Časopis pro pěstování matematiky

Pavel Bartoš

Sínusová veta o simplexoch v E_n

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 93 (1968), No. 3, 273--277

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117623`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 93 (1968), Praha

SÍNUSOVÁ VETA O SIMPLEXOCH V E_n

PAVEL BARTOŠ, Bratislava

(Došlo dňa 20. februára 1967)

Venované miesto venca na rakvu pamiatke ALŽBETY HORVÁTOVEJ *rod.* ĎULAIOVEJ (1907—1967).

V tomto článku sa definuje pojem n-hranného uhla a pojem jeho sínusovej funkcie[1]), ďalej sa odvodzuje sínusová veta pre simplexy v E_n, $n \geqq 2$.

Definícia 1. Nech nadroviny v E_n

$$\pi_i = \mathbf{a}^{(i)}x - b_i = 0\,, \quad |\mathbf{a}^{(i)}| = 1\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,, \quad n \geqq 2 \tag{1}$$

majú spoločný práve jeden bod, takže

$$D = \begin{vmatrix} a_1^{(1)}, \ldots, a_n^{(1)} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_1^{(n)}, \ldots, a_n^{(n)} \end{vmatrix} \neq 0\,. \tag{2}$$

Prienik n polprostorov určených všetkými nadrovinami (1) nazývame *n-hranným uhlom v* E_n. n-hranný uhol je zrejme neohraničené konvexné teleso. Spoločný bod rovín (1) nazývame *vrcholom n-hranného uhla* a časti rovín $\pi_i = 0$ obsažené v n-hrannom uhle sa nazývajú jeho stenami. Uhol rovín dvoch stien n-hranného uhla menujeme jeho stenovým uhlom.

Veta 1. *n nadrovín* (1) *určuje* 2^n *n-hranných uhlov.*

Dôkaz. Každá z rovín (1) určuje dva opačné polpriestory. Počet možností voľby jedného z každej z týchto n dvojíc je 2^n, práve toľko je n-hranných uhlov rovinami (1) určených.

Poznámka. V rovine E_2 sú to štyri duté uhly vedľajšie a výplnkové, vytvorené dvoma rôznobežkami.

Definícia 2. Absolútna hodnota determinantu (2) nazýva sa *sínusom n-hranného*

[1]) Pojem sinusu trojhranného uhla v E_3 (trojrohu) je v liter., v podstate zhodne definovaný, známy. Pozri napr. [3] str. 246.

uhla γ určeného rovinami (1) a označuje sa

$$\sin \gamma = |D| \tag{3}$$

V E_2 dáva definícia podľa vzťahu (18) v práci [1] sínus ktoréhokoľvek zo 4 dutých uhlov vytvorených dvoma rôznobežkami v obyčajnom zmysle slova.

Veta 2. *Všetky n-hranné uhly určené rovinami* (1), *ktorých počet je* 2^n, *majú rovnakú hodnotu funkcie sínus a táto nezávisí od oporných čísel* b_i *rovín* (1), *lež len od vektorov* $\boldsymbol{a}^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *ktoré môžeme považovať za vonkajšie normály stien n-hranného uhla.*

Dôkaz. Podľa (3) $\sin \gamma$ nezávisí od konštant b_i a nezmení sa, ak zameníme znamienka všetkých prvkov v tomže riadku, čo značí prechod k príslušnému opačnému polpriestoru, a teda prechod k inému z 2^n n-hranných uhlov určených rovinami (1). Ak rovnice týchto rovín upravíme tak, že n-hranný uhol je prienikom polpriestorov $\pi_i \leqq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, sú vektory $\boldsymbol{a}^{(i)}$ jeho vonkajšie normály.

Veta 2. *Sínus n-hranného uhla je kladné číslo a sínus pravého n-hranného uhla sa rovná* 1.

