilon, u_1), PG(\varepsilon, u_2)) \leqq \tfrac{1}{2} \varrho(u_1, u_2) .$$

La conclusion de la preuve est maintenant, en conséquence de (14), (15), la même que dans 4,1 (on prend $c_\alpha = \bar{b}_\alpha$ cfr. (12)).

**4,4.** Les théorèmes précédents 4,1 – 4,3 n'ont pas la forme la plus générale possible. A titre d'exemple, on va refomuler le théorème 4,1 sous la forme suivante, plus générale:

**Théorème d'existence – $L_p$-modèle.** *Soit* $A, B, C, \Theta_1, \ldots, \Theta_d \in \mathfrak{L}^+(E)$, $m, \varkappa_0, \varkappa_1, \ldots, \varkappa_d = 0, 1, 2, \ldots$, $g \in \langle 0, 1 \rangle \times \Lambda \times \underbrace{E \times \ldots \times E}_{1 \qquad \varkappa_0 + \varkappa_1 + \ldots + \varkappa_d} \to E$, $1 \leqq p < \infty$, $M_j \subseteq L_p^{(m+\varkappa_j)}(\Lambda, E)$, $j = 1, 2, \ldots, d$. *Si* (a) *pour tout* $h \in L_p^{(m)}(\Lambda, E)$, *il existe une et une seule solution* $u$ *du problème périodique pour* $A, B, C$, *excitée par* $h$, (b) *pour tout* $u, h \in L(\Lambda, E)$ *tels que* $\|h\|_{L_p(m)} \leqq 1$ *et* $u$ *est une solution du problème périodique pour* $A, B, C$, *excitée par* $h$, *on a* $u \in M_0$, $\Theta_j u \in M_j$, $j = 1, 2, \ldots, d$, (c) *les ensembles* $M_j$ *sont bornés dans* $L_p^{(m+\varkappa_j)}(\Lambda, E)$ *resp.*, $j = 0, 1, 2, \ldots, d$, (d) *les opérateurs* $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_d$ *sont fermés*, (e) *les fonctions* $g(\varepsilon, ., 0, 0, \ldots, 0)$, $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$, *constituent un sous-ensemble borné de* $L_p^{(m)}(\Lambda, E)$, (f) *pour tout* $\alpha > 0$, *il existe une constante* $b_\alpha$ *telle que, pour tout* $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$, $t \in \Lambda$, $\|x_1^{(l)}\| \leqq \alpha$, $\|x_2^{(l)}\| \leqq \alpha$, $l = 1, 2, \ldots, \varkappa_0$, $\|p_1^{(jl)}\| \leqq \alpha$, $\|p_2^{(jl)}\| \leqq \alpha$, $j = 1, 2, \ldots, d$, $l = 1, 2, \ldots, \varkappa_j$,

(1) $$\|D_v^{(m)} g(\varepsilon, t, x_1^{(1)}, \ldots, x_1^{(\varkappa_0)}, p_1^{(11)}, \ldots, p_1^{(1\varkappa_1)}, p_1^{(21)}, \ldots, p_1^{(d\varkappa_d)}) - - D_v^m g(\varepsilon, t, x_2^{(1)}, \ldots, x_2^{(\varkappa_0)}, p_2^{(11)}, \ldots, p_2^{(1\varkappa_1)}, p_1^{(21)}, \ldots, p_2^{(d\varkappa_d)})\| \leqq \leqq b_\alpha[\sum_{l=1}^{\varkappa_0} \|x_1^{(l)} - x_2^{(l)}\| + \sum_{j=1}^{d} \sum_{l=1}^{\varkappa_j} \|p_1^{(jl)} - p_2^{(jl)}\|]$$

*où $D_v^m g$ signifie la dérivée de Fréchet m-ième par rapport à la coordonnée vectorielle v-ième de la fonction:*

$$g(\varepsilon, t, z_1, z_2, \ldots, z_v, \ldots, z_{\varkappa_0+\varkappa_1+\ldots+\varkappa_d}),$$

*alors, pour tout $\alpha > 0$, on peut trouver deux constantes $0 < \varepsilon_\alpha \leqq 1$ et $c_\alpha$ jouissant des propriétés suivantes: pour tout $0 \leqq \varepsilon \leqq \varepsilon_\alpha$, il existe une et une seule fonction $u_\alpha(\varepsilon) \in \Lambda \to E$ telle que*

($\alpha$) $$u_\alpha(\varepsilon) \in \varepsilon c_\alpha M_0, \quad \Theta_j u_\alpha(\varepsilon) \in \varepsilon c_\alpha M_j, \quad j = 1, 2, \ldots, d,$$