Dôkaz. Keďže podľa (2) je $D \neq 0$, platí $\sin \gamma = |D| > 0$. Podľa práce [2] pravý n-hranný uhol R je určený rovinami $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$, takže

$$\sin R = \begin{vmatrix} 1, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & 1, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots, & 1 \end{vmatrix} = 1 .$$

Veta 4. *Sínus n-hranného uhla je určený kosínusmi stenových uhlov* $\varphi_{i,k}$ *jeho stien vzťahom*

$$\sin^2 \gamma = \begin{vmatrix} 1, & \cos \varphi_{1,2}, & \ldots, & \cos \varphi_{1,n} \\ \cos \varphi_{1,2}, & 1, & \ldots, & \cos \varphi_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \cos \varphi_{1,n}, & \cos \varphi_{2,n}, & \ldots, & 1 \end{vmatrix} \tag{4}$$

a teda nezávisí od voľby súradnicovej sústavy. Ďalej platí

$$0 < \sin \gamma \leqq 1 \,. \tag{5}$$

Dôkaz. Podľa multiplikačného teorému

$$\sin^2 \gamma = \begin{vmatrix} a_1^{(1)}, & \ldots, & a_n^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{(n)}, & \ldots, & a_n^{(n)} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}^{(1)}\boldsymbol{a}^{(1)}, & \boldsymbol{a}^{(1)}\boldsymbol{a}^{(2)}, & \ldots, & \boldsymbol{a}^{(1)}\boldsymbol{a}^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \boldsymbol{a}^{(n)}\boldsymbol{a}^{(1)}, & \boldsymbol{a}^{(n)}\boldsymbol{a}^{(2)}, & \ldots, & \boldsymbol{a}^{(n)}\boldsymbol{a}^{(n)} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1, & \cos \varphi_{1,2}, & \ldots, & \cos \varphi_{1,n} \\ \cos \varphi_{1,2}, & 1, & \ldots, & \cos \varphi_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \cos \varphi_{1,n}, & \cos \varphi_{2,n}, & \ldots, & 1 \end{vmatrix}$$

lebo predpokladáme $|\mathbf{a}^{(i)}| = 1$ a platí

$$\mathbf{a}^{(i)}\mathbf{a}^{(k)} = \cos \varphi_{i,k} = \cos \varphi_{k,i}\,, \quad i \neq k\,.$$

Nerovnosť (5) platí podľa Hadamardovej nerovnosti o pozitívne definitných maticiach, podľa ktorej det $|a_{i,k}| \leqq a_{1,1}a_{2,2} \dots a_{n,n}$. (Pozri [4] str. 207.)

Teraz pojem n-hranného uhla v E_n budeme aplikovať v simplexe v E_n. Zrejme simplex možno považovať za prienik $n + 1$ n-hranných uhlov, ktoré budeme nazývať jeho (vnútornými) uhlami a označíme ich γ_i, $i = 1, 2, \dots, n + 1$. Ako protiľahlú stenu uhla γ_j označíme tú stenu V_j simplexu, ktorá neobsahuje vrchol uhla γ_j. Súčasne značí V_j aj $(n - 1)$-dimenzionálny obsah tejto steny, kým n-dimenzionálny obsah simplexu označíme V.

Veta 5. *V simplexe v E_n platí sínusová veta*

$$\frac{\sin \gamma_i}{V_i} = \text{konšt.}\,, \quad i = 1, 2, \dots, n + 1\,. \tag{6}$$

Dôkaz. Podľa vzťahu (13) v práci [1] platí

$$V_j = \left| \frac{B_j \Delta^{n-1}}{(n - 1)!\, B_1 B_2 \dots B_{n+1}} \right|$$

kde

$$|B_j| = \left| \begin{array}{l} a_1^{(1)}, \quad \dots, \quad a_n^{(1)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_1^{(j-1)}, \quad \dots, \quad a_n^{(j-1)} \\ a_1^{(j+1)}, \quad \dots, \quad a_n^{(j+1)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_1^{(n+1)}, \quad \dots, \quad a_n^{(n+1)} \end{array} \right| = \sin \gamma_j$$

takže

$$\frac{\sin \gamma_j}{V_j} = \left| \frac{(n - 1)!\, B_1 B_2 \dots B_{n+1}}{\Delta^{n-1}} \right| = \text{konšt.}$$

čím je veta dokázaná.

Veta 6. *V pravouhlom simplexe je pomer obsahu steny a obsahu prepony rovný sínusu tej stene protiľahlého uhla*:

$$\sin \gamma_i = \frac{V_i}{V_{n+1}}\,, \quad i = 1, 2, \dots, \dots, n + 1\,. \tag{7}$$

Dôkaz. Podľa vety 3 je $\sin \gamma_{n+1} = 1$, a teda tvrdenie vety je správne podľa vety 5.