($\beta$) *$u_\alpha(\varepsilon)$ est une solution du problème périodique pour A, B, C, excitée par la fonction*

$$\varepsilon g(\varepsilon, t, u_\alpha(\varepsilon), (u_\alpha(\varepsilon))', \ldots, (u_\alpha(\varepsilon))^{(\varkappa_0)}, \Theta_1 u_\alpha(\varepsilon), \ldots (\Theta_1 u_\alpha(\varepsilon))^{\varkappa_1}, \Theta_2 u_\alpha(\varepsilon), \ldots, \ldots, (\Theta_d u_\alpha(\varepsilon))^{(\varkappa_d)}).$$

La preuve est complètement parallèle dans tous les points essentiels à celle de 4,1 et c'est pourquoi nous l'omettrons.

Remarque. Les hypothèses (a)–(c) ont lieu, par exemple, en conséquence des généralisations des théorèmes démontrés dans la section 3 (cfr. 3,20 et 3,21), pour $m = 0, 1, 2, \ldots$ quelconque. En outre, grâce aux théorèmes du type 4,4, on peut souvent obtenir des solutions „vraies“ au lieu des solutions „généralisées“ au sens de 2,1. En effet, si l'on prend par exemple $m = 2$, on obtient en vertu de 2,8 les solutions „vraies“ en conséquence des conditions plus fortes sur le membre non-linéaire $g$.

## 5. EXISTENCE DES SOLUTIONS PÉRIODIQUES DES ÉQUATIONS FAIBLEMENT NON-LINÉAIRES — LA MÉTHODE TOPOLOGIQUE

**5,1. Théorème d'existence: $L_p$-modèle.** *Soit $A, B, C, \Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_d \in \mathfrak{L}^+(E)$, $g \in \Lambda \times \underset{1}{E} \times \ldots \times \underset{d+1}{E} \to E$, $1 \leqq p < \infty$, $M \subseteq L_p(\Lambda, E)$. Si les hypothèses* (a), (b) *de* 4,1 *ont lieu,* (c) *l'ensemble M est compact dans $L_p(\Lambda, E)$,* (d) *comme dans* 4,1, (e) *pour presque tout $t \in \Lambda$, la fonction $g(t, ., ., \ldots, .)$ est continue sur $\underset{1}{E} \times \ldots \times \underset{d+1}{E}$ et, pour tout $x, p^{(1)}, \ldots, p^{(d)} \in E$, la fonction $g(., x, p^{(1)}, \ldots, p^{(d)})$ demeure dans $L_p(\Lambda, E)$,* (f) *il existe une fonction $\varphi \in \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ telle que*

(1) $$(1 + \alpha)^{-1} \varphi(\alpha) \text{ est bornée sur } \mathbf{R}^+ \text{ et } \alpha^{-1} \varphi(\alpha) \to 0 \ (\alpha \to \infty)$$

(2) $$\|g(t, x, p^{(1)}, \ldots, p^{(d)}) - g(t, 0, 0, \ldots, 0)\| \leqq \varphi(\|x\| + \sum_{j=1}^{d} \|p^{(j)}\|)$$

*pour presque $t \in \Lambda$ et pour tout $x, p^{(1)}, \ldots, p^{(d)} \in E$, alors il existe une fonction $u \in \Lambda \to E$ et une constante $c$, telles que $u$ est une solution du problème périodique pour $A, B, C$, excitée par la fonction*

$$g(t, u(t), \Theta_1 u(t), \Theta_2 u(t), \ldots, \Theta_d u(t)),$$

*et $u \in cM$.*

Preuve. Soit $\mathscr{E}, \mathscr{M}, \mathscr{K}_\alpha, P$ comme dans la preuve de 4,1.

Il résulte de (c) que

(3) l'ensemble $\mathscr{M}$ est compact dans $\mathscr{E}$ et, par suite, aussi borné.

En vertu de (b)

$$P(h) \in \|h\|_{L_p} \mathscr{M} \quad \text{pour tout} \quad h \in L_p. \tag{4}$$

Par conséquent, il existe une constante $a$ telle que

$$\|P(h)\|_{\mathscr{E}} \leqq a\|h\|_{L_p} \quad \text{pour tout} \quad h \in L_p. \tag{5}$$

Ecrivons pour $t \in \Lambda$, $u \in \mathscr{E}$

$$G(u)(t) = g(t, u(t), \Theta_1 u(t), \ldots, \Theta_d u(t)).$$

Ainsi $G(u) \in \Lambda \to E$.

D'abord, on va démontrer que la fonction $G(u)$ est mesurable. En effet, la fonction $g(t, x, p^{(1)}, \ldots, p^{(d)})$ est mesurable sur $\Lambda \times \underset{1}{E} \times \ldots \times \underset{d+1}{E}$ par rapport aux ensembles boreliens de $\Lambda$ et de l'espace $E$ ce qui résulte aisément de (e). En outre, le système des fonctions $(t, u(t), \Theta_1 u(t), \ldots, \Theta_d u(t))$ est évidemment mesurable ce qui donne la mesurabilité de la superposition $G(u)$ de ces deux fonctions.

Soit $q = \sup\limits_{\alpha \in R^+} (1 + \alpha)^{-1} \varphi(\alpha)$.

Maintenant, on va évaluer $\|G(u)\|_{L_p}$:

Il existe une fonction $\psi \in \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}^+$ telle que

$$(1 + \alpha)^{-1} \psi(\alpha) \quad \text{est bornée et} \quad \alpha^{-1} \psi(\alpha) \to 0 \ (\alpha \to \infty), \tag{6}$$

$$G(u) \in L_p(\Lambda, E) \quad \text{et} \quad \|G(u)\|_{L_p} \leqq \psi(\|u\|_{\mathscr{E}}) \tag{7}$$

pour tout $u \in \mathscr{E}$.

A cet effet, soit $\varepsilon_n = 1/n^p$, $n = 1, 2, \ldots$ En vertu de (f), on peut choisir un $\vartheta_n > 0$ tel que

$$\|g(t, x, p^{(1)}, \ldots, p^{(d)}) - g(t, 0, 0, \ldots, 0)\| \leqq \varepsilon_n(\|x\| + \sum_{j=1}^{d} \|p^{(j)}\|) \tag{8}$$

pour presque tout $t \in \Lambda$ et tout $\|x\| + \sum_{j=1}^{d} \|p^{(j)}\| \geqq \vartheta_n$ et

$$\|g(t, x, p^{(1)}, \ldots, p^{(d)}) - g(t, 0, 0, \ldots, 0)\| \leqq q(1 + \vartheta_n) \tag{9}$$

pour presque tout $t \in \Lambda$ et tout $\|x\| + \sum_{j=1}^{d} \|p^{(j)}\| \leqq \vartheta_n$. Soit $u \in \mathscr{E}$ et écrivons $\Lambda_1 = \{t : t \in \Lambda,\ \|u(t)\| + \sum_{j=1}^{d} \|\Theta_j u(t)\| \geqq \vartheta_n\}$ et $\Lambda_2 = \Lambda \setminus \Lambda_1$. Puis, d'après (8), (9)

$$\|G(u)\|_{L_p} = \left[\int_\Lambda \|g(\tau, u(\tau), \Theta_1 u(\tau), \ldots, \Theta_d u(\tau))\|^p \, d\tau\right]^{1/p} \leqq$$

$$\leqq \left[\int_\Lambda \|g(\tau, 0, 0, \ldots, 0)\|^p \, d\tau\right]^{1/p} + \varepsilon_n^{1/p} \left[\int_{\Lambda_1} (\|u(\tau)\| + \sum_{j=1}^{d} \|\Theta_j u(\tau)\|)^p \, d\tau\right]^{1/p} +$$

$$+ \left[\int_{\Lambda_2} (q(1 + \vartheta_n))^p \, d\tau\right]^{1/p}.$$

Donc, si l'on écrit $\gamma = [\int_\Lambda \|g(\tau, 0, 0, \ldots, 0)\|^p \, d\tau]^{1/p}$,

$$\text{(10)} \qquad \|G(u)\|_{L_p} \leqq \gamma + \frac{1}{n}(\|u\|_{L_p} + \sum_{j=1}^{d} \|\Theta_j u\|_{L_p}) + (2\pi)^{1/p} q(1 + \vartheta_n) \leqq$$

$$\leqq \gamma + \frac{1}{n} \|u\|_{\mathscr{E}} + (2\pi)^{1/p} q(1 + \vartheta_n) \leqq \left[\frac{1}{n} + \frac{\gamma + (2\pi)^{1/p} q(1 + \vartheta_n)}{1 + \|u\|_{\mathscr{E}}}\right](1 + \|u\|_{\mathscr{E}}).$$