Veta 7. Pre n-dimenzionálny obsah simplexu v E_n platí

$$(8) \quad V = \frac{1}{n} \sqrt[n-1]{((n-1)!\, V_1 V_2 \dots V_{j-1} V_{j+1} \dots V_{n+1} \sin \gamma_j)}\,, \quad j = 1, 2, \dots, n+1\,.$$

Dôkaz. Podľa (12) a (13) v práci [1] je

$$V_1 V_2 \dots V_{j-1} V_{j+1} \dots V_{n+1} = \left| \frac{B_1 B_2 \dots B_{j-1} B_{j+1} \dots B_{n+1} \Delta^{(n-1)n}}{[(n-1)!]^n (B_1 B_2 \dots B_{n+1})^n} \right| =$$

$$= \left| \frac{\Delta^{(n-1)n}}{[(n-1)!]^n B_j (B_1 B_2 \dots B_{n+1})^{n-1}} \right| = \left| \frac{V^{n-1} (n!)^{n-1} (B_1 B_2 \dots B_{n+1})^{n-1}}{[(n-1)!]\, B_j (B_1 B_2 \dots B_{n+1})^{n-1}} \right| =$$

$$= \frac{V^{n-1} n^{n-1}}{(n-1)!\, |B_j|} = \frac{V^{n-1} n^{n-1}}{(n-1)! \sin \gamma_j}$$

odkiaľ vyplýva (8).

Poznámka 1. V E_2 dáva vzťah (8) vzorce $V = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$ atď.

2. Keďže v pravouhlom simplexe je $\sin \gamma_{n+1} = 1$ platí pre tento simplex

$$(9) \quad V = \frac{1}{n} \sqrt[n-1]{((n-1)!\, V_1 V_2 \dots V_n)}\,,$$

kde $V_1, V_2, \dots, V_n$ sú obsahy odvesien. V E_2 je to vzorec $V = \frac{1}{2} ab$.

3. Vzťah (8) možno pomocou vety sínusovej upravovať rozmanitými spôsobmi, napr.

$$V = \frac{1}{n} \sqrt[n-1]{\left(\frac{(n-1)!\, V_1^2 V_3 V_4 \dots V_{j-1} V_{j+1} \dots V_{n+1} \sin \gamma_2 \sin \gamma_j}{\sin \gamma_1} \right)} =$$

$$= \frac{1}{n} \sqrt[n-1]{\left(\frac{(n-1)!\, V_1^2 V_3^2 V_5 V_6 \dots V_{j-1} V_{j+1} \dots V_{n+1} \sin \gamma_2 \sin \gamma_4 \sin \gamma_j}{\sin \gamma_1 \sin \gamma_3} \right)} =$$

$$= \frac{1}{n} \sqrt[n-1]{\left(\frac{(n-1)!\, V_1^2 V_3^3 V_7 V_8 \dots V_{j-1} V_{j+1} \dots V_{n+1} \sin \gamma_2 \sin \gamma_4 \sin \gamma_5 \sin \gamma_6 \sin \gamma_j}{\sin \gamma_1 \sin^2 \gamma_3} \right)}$$

atď. Menovite platí vzťah

$$(10) \quad V = \frac{1}{n \sin \gamma_j} \sqrt[n-1]{((n-1)!\, V_j^n \sin \gamma_1 \sin \gamma_2 \dots \sin \gamma_{j-1} \sin \gamma_{j+1} \dots \sin \gamma_{n+1})}$$

pre všetky $j = 1, 2, \dots, n+1$. Pre $n = 2$ sú to vzorce $V = (a^2 \sin \beta \sin \gamma)/2 \sin \alpha$ atď.

Literatúra

[1] *Bartoš P.:* O jednej metóde určenia polomeru gule vpísanej a gulí pripísaných simplexu v E_n a niektoré aplikácie. Časopis pro pěstování matematiky *92* (1967) str. 8—15.
[2] *Bartoš P.:* Euklidove vety v pravouhlých simplexoch. Čas. pro pěstování matematiky *93* (1968), str. 256—259.
[3] *Bydžovský B.:* Úvod do analytické geometrie, Praha, 1923.
[4] *Gantmacher F. R.:* Teorija matric, Moskva, 1953.

Adresa autora: Bratislava Sibírska 9.

Summary

THE SINE THEOREM FOR SIMPLEXES IN E_n

PAVEL BARTOŠ, Bratislava

In the paper the notion of a n-hedral angle and its sine in E_n is defined. By means of these notions the sine theorem of the plane trigonometry is generalized for simplexes in E_n.