Posons

$$\bar{\psi}_n(\alpha) = \frac{1}{n} + \frac{\gamma + (2\pi)^{1/p}(1 + \vartheta_n)\, q}{1 + \alpha}.$$

On voit que $\bar{\psi}_n$ est une fonction bornée sur $R^+$ et que $\bar{\psi}_n(\alpha) \to 1/n$ $(\alpha \to \infty)$. Définissons $\bar{\psi}(\alpha) = \inf_{n=1,2,\ldots} \bar{\psi}_n(\alpha)$. Alors $\bar{\psi}$ est aussi bornée et $\bar{\psi}(\alpha) \to 0$ $(\alpha \to \infty)$. Enfin soit $\psi(\alpha) = (1 + \alpha)\, \bar{\psi}(\alpha)$. La fonction $\psi$ jouit de la propriété (6) et (10) entraîne

$$\|G(u)\|_{L_p} \leqq (1 + \|u\|_{\mathscr{E}})\, \bar{\psi}(\|u\|_{\mathscr{E}}) = \psi(\|u\|_{\mathscr{E}}),$$

ce qui est (7).

Il reste à démontrer que

(11) $G$ est la transformation continue de $\mathscr{E}$ dans $L_p(\Lambda, E)$.

En effet, soit $u_n \to u$ $(n \to \infty)$ dans $\mathscr{E}$. Alors

$$u_n(t) \to u(t), \quad \Theta_j u_n(t) \to \Theta_j u(t), \quad j = 1, 2, \ldots, d \ (n \to \infty)$$

presque partout. Il résulte de (e) que $G(u_n)(t) \to G(u)(t)$ presque partout. D'autre part, d'après (1), (2), presque partout

$$\|G(u_n)(t)\| \leqq \|g(t, 0, 0, \ldots, 0)\| + q(1 + \|u_n(t)\| + \sum_{j=1}^{d} \|\Theta_j u_n(t)\|),$$

ce qui donne d'après le théorème de Lebesgue

$$\int_\Lambda \|G(u_n)(\tau) - G(u)(\tau)\|^p \, d\tau \to 0 ,$$

d'où (11).

Choisissons maintenant $\alpha_0$ tel que

$$a\,\psi(\alpha_0) \leqq \alpha_0 ,$$

ce qui est toujours possible grâce à (6). Il résulte de (7) et (5) que $PG(\mathscr{K}_{\alpha_0}) \subseteq \mathscr{K}_{\alpha_0}$ et de (4) que $PG(\mathscr{K}_{\alpha_0}) \subseteq \psi(\alpha_0)\,\mathscr{M}$. Enfin, grâce à (11) et (5), $PG$ est une transformation continue de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$.

Alors toutes les hypothèses du théorème célèbre de Schauder sur le point fixe sont satisfaites d'où l'assertion de notre théorème.

**5,2. Théorème d'existence: *C*-modèle.** *Soit* $A, B, C, \Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_d \in \mathfrak{L}^+(E)$, $g \in \Lambda \times \underset{1}{E} \times \ldots \times \underset{d+1}{E} \to E$, $M \subseteq C(\Lambda, E)$. *Si les hypothèses* (a)–(d) *de* 5,1 *ont lieu lorsqu'on remplace* $L_p(\Lambda, E)$ *par* $C(\Lambda, E)$, (e) *la fonction* $g$ *est continue sur* $\Lambda \times \underset{1}{E} \times \ldots \times \underset{d+1}{E}$, (f) *comme dans* 5,1, (g) $g(0, x, p^{(1)}, \ldots, p^{(d)}) = g(2\pi, x, p^1, \ldots, p^{(d)})$ *pour tout* $x, p^{(1)}, \ldots, p^{(d)} \in E$, *alors l'assertion de* 5,1 *reste en vigueur.*

Preuve. On commence comme dans la preuve de 5,1 avec $C(\Lambda, E)$ au lieu de $L_p(\Lambda, E)$.

Il résulte de (e) que $G(u)$ est une fonction continue pour tout $u \in \mathscr{E}$. Mais, vu (g), $G(u) \in C(\Lambda, E)$.

En outre

(1) $G$ est la transformation continue de $\mathscr{E}$ dans $C(\Lambda, E)$.

Cela résulte immédiatement de la continuité uniforme de la fonction $g$ sur les sous-ensembles compacts de $\Lambda \times \underset{1}{E} \times \ldots \times \underset{d+1}{E}$.

Maintenant, il est à évaluer $\|G(u)\|_C$:

Il existe une fonction $\psi \in \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}^+$ telle que

(1) $(1 + \alpha)^{-1}\,\psi(\alpha)$ est bornée et $\alpha^{-1}\,\psi(\alpha) \to 0$ $(\alpha \to \infty)$,

(2) $G(u) \in C(\Lambda, E)$ et $\|G(u)\|_C \leqq \psi(\|u\|_{\mathscr{E}})$ pour tout $u \in \mathscr{E}$.

Observons d'abord qu'il existe une fonction $\bar{\varphi} \in \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}^+$ jouissant de la propriété 5,1 (1), mais non-décroissante et telle que $\varphi(\alpha) \leqq \bar{\varphi}(\alpha)$ pour tout $\alpha \in \boldsymbol{R}^+$. En effet, posons $\bar{\varphi}(\alpha) = \sup\limits_{0<\eta\leqq\alpha} \varphi(\eta)$. Il est évident que $\bar{\varphi}$ est borné sur $(0, \omega)$ pour tout $\omega > 0$ et il suffit de prouver que $\alpha^{-1}\,\bar{\varphi}(\alpha) \to 0$ $(\alpha \to \infty)$. Soit $\varepsilon > 0$. On trouvera un $\alpha_1 \geqq 1$ tel que $\alpha^{-1}\,\varphi(\alpha) \leqq \varepsilon$, pour tout $\alpha \geqq \alpha_1$. Par conséquent, pour tout $\alpha > \alpha_1$, on a $\sup_{\alpha_1<\eta\leqq\alpha} \varphi(\eta) \leqq \varepsilon \sup_{\alpha_1<\eta\leqq\alpha} \eta \leqq \varepsilon\alpha$, i.e. $\alpha^{-1} \sup_{\alpha_1<\eta\leqq\alpha} \varphi(\eta) \leqq \varepsilon$. Maintenant, soit $\alpha_2 = \bar{\varphi}(\alpha_1)/\varepsilon$. On voit que $\alpha^{-1} \sup_{0<\eta\leqq\alpha_1} \varphi(\eta) \leqq \alpha_2^{-1} \bar{\varphi}(\alpha_1) = \varepsilon$ pour tout $\alpha \geqq \alpha_2$. Ainsi, on obtient pour $\alpha \geqq \alpha_0 = \max(\alpha_1, \alpha_2)$ l'inégalité $\alpha \sup_{0<\eta\leqq\alpha} \varphi(\eta) = \alpha\,\bar{\varphi}(\alpha) \leqq \varepsilon$ ce qui vérifie 5,1 (1) pour $\bar{\varphi}$.

Ceci étant, on déduit de 5,1 (2)

$$\|G(u)(t)\| \leqq \|g(t, 0, 0, \ldots, 0)\| + \bar{\varphi}(\|u(t)\| + \sum_{j=1}^{d} \|\Theta_j u(t)\|) \leqq$$
$$\leqq \|g(t, 0, 0, \ldots, 0)\| + \bar{\varphi}(\|u\|_C + \sum_{j=1}^{d} \|\Theta_j u\|_C)$$

pour tout $t \in \Lambda$, $u \in \mathscr{E}$. Posons $\gamma = \sup_{t\in\Lambda} \|g(t, 0, 0, \ldots, 0)\|$. Ainsi

$$\|G(u)\|_C \leqq \gamma + \bar{\varphi}(\|u\|_{\mathscr{E}})\,. \tag{3}$$

Maintenant, soit $\psi(\alpha) = \gamma + \bar{\varphi}(\alpha)$. On voit immédiatement grâce aux propriétés 5,1 (1) de la fonction $\bar{\varphi}$ et à (3) que (1), (2) ont en effet lieu.

Sous ces conditions, la conclusion de la preuve est la même que dans 5,1.

**5,3. Théorème d'existence: $V$-modèle.** *Soit* $A, B, C$, $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_d \in \mathfrak{L}^+(E)$, $g \in \Lambda \times \underset{1}{E} \times \ldots \times \underset{d+1}{E} \to E$, $M \subseteq V(\Lambda, E)$. *Si les hypothèses* (a), (b) *de* 4,1 *ont lieu avec remplacement de* $L_p(\Lambda, E)$ *par* $V(\Lambda, E)$, (c) *l'ensemble* $M$ *est borné dans* $V(\Lambda, E)$ *et compact dans* $C(\Lambda, E)$, (e) *si la suite* $\{h_n\}_1^\infty$ *est bornée dans* $V(\Lambda, E)$ *et* $\|h_n\|_C \to 0$ $(n \to \infty)$ *et si* $u_n$ *est une solution du problème périodique pour* $A, B, C$ *excitée par* $h_n$, $n = 1, 2, \ldots$, *alors* $\|u_n\|_C \to 0$, $\|\Theta_j u_n\|_C \to 0$, $j = 1, 2, \ldots, d$ $(n \to \infty)$, (f) *les opérateurs* $\Theta_1, \ldots, \Theta_d$ *sont fermés,* (g) *la fonction* $g$ *est continue sur* $\Lambda \times \underset{1}{E} \times \ldots \times \underset{d+1}{E}$ *et* $g(., 0, 0, \ldots, 0) \in V(\Lambda, E)$, (h) *il existe une fonction* $\varphi \in \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}^+$ *et un ensemble déterminant* $X \subseteq E^*$, *tels que*

$$(1 + \alpha)^{-1} \varphi(\alpha) \quad \textit{est bornée sur } \boldsymbol{R}^+ \textit{ et } \quad \alpha^{-1} \varphi(\alpha) \to 0 \ (\alpha \to \infty)\,, \tag{1}$$

$$|x^*[g(t_1, x_1, p_1^{(1)}, \ldots, p_1^{(d)}) - g(t_1, 0, 0, \ldots, 0) - \tag{2}$$
$$- g(t_2, x_2, p_2^{(1)}, \ldots, p_2^{(d)}) + g(t_2, 0, 0, \ldots, 0)]| \leqq$$
$$\leqq |t_1 - t_2|\, \varphi(|t_1 - t_2|^{-1} [|t_1 - t_2| + |x^*(x_1 - x_2)| + \sum_{j=1}^{d} |x^*(p_1^{(j)} - p_2^{(j)})|])$$

*pour tout* $t_1, t_2 \in \Lambda$, $t_1 \neq t_2$, $x_1, x_2 \in E$, $p_1^{(j)}, p_2^{(j)} \in E$, $j = 1, 2, \ldots, d$, $x^* \in X$, (i) *comme dans* 5,2,
*alors l'assertion du théorème* 5,1 *reste en vigueur.*

Preuve. Soit $\mathscr{E}$, $\mathscr{M}$, $\mathscr{K}_\alpha$, $P$ comme dans la preuve de 4,1 avec $V(\Lambda, E)$ au lieu de $L_p(\Lambda, E)$.

Il résulte de (b) que

$$(3) \qquad P(h) \in \|h\|_V \mathscr{M} \quad \text{pour tout} \quad h \in V(\Lambda, E)\,.$$

Comme l'ensemble $\mathscr{M}$ est borné d'après (c) dans $\mathscr{E}$, il existe, vu (3), une constante $a$ telle que

$$(4) \qquad \|P(h)\|_{\mathscr{E}} \leqq a\|h\|_V \quad \text{pour tout} \quad h \in V(\Lambda, E)\,.$$

Outre $\mathscr{E} = \mathscr{E}(V(\Lambda, E))$, nous aurons besoin de l'espace $\mathscr{E}_0 = \mathscr{E}(C(\Lambda, E))$ qui a été déjà utilisé dans la preuve de 5,2. On a $\mathscr{E} \subseteq \mathscr{E}_0$.

On déduit aisément de (c) que

(5) $\mathscr{M}$ est compact dans $\mathscr{E}_0$.

Ceci étant, l'hypothèse (e) peut être formulée comme suit:

(6) si $\{h_n\}_1^\infty$ est une suite bornée de $V(\Lambda, E)$ et $h_n \to h$ $(n \to \infty)$ dans $C(\Lambda, E)$, alors $P(h_n) \to P(h)$ $(n \to \infty)$ dans $\mathscr{E}_0$.

Soit $G$ comme dans la preuve de 5,1.

D'abord, on va démontrer que

(7) $G$ est une transformation continue de $\mathscr{E}$ dans $C(\Lambda, E)$ par rapport à la topologie de $\mathscr{E}_0$ sur $\mathscr{E}$.

Cela résulte, comme dans la preuve de 5,2, de la continuité uniforme de la fonction $g$ sur les sous-ensembles compacts de $\Lambda \times \underset{1}{E} \times \ldots \times \underset{d+1}{E}$.

Notre but prochain est de démontrer qu'il existe une fonction $\psi \in \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}^+$ telle que

$$(8) \qquad (1 + \alpha)^{-1}\, \psi(\alpha) \quad \text{est bornée sur } \boldsymbol{R}^+ \text{ et} \quad \alpha^{-1}\, \psi(\alpha) \to 0 \ (\alpha \to \infty)\,,$$

$$(9) \qquad G(u) \in V(\Lambda, E) \quad \text{et} \quad \|G(u)\|_V \leqq \psi(\|u\|_{\mathscr{E}}) \quad \text{pour} \quad u \in \mathscr{E}\,.$$

Rappelons d'abord que $g(., 0, 0, \ldots, 0) \in V(\Lambda, E)$ suivant (g) et possons $\gamma = \|g(., 0, 0, \ldots, 0)\|_V$.

Soit $\bar\varphi(\alpha) = \sup\limits_{0<\eta\leqq\alpha} \varphi(\eta)$. On vérifie comme dans la preuve de 5,2 que

(10) $\bar\varphi$ est non-décroissante et $\bar\varphi(\alpha) \geqq \varphi(\alpha)$ pour $\alpha \in \boldsymbol{R}^+$,

(11) $(1 + \alpha)^{-1}\, \bar\varphi(\alpha)$ est bornée sur $\boldsymbol{R}^+$ et $\alpha^{-1}\, \bar\varphi(\alpha) \to 0$ $(\alpha \to \infty)$.

Ceci étant, il résulte de (2) et (10)

$$(t = t_1,\ t_2 = 2\pi \quad \text{pour} \quad 0 \leqq t \leqq \pi,\ t_2 = 0 \quad \text{pour} \quad \pi < t \leqq 2\pi\,,$$
$$x_1 = u(t),\ x_2 = 0,\ p_1^{(j)} = \Theta_j\, u(t),\ p_2^{(j)} = 0,\ j = 1, 2, \ldots, d)$$

$$(12)\qquad \|G(u)\|_C \leqq \gamma + \pi\bar{\varphi}[\pi^{-1}(\pi + \|u\|_C + \sum_{j=1}^{d}\|\Theta_j u\|_C)] \leqq$$
$$\leqq \gamma + \pi\bar{\varphi}[\pi^{-1}(\pi + \|u\|_{\mathscr{E}})] \quad \text{pour tout} \quad u \in \mathscr{E}\,.$$

Reste à évaluer $\mathfrak{v}(G(u))$. Pour cet effet on va démontrer qu'il existe une fonction $\bar{\bar{\varphi}} \in \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}^+$ telle que

$$(13)\qquad (1 + \alpha)^{-1}\,\bar{\bar{\varphi}}(\alpha) \quad \text{est bornée sur } \boldsymbol{R}^+ \text{ et} \quad \alpha^{-1}\,\bar{\bar{\varphi}}(\alpha) \to 0 \ (\alpha \to \infty)\,,$$

$$(14)\qquad \mathfrak{v}(G(u)) \leqq \gamma + \bar{\bar{\varphi}}(\|u\|_{\mathscr{E}}) \quad \text{pour} \quad u \in \mathscr{E}\,.$$

En tenant compte de (1), posons $q = \sup_{\alpha \in \boldsymbol{R}^+} (1 + \alpha)^{-1}\,\varphi(\alpha)$. De plus on peut trouver, pour tout $n = 1, 2, \ldots$, une constante $\vartheta_n$ telle que $\varphi(\alpha) \leqq \alpha/n$ pour $\alpha > \vartheta_n$. Alors, d'après (2),

$$(15)\qquad |x^*[g(t_1, x_1, p_1^{(1)}, \ldots, p_1^{(d)}) - g(t_1, 0, 0, \ldots, 0) -$$
$$- g(t_2, x_2, p_2^{(1)}, \ldots, p_2^{(d)}) + g(t_2, 0, 0, \ldots, 0)]| \leqq$$
$$\leqq \frac{1}{n}\,[|t_1 - t_2| + |x^*(x_1 - x_2)| + \sum_{j=1}^{d} |x^*(p_1^{(j)} - p_2^{(j)})|]\,,$$

pourvu que $|t_1 - t_2|^{-1}\,[|t_1 - t_2| + |x^*(x_1 - x_2)| + \sum_{j=1}^{d} |x^*(p_1^{(j)} - p_2^{(j)})|] \geqq \vartheta_n$,

$$(16)\qquad |x^*[g(t_1, x_1, p_1^{(1)}, \ldots, p_1^{(d)}) - g(t_1, 0, 0, \ldots, 0) -$$
$$- g(t_2, x_2, p_2^{(1)}, \ldots, p_2^{(d)}) + g(t_2, 0, 0, \ldots, 0)]| \leqq q(1 + \vartheta_n)\,|t_1 - t_2|\,,$$

si $|t_1 - t_2|^{-1}\,[|t_1 - t_2| + |x^*(x_1 - x_2)| + \sum_{j=1}^{d} |x^*(p_1^{(j)} - p_2^{(j)})|] \leqq \vartheta_n$.

Soit $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_r = 2\pi$ une décomposition de $\Lambda$. Soit $u \in \mathscr{E}$, $x^* \in X$, $Q = \{k : k \in N, 1 \leqq k \leqq r\}$, $Q_1 = \{k : k \in Q, |t_k - t_{k-1}|^{-1}\,[|t_k - t_{k-1}| + |x^*(u(t_k) - u(t_{k-1}))| + \sum_{j=1}^{d} |x^*\Theta_j(u(t_k) - u(t_{k-1}))|] \geqq \vartheta_n\}$, $Q_2 = Q \setminus Q_1$.

Ensuite, il résulte de (15) et (16)

$$\sum_{k=1}^{d} |x^*[G(u)(t_1) - G(0)(t_1) - G(u)(t_2) + G(0)(t_2)]| \leqq$$
$$\leqq \frac{1}{n}\,[2\pi + \mathfrak{v}(u) + \sum_{j=1} \mathfrak{v}(\Theta_j u)] + 2\pi q(1 + \vartheta_n)\,,$$

d'où on obtient aisément:

$$(17)\qquad \mathfrak{v}(G(u)) \leqq \gamma + \frac{1}{n}\,(2\pi + \|u\|_{\mathscr{E}}) + 2\pi q(1 + \vartheta_n)$$

pour tout $u \in \mathscr{E}$ et $n = 1, 2, \ldots$

Définissons

$$\bar{\bar{\varphi}}_n(\alpha) = (2\pi + \alpha)\left(\frac{1}{n} + \frac{2\pi q(1 + \vartheta_n)}{2\pi + \alpha}\right).$$

On voit sans peine que

(18) $(1 + \alpha)^{-1}\,\bar{\bar{\varphi}}_n(\alpha)$ est bornée sur $\boldsymbol{R}^+$ et $\alpha^{-1}\,\bar{\bar{\varphi}}_n(\alpha) \to 1/n$ $(\alpha \to \infty)$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$

Posons $\bar{\bar{\varphi}}(\alpha) = \inf_{n=1,2,\ldots} \bar{\bar{\varphi}}_n(\alpha)$. Puis $\bar{\bar{\varphi}}$ satisfait à (13), grâce à (18), et (14) a lieu comme conséquence immédiate de (17).

Ecrivons $\psi(\alpha) = 2\gamma + \pi\bar{\varphi}(\pi^{-1}(\pi + \alpha)) + \bar{\bar{\varphi}}(\alpha)$. Ensuite la fonction $\psi$ satisfait à (8), grâce à (11) et (13), et les inégalités (12) et (14) impliquent (9).

Choisissons maintenant un $\alpha_0 > 0$ tel que

$$a\,\psi(\alpha_0) \leqq \alpha_0\,,$$

ce qui est toujours possible grâce à (8). Ceci étant, il résulte de (4) et (9)

$$P\,G(\mathscr{K}_{\alpha_0}) \subseteq \mathscr{K}_{\alpha_0}\,. \tag{19}$$

En outre, d'après (6), (7) et (9),

(20) $PG$ est la transformation continue de $\mathscr{K}_{\alpha_0}$ dans $\mathscr{E}_0$ par rapport à la topologie de $\mathscr{E}_0$ sur $\mathscr{K}_{\alpha_0}$,

et d'après (5)

$$P\,G(\mathscr{K}_{\alpha_0}) \quad \text{est compact dans } \mathscr{E}_0. \tag{21}$$

En envisageant (19)–(21), on voit que toutes les hypothèses du théorème de Schauder ont lieu si l'on démontre encore que $\mathscr{K}_{\alpha_0}$ est fermé dans $\mathscr{E}_0$. Mais cela résulte immédiatement de 1,8 ce qui achève la preuve.

**5,4.** Il faut dire que l'on peut étendre les théorèmes de la présente section de la même façon que l'on a signalée dans 4,4 pour les théorèmes 4,1–4,3.

Les preuves ne sont pas difficiles, car elles sont analogues aux précédentes.

### *Références*

[1] *U. Staude:* Periodische Lösungen bei nichtlinearen Differentialgleichungen vom elliptischen Typ, Math. Annalen, *165* (1966), 117–134.

[2] *E. Hille, R. S. Phillips:* Functional analysis and semigroups, Providence 1957.

*Adresse de l'auteur:* Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV).