Valter Šeda

Über die Transformation der linearen Differentialgleichungen n-ter Ordnung. II.

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 92 (1967), No. 4, 418--435

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117607

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 92 (1967), Praha

ÜBER DIE TRANSFORMATION DER LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN n-TER ORDNUNG. II

VALTER ŠEDA, Bratislava

(Eingegangen am 12. April 1966)

In der Arbeit [1] wurde der Begriff der Äquivalenz zweier linearer Differentialgleichungen (weiter Gleichungen) derselben Ordnung n eingeführt und wurden die grundlegenden Beziehungen zwischen äquivalenten Gleichungen abgeleitet. In dieser Arbeit werden die Bedingungen untersucht, unter welchen zwei Gleichungen äquivalent sind. Obwohl einige Ergebnisse schon bekannt sind, sind ihre Beweise neu und könnten von Nutzen sein.

1. Der Begriff der Äquivalenz zweier Gleichungen wurde in [1], S. 386, auf diese Weise eingeführt.

Definition 1. Es seien zwei Gleichungen derselben Ordnung $n \geqq 1$ gegeben

$$(1) \qquad \sum_{k=0}^{n} p_k(x)\, y^{(n-k)} = p_{n+1}(x)\,, \quad y^{(l)} = \frac{\mathrm{d}^l y}{\mathrm{d}x^l}\,, \quad l = 1, \ldots, n\,, \quad y^{(0)} = y\,,$$

$$(2) \qquad \sum_{k=0}^{n} q_k(\xi)\, v^{(n-k)} = q_{n+1}(\xi)\,, \quad v^{(l)} = \frac{\mathrm{d}^l v}{\mathrm{d}\xi^l}\,, \quad l = 1, \ldots, n\,, \quad v^{(0)} = v\,,$$

wo $p_k(x) \in C_0(I_1)$, $q_k(\xi) \in C_0(I_2)$, $k = 0, 1, \ldots, n + 1$ und $p_0(x) \neq 0$ in I_1, $q_0(\xi) \neq 0$ in I_2. I_1 und I_2 sind Intervalle. Wir sagen, dass die Gleichung (2) im Intervall $I_{2\xi} \subset I_2$ der Gleichung (1) im Intervall $I_{1x} \subset I_1$ äquivalent ist, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

1. Es existieren Funktionen $\xi(x) \in C_n(I_{1x})$, $t(x) \in C_n(I_{1x})$ derart, dass $\xi(I_{1x}) = I_{2\xi}$, $\xi'(x)\, t(x) \neq 0$ in I_{1x}.

2. Wenn $v(\xi)$ die Lösung der Gleichung (2) in $I_{2\xi}$ ist, dann ist die Funktion $y(x) = t(x)\, v[\xi(x)]$ eine Lösung der Gleichung (1) im Intervall I_{1x}. Das geordnete Paar der Funktionen $\xi(x)$, $t(x)$ nennen wir Träger der Äquivalenz.

Symbolisch wird die Äquivalenz der Gleichung (2) in $I_{2\xi}$ zu der Gleichung (1) in I_{1x} mit dem Träger der Äquivalenz $\xi(x)$, $t(x)$ derart (2) $I_{2\xi} \sim$ (1) $I_{1x}\{\xi(x), t(x)\}$

bezeichnet. Wenn es uns nicht an dem Träger der Äquivalenz liegt, schreiben wir kurz $(2)\,I_{2\xi} \sim (1)\,I_{1x}$.

In Übereinstimmung mit der Arbeit [2], S. 230, führen wir folgende Definition ein.

Definition 2. Die Gleichungen (1), (2) sind miteinander vollkommen äquivalent, wenn $(2)\,I_2 \sim (1)\,I_1$ ist.

Es wäre zu bemerken, dass auch die gleiche Äquivalenz (eingeführt durch die Definition 4 in [1]) vollkommen sein kann.

Bei der Untersuchung der Bedingungen der Äquivalenz der Gleichungen (1), (2) genügt es, zufolge der Sätze 3 und 8, [1], sich auf die homogenen Gleichungen zu beschränken. Betrachten wir also zunächst die homogenen Gleichungen (1), (2) 1-er Ordnung. Die Lösungen dieser Gleichungen besitzen keine Nullstellen und deshalb haben sie in den entsprechenden Intervallen die gleiche Struktur der Nullstellen (Definition 3, [1]). Daraus folgt auf Grund des Satzes 6, [1], der

Satz 1. *Zwei homogene Gleichungen 1-er Ordnung sind immer miteinander vollkommen äquivalent und die erste Komponente des Trägers der vollkommenen Äquivalenz kann eine beliebige Funktion $\xi(x) \in C_1(I_1)$, $\xi'(x) \neq 0$, $x \in I_1$ mit der Eigenschaft $\xi(I_1) = I_2$ sein.*

Die grundlegenden Fragen der Transformationstheorie der linearen homogenen Gleichungen 2-ter Ordnung halbkanonischer Form wurden in der Arbeit [3] gelöst. Wir werden sehen, dass die Ergebnisse dieser Theorie von grundlegender Bedeutung sind auch für die Transformation der Gleichungen höherer Ordnungen. Andererseits kann sie in die Transformationstheorie der Gleichungen n-ter Ordnung, $n \geqq 2$, eingeschlossen werden.

Also es sei $n \geqq 2$. Unter der Annahme $p_1(x)/p_0(x) \in C_{n-1}(I_1)$, $q_1(\xi)/q_0(\xi) \in C_{n-1}(I_2)$, sind die Gleichungen (1), (2) ohne rechte Seiten den Gleichungen äquivalent, die ihre halbkanonische Form darstellen. Diese schreiben wir in der Gestalt

$$(1') \quad (L_n(y(x)) \equiv)\; y^{(n)} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} p_k(x)\, y^{(n-k)} = 0\,, \quad p_k(x) \in C_0(I_1)\,, \quad k = 2, \ldots, n\,,$$

$$(2') \qquad v^{(n)} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} q_k(\xi)\, v^{(n-k)} = 0\,, \quad q_k(\xi) \in C_0(I_2)\,, \quad k = 2, \ldots, n\,.$$

Für unsere Erwägungen wird die Folgerung 2 des Satzes 8, [1], von Bedeutung sein, welche wir in diesem speziellen Falle als Hilfssatz 1 formulieren werden.

Hilfssatz 1. $(2')\,I_{2\xi} \sim (1')\,I_{1x}\{\xi(x), t(x)\}$ *dann und nur dann, wenn $\xi(x), t(x) \in C_n(I_{1x})$, $\xi(I_{1x}) = I_{2\xi}$, $\xi'(x)\, t(x) \neq 0$ für $x \in I_{1x}$ und wenn für jede Funktion $v(\xi) \in C_n(I_{2\xi})$ die Gleichheit*

$$(3) \quad L_n\{t(x)\, v[\xi(x)]\} = [\xi'(x)]^n\, t(x) \left(v^{(n)}[\xi(x)] + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} q_k[\xi(x)]\, v^{(n-k)}[\xi(x)] \right), \quad x \in I_{1x}\,,$$

gilt.

Weiter wird die bekannte Formel für die Ableitung der zusammengesetzten Funktion benützt. Wenn $f(x) = F[\xi(x)]$, $F(\xi), \xi(x) \in C_m$, ist $f^{(m)}(x) = \sum_{k=0}^{m} A_{m,k} \cdot F^{(k)}[\xi(x)]/k!$, $m = 0, 1, \ldots, A_{0,0} = 1$, $A_{m,0} = 0$, $m > 0$. Für $1 \leqq k \leqq m$ ist (im festen Punkt x) gemäss [4], S. 5, $A_{m,k} = \lim_{\varrho \to 0} \mathrm{d}^m/\mathrm{d}\varrho^m \{(\xi(x + \varrho) - \xi(x))^k\}$. Ist $\xi(x)$ eine analytische Funktion, es gilt $(\xi(x + \varrho) - \xi(x))^k = (\sum_{l=1}^{\infty} \xi^{(l)}(x)\, \varrho^l/l!)^k = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\, \varrho^n$ und darum

$$
(4) \qquad A_{m,k} = m!\, f_m(x) =
$$

$$
= m! \sum_{\substack{k_1 \geqq 0, \ldots, k_m \geqq 0 \\ k_1 + \ldots + k_m = k \\ k_1 + 2k_2 + \ldots + mk_m = m}} \frac{k!}{k_1!\, k_2! \ldots k_m!\, (1!)^{k_1} \ldots (m!)^{k_m}} \cdot (\xi'(x))^{k_1} \ldots (\xi^{(m)}(x))^{k_m},
$$

da

$$
\left(\sum_{l=1}^{m} \xi^{(l)}(x)\, \varrho^l/l!\right)^k = \sum_{\substack{k_1 \geqq 0, \ldots, k_m \geqq 0 \\ k_1 + \ldots + k_m = k}} \frac{k!}{k_1! \ldots k_m!} (\xi'(x)/1!)^{k_1} \ldots (\xi^{(m)}(x)/m!)^{k_m} \varrho^{k_1 + 2k_2 + \ldots + mk_m}.
$$

Für $\xi(x) \in C_m$ betrachten wir die Folge $f_n(x) = F[B_n(x, \xi(x))]$, wo $B_n(x, \xi(x))$ das zu der Funktion $\xi(x)$ in einer abgeschlossenen Umgebung $\bar{U}$ des Punktes x gehörige n-te Bernsteinsche Polynom bedeutet. Weil $\{B_n^{(k)}(x, \xi(x))\}$ in $\bar{U}$ gleichmässig zu $\xi^{(k)}(x)$, $k = 0, \ldots, m$ konvergiert und $A_{m,k}$ hängen nicht von F ab, erhalten wir durch schrittweise Wahl der Funktionen $F(\xi) = \xi^k$, $k = 1, \ldots, m$, dass $A_{m,k,n}$ gleichmässig zu $A_{m,k}$ konvergieren, wo $f_n^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} A_{m,k,n} F^{(k)}[B_n(x, \xi(x))]/k!$. Daraus gilt die Formel (4) auch in diesem Falle.

Bemerkung 1. Aus der Formel (4) geht hervor, dass für alle ganzen $k \geqq 3$, $m \geqq k + 2$ die Formel

$$
(5) \qquad \frac{A_{m,m-k}}{(m-k)!} \frac{1}{[\xi'(x)]^{m-k}} = \binom{m}{k+1} \xi^{(k+1)}(x)/\xi'(x) + \binom{k+2}{2} \binom{m}{k+2} \xi^{(k)}(x) \cdot
$$

$$
\cdot\, \xi''(x)/[\xi'(x)]^2 + P_{m,m-k}[\xi''(x)/\xi'(x), \ldots, \xi^{(k-1)}(x)/\xi'(x)]
$$

gilt. $P_{m,m-k}$ ist ein Polynom, dessen sämtliche Glieder dieselbe Dimension k besitzen, wenn wir der Funktion $\xi'(x)$ die Dimension 1 zuordnen und weiter die Regeln aus [5a], S. 481, benützen. Demzufolge ist die Dimension jedes Gliedes im Ausdruck für $[A_{m,m-k}/(m-k)!]\, 1/[\xi'(x)]^{m-k}$ gleich k, wenn $k \geqq 3$, $m \geqq k + 2$. Auf Grund der Formeln (13), (14), und (15), [6a], S. 82, gilt dieselbe Behauptung über die Dimension auch für alle übrigen ganzen Zahlen $m \geqq 1$, $m - k \geqq 1$.

Betrachten wir jetzt die Funktionen $\xi(x)$, $t(x) \in C_n(I_{1x})$, $\xi(I_{1x}) = I_{2\xi}$, $\xi'(x)\, t(x) \neq 0$

für $x \in I_{1x}$, $v(\xi) \in C_n(I_{2\xi})$, wobei $I_{1x} \subset I_1, I_{2\xi} \subset I_2$ Intervalle sind. Durch Verwendung der Formel (4), [1], erhalten wir, dass

$$L_n\{t(x)\, v[\xi(x)]\} = [\xi'(x)]^n\, t(x) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} Q_k(x)\, v^{(n-k)}[\xi(x)]\,, \quad x \in I_{1x}\,,$$

wo

$$Q_k(x) = \frac{k!}{[\xi'(x)]^n\, t(x)} \sum_{r=0}^{k} \sum_{s=0}^{k-r} \frac{p_r(x)\, A_{n-r-s,n-k}}{r!\, s!\, (n-r-s)!}\, t^{(s)}(x)\,.$$

Hier und auch in weiterem bedeutet für $x \in I_1$, $\xi \in I_2$, $p_0(x) = q_0(\xi) = 1$, $p_1(x) = = q_1(\xi) = 0$. Also gilt die Gleichheit (3) für alle $v(\xi) \in C_n(I_{2\xi})$ gerade dann, wenn die Gleichheiten

$$\frac{[\xi'(x)]^n\, t(x)}{k!}\, q_k[\xi(x)] = \sum_{r=0}^{k} \sum_{s=0}^{k-r} \frac{p_r(x)\, A_{n-r-s,n-k}}{r!\, s!\, (n-r-s)!}\, t^{(s)}(x)\,, \tag{6}$$

$$k = 0, 1, \ldots, n\,, \quad x \in I_{1x}\,,$$

erfüllt sind.

Die erste von ihnen stellt eine Identität dar. Der Fall $k = 1$ bedeutet die Gleichheit

$$\frac{n-1}{2} \frac{\xi''(x)}{\xi'(x)} + \frac{t'(x)}{t(x)} = 0\,, \tag{7}$$

die mit der Beziehung

$$t(x) = \frac{c}{\sqrt{|\xi'(x)|^{n-1}}}\,, \quad c \neq 0 \text{ ist eine beliebige Konstante, } x \in I_{1x}\,, \tag{8}$$

äquivalent ist.

Um näher die übrigen Gleichheiten (6) untersuchen zu können, gehen wir von den Formeln

$$t''(x)/t(x) = (t'(x)/t(x))' + (t'(x)/t(x))^2 \tag{9}$$

$$\frac{t^{(s)}(x)}{t(x)} = \left(\frac{t'(x)}{t(x)}\right)^{(s-1)} + s\left(\frac{t'(x)}{t(x)}\right)^{(s-2)} \frac{t'(x)}{t(x)} + P_s^*\left[\frac{t'(x)}{t(x)}, \ldots, \left(\frac{t'(x)}{t(x)}\right)^{(s-3)}\right], \quad s > 2\,,$$

aus: P_s^* ist ein Polynom, dessen sämtliche Glieder dieselbe Dimension s besitzen, wenn $t'(x)/t(x)$ die Dimension 1 hat. Mit Hilfe (7) folgt aus diesen Formeln, dass

$$\frac{t''(x)}{t(x)} = -\frac{n-1}{2} \frac{\xi'''(x)}{\xi'(x)} + \left[\frac{n-1}{2} + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2\right] \left[\frac{\xi''(x)}{\xi'(x)}\right]^2, \tag{10}$$

$$\frac{t^{(s)}(x)}{t(x)} = -\frac{n-1}{2} \frac{\xi^{(s+1)}(x)}{\xi'(x)} + \left[(s-1)\frac{n-1}{2} + s\left(\frac{n-1}{2}\right)^2\right] \frac{\xi^{(s)}(x)\, \xi''(x)}{[\xi'(x)]^2} +$$

$$+ P_{n,s}^{**}\left[\frac{\xi''(x)}{\xi'(x)}, \ldots, \left(\frac{\xi''(x)}{\xi'(x)}\right)^{(s-3)}\right],$$

wobei sämtliche Glieder des Polynoms $P^{**}_{n,s}$ mit derselben Dimension s versehen sind, wenn die Dimension $\xi'(x)$ 1 ist. Durch Verwendung der Bemerkung 1 und der Formeln (9), (10) erhalten wir, dass die Gleichheiten (6) für $k = 2, \ldots, n$ die folgende Gestalt haben:

$$(6') \quad q_k[\xi(x)]\,[\xi'(x)]^k = R_{n,k}[p_2(x), \ldots, p_k(x), \xi''(x)/\xi'(x), (\xi''(x)/\xi'(x))', \ldots \\ \ldots, (\xi''(x)/\xi'(x))^{(k-1)}], \quad k = 2, \ldots, n, \quad x \in I_{1x}.$$

Jedes Glied des Polynoms $R_{n,k}$ ist der Dimension k, angenommen, dass die Dimension $p_r(x)$ r und $\xi'(x)$ 1 ist.

Der Ausdruck (6′) kann präzisiert werden. In bezug auf die Formeln (5), (10) sowie auch die Formeln (14), (15) in [6], S. 82, ist die höchste Ableitung der Funktion $\xi(x)$, die im Ausdruck (6) vorkommt, der $(k + 1)$-ten Ordnung und zusammen mit $\xi^{(k)}(x)$ in Summanden für $r = 0$ und $s = 0, 1, k - 1, k$ auftreten. (Ist $k = 2$, dann $s = 0, 1, 2$.) Diese (nach dem Dividieren durch $[\xi'(x)]^{n-k}\, t(x)/k!$) sind der Gestalt

$$\frac{A_{n,n-k}}{n!}\,\frac{k!}{[\xi'(x)]^{n-k}} = \frac{n-k}{k+1}\,\frac{\xi^{(k+1)}(x)}{\xi'(x)} + \varkappa\binom{n-k}{2}\frac{\xi^{(k)}(x)\,\xi''(x)}{[\xi'(x)]^2} + \\ + \left[1\Big/\binom{n}{k}\right] P_{n,n-k}[\xi''(x)/\xi'(x), \ldots, \xi^{(k-1)}(x)/\xi'(x)],$$

$2 \leqq k \leqq n$, $n \geqq 2$, wobei (auch in weiterem) $\varkappa = \frac{1}{2}$, wenn $k = 2$ und $\varkappa = 1$ für $k \geqq 3$. $P_{n,n-2} \equiv P_{n,1} \equiv P_{n,0} \equiv 0$, $n \geqq 2$.

$$\frac{A_{n-1,n-k}}{(n-1)!}\,\frac{k!}{[\xi'(x)]^{n-k}}\,\frac{t'(x)}{t(x)} = -\frac{(n-1)(n-k)}{2}\,\frac{\xi^{(k)}(x)\,\xi''(x)}{[\xi'(x)]^2} + \\ + S_{n-1,n-k}[\xi''(x)/\xi'(x), \ldots, \xi^{(k-1)}(x)/\xi'(x)], \quad 2 \leqq k \leqq n, \quad n \geqq 2,$$

wo $S_{n-1,n-k}$ ein Polynom ist und $S_{n-1,n-2} \equiv 0$.

$$\frac{A_{n-k+1,n-k}}{(k-1)!\,(n-k+1)!}\,\frac{k!}{[\xi'(x)]^{n-k}}\,\frac{t^{(k-1)}(x)}{t(x)} = -\frac{(n-1)(n-k)\,k}{4}\,\frac{\xi^{(k)}(x)\,\xi''(x)}{[\xi'(x)]^2} + \\ + T_{n-k+1,n-k}[\xi''(x)/\xi'(x), \ldots, \xi^{(k-1)}(x)/\xi'(x)], \quad 2 \leqq k \leqq n, \quad n \geqq 2.$$

$T_{n-k+1,n-k}$ ist ein Polynom, $T_{n-1,n-2} \equiv 0$.

Endlich

$$\frac{A_{n-k,n-k}}{(n-k)!}\,\frac{1}{[\xi'(x)]^{n-k}}\,\frac{t^{(k)}(x)}{t(x)} = -\frac{n-1}{2}\,\frac{\xi^{(k+1)}(x)}{\xi'(x)} + \left[(k-1)\frac{n-1}{2} + \varkappa k\left(\frac{n-1}{2}\right)^2\right] \cdot \\ \cdot \frac{\xi^{(k)}(x)\,\xi''(x)}{[\xi'(x)]^2} + U_{n-k,n-k}\left[\frac{\xi''(x)}{\xi'(x)}, \ldots, \frac{\xi^{(k-1)}(x)}{\xi'(x)}\right], \quad 2 \leqq k \leqq n, \quad n \geqq 2,$$

wo $U_{n-k,n-k}$ ein Polynom ist, $U_{n-2,n-2} \equiv 0$. Ein weiteres Glied auf der rechten Seite der Gleichheit (6') ist der Ausdruck $p_k(x)$.

Im Hinblick auf die vorhergehenden Betrachtungen lassen sich endlich die Gleichheiten (6) für $k = 3, \ldots, n$ in der Gestalt

$$(6'') \qquad q_k[\xi(x)]\,[\xi'(x)]^k = p_k(x) - \frac{(n+1)(k-1)}{2(k+1)} \frac{\xi^{(k+1)}(x)}{\xi'(x)} + \\ + \frac{1}{2}\left[\binom{k}{2}(n+1) - (n-1)\right] \frac{\xi^{(k)}(x)\,\xi''(x)}{[\xi'(x)]^2} + \\ + V_{n,k}(p_2(x), \ldots, p_{k-1}(x), \xi''(x)/\xi'(x), \ldots, \xi^{(k-1)}(x)/\xi'(x))$$

schreiben, wo $V_{n,k}$ ein Polynom ist, dessen jedes Glied die Dimension k hat.

Die Gleichheit (6) für $k = 2$ ist der Gestalt

$$q_2[\xi(x)]\,[\xi'(x)]^2 = p_2(x) - \frac{n+1}{6} \frac{\xi'''(x)}{\xi'(x)} + \frac{n+1}{4}\left(\frac{\xi''(x)}{\xi'(x)}\right)^2$$

oder

$$(6''') \qquad \{\xi(x), x\} + \frac{3}{n+1} q_2[\xi(x)]\,[\xi'(x)]^2 = \frac{3}{n+1} p_2(x),$$

wo $\{\xi(x), x\} = \frac{1}{2}\xi'''(x)/\xi'(x) - \frac{3}{4}(\xi''(x)/\xi'(x))^2$ die Schwarzsche Ableitung der Funktion $\xi(x)$ im Punkte x ist.

Für jede von den Gleichheiten (6''), (6'''), $k = 3, \ldots, n$, gilt, dass $\xi'(x) \neq 0$ für alle $x \in I_{1x}$ ist. Weiter ist $\xi(x) \in C_{n+1}(I_{1x})$, wenn $p_r(x) \in C_{n-r}(I_1)$, $r = 2, \ldots, k$, $q_k(\xi) \in C_{n-k}(I_2)$. Gleichzeitig erhalten wir das Ergebnis, dass $\xi(x)$ eine Lösung der Gleichung ist, für welche der Existenzsatz ([6a], S. 36, [6b], S. 96) und im Falle $q_k(\xi) \in C_1(I_2)$ auch der Eindeutigkeitssatz ([6a], S. 9–11, 17) gilt. Daraus folgt durch Verwendung des Hilfssatzes 1 der

Satz 2. *Es sei $n \geqq 2$. Dann gilt:* $(2')\,I_{2\xi} \sim (1')\,I_{1x}\{\xi(x), t(x)\} \Leftrightarrow \xi(x)$ *ist in I_{1x} eine gemeinsame Lösung der Gleichungen*

$$(11) \qquad \frac{q_k(\xi)}{k!} \frac{\xi'^n}{\sqrt{|\xi'|^{n-1}}} = \sum_{r=0}^{k} \sum_{s=0}^{k-r} \frac{p_r(x)}{r!\,s!\,(n-r-s)!} \cdot \\ \cdot A_{n-r-s,n-k}\left[\frac{1}{\sqrt{|\xi'|^{n-1}}}\right]^{(s)}, \quad k = 2, \ldots, n,$$

$\xi(I_{1x}) = I_{2\xi}$ *und $t(x)$ ist durch die Beziehung (8) gegeben. Die erste der Gleichungen (11) hat die Form*

$$(12) \qquad \{\xi, x\} + \frac{3}{n+1} q_2(\xi)\,\xi'^2 = \frac{3}{n+1} p_2(x).$$

Für die k-te $(k = 2, \dots, n)$ *der Gleichungen* (11) *gilt*: *Es seien* $x_0 \in I_1$, $\xi_0^{(0)} \in I_2$, $\xi_0^{(1)} \neq 0$, $\xi_0^{(2)}, \dots, \xi_0^{(k)}$ *beliebige Zahlen. Dann gibt es mindestens eine Lösung* $\xi(x)$ *der Gleichung* (11), *welche die Anfangsbedingungen*

$$\xi^{(i)}(x_0) = \xi_0^{(i)}\,, \quad i = 0, 1, \dots, k\,, \tag{13}$$

erfüllt. Im Falle $q_k(\xi) \in C_1(I_2)$ *gibt es gerade ein* x_0 *enthaltendes Intervall* $I_1^* \subset I_1$ *und eine dort definierte Lösung* $\xi(x)$ *der Gleichung* (11), *welche die Anfangsbedingungen* (13) *erfüllt und welche am breitesten in folgenden Sinne ist*: *Jede Lösung der Gleichung* (11), *die die Anfangsbedingungen* (13) *erfüllt, ist ein Teil der Lösung* $\xi(x)$.

Jede Lösung $\xi(x)$ *der Gleichung* (11) *hat die Eigenschaft, dass in ihrem Definitionsintervall* I_1^{**} $\xi'(x) \neq 0$ *ist. Weiter ist* $\xi(x) \in C_{n+1}(I_1^{**})$, *wenn* $p_r(x) \in C_{n-k}(I_1)$, $r = 2, \dots, k$, $q_k(\xi) \in C_{n-k}(I_2)$.

Folgerung 1. *Es seien die Gleichung* (1′) *der Ordnung* $n \geqq 2$ *und die Funktion* $\xi(x) \in C_{n+1}(I_{1x})$, $I_{1x} \subset I_1$, $\xi'(x) \neq 0$ *für* $x \in I_{1x}$, $\xi(I_{1x}) = I_{2\xi}$ *gegeben. Dann gibt es gerade eine Gleichung* (2′) *mit den Koeffizienten* $q_k(\xi) \in C_0(I_{2\xi})$, $k = 2, \dots, n$, *derart, dass* $(2')\, I_{2\xi} \sim (1')\, I_{1x}\{\xi(x), c/\sqrt{|\xi'(x)|^{n-1}}\}$, $c \neq 0$ *ist eine beliebige Konstante. Die Funktionen* $q_k(\xi)$ *sind durch die Gleichungen* (11) *bestimmt, wo man* $\xi(x)$ *anstatt* ξ *einsetzt. Dabei sind* $q_k(\xi) \in C_{n-k}(I_{2\xi})$, $k = 2, \dots, n$, *wenn* $p_k(x) \in C_{n-k}(I_1)$, $k = 2, \dots, n$.

Folgerung 2. *Es seien eine natürliche Zahl* k, $2 \leqq k \leqq n$, *die Gleichung* (1′) *der Ordnung* $n \geqq 2$ *mit den Koeffizienten* $p_r(x) \in C_{n-k}(I_1)$, $r = 2, \dots, k$, ($p_r(x) \in C_0(I_1)$, $r = k + 1, \dots, n$, *falls* $k < n$) *und die Funktion* $f(\xi) \in C_{n-k}(I_2)$ *gegeben. Dann existieren Intervalle* $I_{1x} \subset I_1$, $I_{2\xi} \subset I_2$ *und die Gleichung* (2′) *mit dem Koeffizienten* $q_k(\xi) = f(\xi)$, $\xi \in I_{2\xi}$, *derart, dass* $(2')\, I_{2\xi} \sim (1')\, I_{1x}$ *ist.*

Beweis. Wir betrachten eine beliebige Lösung $\xi(x)$ der k-ten Gleichung des Systems (11), wo $f(\xi)$ in der Rolle $q_k(\xi)$ auftritt und wir wenden die Folgerung 1 an.

Bemerkung 2. Die Gleichung (12) lässt sich in der Form

$$\frac{3}{n+1}\, q_2(\xi)\, \frac{\xi'^2}{\sqrt{|\xi'|}} = \left[\frac{1}{\sqrt{|\xi'|}}\right]'' + \frac{3}{n+1}\, p_2(x)\, \frac{1}{\sqrt{|\xi'|}} \tag{12′}$$

schreiben und weil $A_{n-r-s,0} = 0$ für $0 \leqq s < n - r$, $A_{n-r-s,0} = 1$ für $s = n - r$ ist, hat die Gleichung (11) für $k = n$ die Gestalt

$$q_n(\xi)\, \frac{\xi'^n}{\sqrt{(|\xi'|^{n-1})}} = \left[\frac{1}{\sqrt{(|\xi'|^{n-1})}}\right]^{(n)} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} p_k(x) \left[\frac{1}{\sqrt{(|\xi'|^{n-1})}}\right]^{(n-k)}. \tag{14}$$

Aus dem Beweis des Satzes 2 geht hervor, dass die Gleichungen (11) für $k = 3, \ldots, n$ sich in der Form

$$\frac{(n+1)(k-1)}{2(k+1)} \frac{\xi^{(k+1)}}{\xi'} - \frac{1}{2}\left[\binom{k}{2}(n+1) - (n-1)\right] \frac{\xi^{(k)}\xi''}{\xi'^2} +$$
$$+ q_k(\xi)\, \xi'^k = p_k(x) + V_{n,k}(p_2(x), \ldots, p_{k-1}(x), \xi''/\xi', \ldots, \xi^{(k-1)}/\xi')$$

schreiben lassen, wo $V_{n,k}$ ein gewisses Polynom, dessen sämtliche Glieder dieselbe Dimension k besizen, falls $p_r(x)$ die Dimension r und ξ' die Dimension 1 hat.

Bemerkung 3. Im Falle $p_k(x) \in C_{n-k}(I_1)$, $q_k(\xi) \in C_{n-k}(I_2)$, $k = 2, \ldots, n$, kann man den ersten Teil des Satzes 2 auch aus dem Satz 2,13 ([5b], S. 10) beweisen.

2. In weiterem beweisen wir ein klassisches, die Gestalt der relativen Differentialinvarianten der Gleichung (1′) in kanonischer Form betreffends Ergebnis (vergleichen mit [5c], S. 167, [7], S. 406–407, [8], S. 78–79, [9]). Zum Unterschied von der klassischen Theorie wird sein Beweis elementar und sich auf die Schlömilchschen Ergebnisse stützend sein.

Es sei also $n \geqq 3$, $p_k(x) \in C_{n-k}(I_1)$, $q_k(\xi) \in C_{n-k}(I_2)$, $k = 3, \ldots, n$, und

$$p_2(x) = 0\,, \quad x \in I_1\,, \quad q_2(\xi) = 0\,, \quad \xi \in I_2\,. \tag{15}$$

Die Gleichung (12′) reduziert sich dann auf $[1/\sqrt{|\xi'|}]'' = 0$ und jede ihre Lösung ist die Funktion

$$\xi(x) = \frac{ax+b}{cx+d}\,, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0\,, \quad a, b, c, d \text{ sind Zahlen}\,. \tag{16}$$

Ein spezieller Fall dieser Funktion ist

$$\xi(x) = ax + b\,, \quad a \neq 0 \tag{17}$$

und

$$\xi(x) = \frac{1}{x}\,. \tag{18}$$

Im Falle $\xi(x) = ax + b$ ist $A_{m,k}/k! = 0$, $k < m$ und $A_{m,m} = m!\, a^m$. Das Teilsystem für $k = 3, \ldots, n$ des Systems (11) ist der Gestalt

$$q_k(ax+b)\, a^k = p_k(x)\,, \quad k = 3, \ldots, n\,. \tag{19}$$

Daraus folgt für beliebige Werte der Zahlen $\alpha_{m,k}$ das System

$$\Big(\sum_{k=3}^{m} \alpha_{m,k} q_k^{(m-k)}(ax+b)\Big)\, a^m = \sum_{k=3}^{m} \alpha_{m,k} p_k^{(m-k)}(x)\,, \quad m = 3, \ldots, n\,. \tag{20}$$

Viel komplizierter ist der Fall der Funktion $\xi(x) = 1/x$. Dann ist nach [4], S. 6,

$$A_{m,k} = (-1)^m \frac{m!}{(m-k)!} \frac{(m-1)!}{(k-1)!} x^{-m-k}, \quad 1 \leqq k \leqq m,$$

so, dass das Teilsystem (11) für $k = 3, \ldots, n$ folgende Gestalt hat (für $k = n$ gehen wir von (14) aus)

$$q_k\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{r=0}^{k} B_{n,k,r}\, p_r(x)\, x^{r+k}, \quad k = 3, \ldots, n, \tag{21}$$

wo

$$B_{n,k,r} = \frac{(n-1)!\,k!}{(n-k-1)!\,r!} \sum_{s=0}^{k-r} (-1)^{r+s} \frac{(n-r-s-1)!}{s!\,(k-r-s)!\,(n-s-1)!},$$
$$3 \leqq k < n, \quad 0 \leqq r \leqq k,$$

woraus

$$B_{n,k,0} = 0, \quad B_{n,k,r} = (-1)^k \binom{k}{r} \frac{(k-1)!}{(r-1)!}, \quad 3 \leqq k < n, \quad 3 \leqq r \leqq k. \tag{22}$$

Die letzte Gleichheit erhalten wir durch Vergleichung der Beziehungen

$$\left(x^{k-1}\right)^{(k-r)} = \frac{(k-1)!}{(r-1)!} x^{r-1},$$

$$\left(x^{n-1} x^{-n+k}\right)^{(k-r)} = \sum_{s=0}^{k-r} \binom{k-r}{s} (-1)^{k-r-s} \frac{(n-1)!\,(n-r-s-1)!}{(n-1-s)!\,(n-k-1)!} x^{r-1}.$$

Die Formeln (22) gelten auch für $k = n$, $0 \leqq r \leqq n$. In bezug auf (15), (22) ist das System (21) der Gestalt

$$q_k\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{r=3}^{k} (-1)^k \binom{k}{r} \frac{(k-1)!}{(r-1)!} p_r(x)\, x^{r+k}, \quad k = 3, \ldots, n. \tag{21'}$$

Bemerkung 4. Das System (21′) kann man auch aus dem Satze 2,18 ([5b], S. 12) erhalten.

Weiter gilt der

Hilfssatz 2. *Es gibt gerade ein System der Zahlen $\alpha_{m,r}$, m, r sind ganz, $3 \leqq r \leqq$ $\leqq m \leqq n$, $\alpha_{m,m} = 1$, derart, dass, wenn das System (21′) gilt, dann gilt auch das System*

$$\left(\sum_{k=3}^{m} \alpha_{m,k} q_k^{(m-k)}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \frac{(-1)^m}{x^{2m}} = \sum_{k=3}^{m} \alpha_{m,k} p_k^{(m-k)}(x), \quad m = 3, \ldots, n. \tag{23}$$

Die Zahlen $\alpha_{m,r}$ sind durch die Formeln

$$\alpha_{m,r} = (-1)^{m-r} \frac{(m-1)!\, m!\, (m+r-2)!}{(r-1)!\, r!\, (m-r)!\, (2m-2)!} \tag{24}$$

bestimmt.

Beweis. Man geht von der Formel für die Ableitung der Hauptkomponente $F(x)$ der zusammengesetzten Funktion $f(x) = F(1/x)$ aus, [4], S. 20, welche für die Funktion $F \in C_n$ richtig ist:

$$F^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^n\, x^{n+1} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \{x^{n-1} f(x)\}.$$

Verwendet man diese Formel auf die durch das System (21′) gegebene Funktionen $q_k(1/x)$, wo man wieder schreibt $B_{n,k,r}$, erhält man

$$q_k^{(m-k)}\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^{m-k} \sum_{r=3}^{k} B_{n,k,r} \sum_{l=0}^{m-k} \binom{m-k}{l} \frac{(m+r-1)!}{(k+l+r-1)!}\, p_r^{(l)}(x)\, x^{m+l+r}.$$

Also die Beziehungen (23) gelten gerade dann, wenn für jedes m, $3 \leqq m \leqq n$, ist

$$\sum_{k=3}^{m} \alpha_{m,k}\, p_k^{(m-k)}(x) = \sum_{k=3}^{m} \alpha_{m,k} (-1)^k \sum_{r=3}^{k} B_{n,k,r} \sum_{l=0}^{m-k} \binom{m-k}{l} \frac{(m+r-1)!}{(k+l+r-1)!}\, p_r^{(l)}(x)\,.$$
$$.\, x^{l+r-m} = \sum_{r=3}^{m} \sum_{l=0}^{m-r} p_r^{(l)}(x)\, x^{l+r-m} \sum_{k=r}^{m-l} \alpha_{m,k} (-1)^k B_{n,k,r} \binom{m-k}{l} \frac{(m+r-1)!}{(k+l+r-1)!}.$$

Bei gegebenem m, $3 \leqq m \leqq n$, gilt das letzte System für alle $p_k(x) \in C_{n-k}(I_1)$ gerade dann, wenn

$$\sum_{k=r}^{m-l} \alpha_{m,k} (-1)^k B_{n,k,r} \binom{m-k}{l} \frac{(m+r-1)!}{(k+l+r-1)!} = \begin{cases} \alpha_{m,r}, & l = m - r \\ 0, & 0 \leqq l < m - r \end{cases} \tag{25}$$

$3 \leqq r \leqq m$. Die Gleichungen des Systems (25) für $l = m - r$, $3 \leqq r \leqq m$, bedeuten Identität. Für $l = m - r - 1$, $3 \leqq r \leqq m - 1$, haben sie die Gestalt

$$\alpha_{m,r}(m-r)(m+r-1) + \alpha_{m,r+1}(r+1)\, r = 0\,.$$

Dieses Teilsystem des Systems (25) hat für $\alpha_{m,m} = 1$ gerade eine Lösung, die durch die Formel (24) gegeben ist. Diese Formel enthält auch den Fall $r = m$.

Durch (24) bestimmte $\alpha_{m,r}$ erfüllen auch die übrigen Gleichungen des Systems (25).

In der Tat, nach ihrem Einsetzen in die linke Seite (25) nimmt diese folgende Gestalt an

$$(-1)^m \frac{(m-1)!\, m!\, (m+r-1)!}{(2m-2)!\, r!\, (r-1)!\, l!} \sum_{k=r}^{m-l} (-1)^k \frac{(m+k-2)!}{(k-r)!\, (m-k-l)!\, (k+l+r-1)!} =$$

$$= (-1)^{m+r} \frac{(m-1)!\, m!\, (m+r-1)!}{(2m-2)!\, r!\, (r-1)!\, (m-l-r)!} \sum_{s=0}^{m-l-r} (-1)^s \,.$$

$$\cdot \binom{m-l-r}{s} \frac{(m+r-2+s)!}{(2r+l-1+s)!} = 0\,,$$

da für $m - l - r \geqq 1$ ist

$$\frac{1}{m+r-1} \left(x^{-m-r+1} x^{m+r-1}\right)^{(m-l-r)} = \sum_{s=0}^{m-l-r} (-1)^s \,.$$

$$\cdot \binom{m-l-r}{s} \frac{(m+r-2+s)!}{(2r+l-1+s)!} x^{l+r-m} = 0\,.$$

Wir haben bewiesen, dass, wenn $\xi(x)$ eine Funktion (17) oder (18) ist und das Teilsystem für $k = 3, \ldots, n$ des Systems (11) erfüllt, dann genügt sie auch dem System

$$(26) \qquad \left(\sum_{k=3}^{m} \alpha_{m,k}\, q_k^{(m-k)}(\xi)\right) \xi'^m = \sum_{k=3}^{m} \alpha_{m,k}\, p_k^{(m-k)}(x)\,, \quad m = 3, \ldots, n\,,$$

wo $\alpha_{m,k}$ durch die Formeln (24) bestimmt sind. Dasselbe gilt auch für die Funktion $\xi(x)$ der Gestalt (16), die sich nicht auf (17) reduziert. In der Tat, ist I_{1x} ihr Definitionsintervall und $I_{2\xi} = \xi(I_{1x})$, in bezug auf (15) gilt $(2')\, I_{2\xi} \sim (1')\, I_{1x}\{\xi(x), t(x)\}$, $t(x)$ ist eine passende Funktion. Andererseits lässt sie sich $\xi(x) = \xi_1\{\xi_2[\xi_3(x)]\}$ schreiben, wo

$$\xi_1(\xi_2) = \frac{bc - ad}{c} \xi_2 + \frac{a}{c}\,, \quad \xi_2(\xi_3) = \frac{1}{\xi_3}\,, \quad \xi_3(x) = cx + d\,.$$

Durch diese Funktionen sind eindeutig nach der Folgerung 1 des Satzes 2 die Gleichungen $(2^{*\prime})$, $(2'')$, $(2''')$ (in kanonischer Form) in den Intervallen $I_{2\xi}$, $I_{3\xi} = \xi_2(I_{4\xi})$, $I_{4\xi} = \xi_3(I_{1x})$ derart bestimmt, dass

$$(27) \quad \begin{aligned} &(2''')\, I_{4\xi} \sim (1')\, I_{1x}\{\xi_3(x), t_3(x)\} \\ &(2'')\, I_{3\xi} \sim (2''')\, I_{4\xi}\{\xi_2(\xi_3), t_2(\xi_3)\} \\ &(2^{*\prime})\, I_{2\xi} \sim (2'')\, I_{3\xi}\{\xi_1(\xi_2), t_1(\xi_2)\}\,. \end{aligned}$$

Die Funktionen t_j sind mit Hilfe ξ_j durch die Beziehung (8) festgelegt. Aus dem Satz 2, [1], folgt, dass dann

$$(2^{*\prime}) \quad I_{2\xi} \sim (1')\, I_{1x}\{\xi(x), t_1[\xi_2(\xi_3(x))]\, t_2[\xi_3(x)]\, t_3(x)\}\,.$$

Also (2*′), (2′) bedeuten in $I_{2\xi}$ dieselben Gleichungen. Aus (27) geht hervor, dass ξ_j Lösungen entsprechender Systeme (26) sind. Darum gilt auch dasselbe für $\xi(x)$, w. z. b. w.

Wir beweisen noch die umgekehrte Behauptung: Ist $\xi(x)$ eine gemeinsame Lösung in I_{1x} des Systems (26), die der Form (16) ist, dann ist sie auch eine gemeinsame Lösung des Systems (11). In der Tat, es gibt genau eine in $I_{2\xi} = \xi(I_{1x})$ definierte Gleichung $(\bar{2}')$ mit der Eigenschaft $(\bar{2}')\, I_{2\xi} \sim (1')\, I_{1x}\{\xi(x), t(x)\}$. Wir beweisen, dass ihre Koeffizienten $\bar{q}_k(\xi) = q_k(\xi)$ für $k = 2, \ldots, n$, $\xi \in I_{2\xi}$, woraus auf Grund des Satzes 2 die Behauptung folgt. Vor allem ist $\bar{q}_2(\xi) = 0$, $\xi \in I_{2\xi}$. Aus den Formeln (19) und (21′) folgt, dass für $k = 3$ die Gleichung (11) dieselbe Form wie die entsprechende Gleichung des Systems (26) hat. Also ist $\bar{q}_3(\xi) = q_3(\xi)$ für $\xi \in I_{2\xi}$. Es sei nun $\bar{q}_k(\xi) = q_k(\xi)$ für $k = 3, \ldots, l-1$, $l - 1 < n$. Auf Grund des schon bewiesenen gilt die Gleichheit $\left(\sum_{k=3}^{l} \alpha_{l,k} \bar{q}_k^{(l-k)}[\xi(x)]\right) [\xi'(x)]^l = \sum_{k=3}^{l} \alpha_{l,k} p_k^{(l-k)}(x)$. Abermals gemäss der Voraussetzung der Behaptung ist $\left(\sum_{k=3}^{l} \alpha_{l,k} q_k^{(l-k)}[\xi(x)]\right) [\xi'(x)]^l = \sum_{k=3}^{l} \alpha_{l,k} p_k^{(l-k)}(x)$. Also $\bar{q}_l(\xi) = q_l(\xi)$, $\xi \in I_{2\xi}$ und die ähnliche Gleichheit gilt für alle $k = 3, \ldots, n$, w. z. b. w. Damit ist der Satz 3 bewiesen.

Satz 3. *Es sei* $n \geqq 3$, $p_2(x) = 0$, $x \in I_1$, $q_2(\xi) = 0$, $\xi \in I_2$, $p_k(x) \in C_{n-k}(I_1)$, $q_k(\xi) \in C_{n-k}(I_2)$, $k = 3, \ldots, n$. *Ferner mögen die Zahlen* $\alpha_{m,k}$, $3 \leqq k \leqq m \leqq n$, *durch die Formeln* (24) *gegeben sein. Dann gilt*:

(2′) $I_{2\xi} \sim (1')\, I_{1x}\{\xi(x), t(x)\} \Leftrightarrow \xi(x)$ *ist in* I_{1x} *eine gemeinsame Lösung des Systems* (26), *welche der Gestalt*

$$\xi(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0,$$

a, b, c, d sind Zahlen, ist, $\xi(I_{1x}) = I_{2\xi}$ *und* $t(x)$ *ist durch die Beziehung* (8) *bestimmt.*

Bemerkung 5. Ein weiterer Beweis des Satzes 3 ist in der Arbeit [5c], S. 168–169 enthalten.

Bemerkung 6. Aus dem Satz 3 folgt, dass

$$\vartheta_m(x) = \sum_{k=3}^{m} (-1)^{m-k} \frac{(m-1)!\, m!\, (m+k-2)!}{(k-1)!\, k!\, (m-k)!\, (2m-2)!} p_k^{(m-k)}(x), \quad m = 3, \ldots, n$$

die relative Invariante von der Dimension m der Gleichung

$$(1''_n) \qquad y^{(n)} + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} p_k(x)\, y^{(n-k)} = 0, \quad p_k(x) \in C_{n-k}(I_1), \quad (n \geqq 3)$$

in bezug auf die Gruppe der Transformationen (16) darstellt. Da $\vartheta_m(x)$ nicht von n abhängt, ist es von Bedeutung, die folgende Definition einzuführen.

Definition 3. Unter der begleitenden Gleichung von Ordnung l, $2 \leqq l \leqq n$, der Gleichung $(1''_n)$ werden wir die Gleichung

$$(1''_2) \qquad y'' = 0\,, \quad l = 2$$

$$(1''_l) \qquad y^{(l)} + \sum_{k=3}^{l} \binom{l}{k} p_k(x)\, y^{(l-k)} = 0\,, \quad 2 < l \leqq n\,,$$

verstehen.

Betrachten wir nun die Gleichung

$$(2''_n) \qquad v^{(n)} + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} q_k(\xi)\, v^{(n-k)} = 0\,, \quad q_k(\xi) \in C_{n-k}(I_2)\,, \quad k = 3, \ldots, n$$

und möge die Gleichung $(2''_l)$ ihre begleitende Gleichung von Ordnung l, $l = 2, \ldots, n$, sein. Die Bedeutung der begleitenden Gleichungen geht aus dieser Folgerung des Satzes 3 hervor.

Folgerung des Satzes 3. $(2''_n)\, I_{2\xi} \sim (1''_n)\, I_{1x}\{\xi(x), c/\sqrt{(|\xi'(x)|^{n-1})}\}$ *gerade dann, wenn für jedes* $l = 2, \ldots, n$ $(2''_l)\, I_{2\xi} \sim (1''_l)\, I_{1x}\{\xi(x), c_l/\sqrt{(|\xi'(x)|^{l-1})}\}$, c, c_l *sind beliebige Konstanten.*

Wird die Definition 4, [1], angewendet, so kann diese Folgerung auch auf folgende Weise formuliert werden: $(2''_n)\, I_{2\xi} \sim (1''_n)\, I_{1x}$ gerade dann, wenn die Menge sämtlicher begleitenden Gleichungen der Gleichung $(2''_n)$ in $I_{2\xi}$ der Menge sämtlicher begleitenden Gleichungen der Gleichung $(1''_n)$ in I_{1x} fast gleich äquivalent ist.

In bezug auf die Bedeutung der Gleichung (12) ist die folgende Definition von Nutzen.

Definition 4. Es sei $n \geqq 2$. Unter der begleitenden Gleichung von 2-ter Ordnung der Gleichung $(1')$ werden wir die Gleichung

$$(1'_2) \qquad y'' + \frac{3}{n+1}\, p_2(x)\, y = 0$$

verstehen.

Ist $(2'_2)$ die begleitende Gleichung von 2-ter Ordnung der Gleichung $(2')$, dann folgt aus dem Satz 2 die Implikation

$$(2')\, I_{2\xi} \sim (1')\, I_{1x}\{\xi(x), c/\sqrt{(|\xi'(x)|^{n-1})}\} \Rightarrow (2'_2)\, I_{2\xi} \sim (1'_2)\, I_{1x}\{\xi(x), c_2/\sqrt{|\xi'(x)|}\}\,,$$

c, $c_2 \neq 0$ sind beliebige Konstanten.

Die weitere Bedeutung der Gleichung $(1'_2)$ besteht darin, dass der Quotient $u(x)/v(x)$ zweier linear unabhängiger Lösungen der Gleichung $(1'_2)$ in jedem Intervall I, wo $v(x) \neq 0$, eine Lösung der Gleichung

$$(28) \qquad \{\xi, x\} = \frac{3}{n+1} p_2(x)$$

darstellt und man erhält auf diese Weise sämtliche Lösungen der Gleichung (28). Also, ist $p_2(x) \in C_{n-2}(I_1)$ und I_{1x} ein Intervall, in dem eine Lösung $v(x) \neq 0$ der Gleichung $(1'_2)$ existiert, so gibt es gemäss der Folgerung 1 des Satzes 2 die Gleichung $(2''_n)$ mit den Koeffizienten $q_k(\xi) \in C_0(I_{2\xi})$, $k = 3, \ldots, n$, $I_{2\xi}$ ist ein Intervall, derart, dass $(1')\, I_{1x} \sim (2''_n)\, I_{2\xi}$. Im allgemeinen ist die Gleichung $(2''_n)$ mit dieser Eingenschaft nicht eindeutig bestimmt. Jedoch aus den Beziehungen (19) und (21) ist es zu sehen, dass die Eindeutigkeit (mit Ausnahme vom Definitionsintervall) für die Gleichung $(2''_n)$ der Form

$$(29) \qquad v^{(n)} = 0$$

zutrifft. Das Intervall $I_{2\xi}$ ist eindeutig bestimmt, wenn $I_{2\xi} = (-\infty, \infty)$, d. h. wenn jede Lösung $u(x)$ der Gleichung $(1'_2)$ linear unabhängig mit $v(x)$, in I_{1x} mindestens eine Nullstelle besitzt.

Definition 5. Es sei $n \geqq 3$. Die Gleichung $(1')$, für welche es eine Lösung $v(x) \not\equiv 0$ der begleitenden Gleichung $(1'_2)$ derart gibt, dass in jedem Intervall I_{1x}, in welchem $v(x) \neq 0$, gilt $(1')\, I_{1x} \sim (29)\, I_{2\xi}$, $I_{2\xi}$ ist ein Intervall, wird der Gleichung (29) lokal äquivalent genannt werden.

Aus der hervorgehenden Betrachtung folgt, dass an der Wahl von $v(x)$ nicht gelegen ist und daraus, dass die Koeffizienten der der Gleichung (29) lokal äquivalenten Gleichung die Beziehung $p_k(x) \in C_{n-k}(I_1)$ erfüllen.

Satz 4. *Es seien $n \geqq 3$, $f(x) \in C_{n-2}(I_1)$ gegeben. Dann gibt es genau eine der Gleichung (29) lokal äquivalente Gleichung $(1')$, deren Koeffizient $p_2(x) = f(x)$, $x \in I_1$ ist. Diese Gleichung wird $I_n(y, f(x)) = 0$ bezeichnet.*

Beweis. Mögen $u(x)$, $v(x)$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichung $y'' + [3/(n+1)]\, f(x)\, y = 0$ bilden, und es sei $\{I_{1x}^{(i)}\}_{i=1,2,\ldots}$ das System sämtlicher Intervalle, auf welchen $v(x) \neq 0$ ist. Bezeichnen wir $\xi_i(x) = u(x)/v(x)$, $x \in I_{1x}^{(i)}$, $\xi_i(I_{1x}^{(i)}) = I_{2\xi}^{(i)}$. Die inverse Funktion $x_i(\xi)$ zu $\xi_i(x)$ ist in $I_{2\xi}^{(i)}$ eine Lösung der Gleichung

$$(30) \qquad \{x, \xi\} + \frac{3}{n+1} f(x)\, x'^2(\xi) = 0 \quad ([3], \text{S. } 330)$$

und es ist $x_i(\xi) \in C_{n+1}(I_{2\xi}^{(i)})$. Durch die Gleichung (29) und die Funktion $x_i(\xi)$ ist gerade eine Gleichung $(1')$ in $I_{1x}^{(i)}$ gegeben, für welche $p_2(x) = f(x)$ und $(1')\, I_{1x}^{(i)} \sim$ $\sim (29)\, I_{2\xi}^{(i)}$. Diese Gleichung $(1')$ kann aus $\bigcup_i I_{1x}^{(i)}$ auf das ganze Intervall I_1 fortgesetzt werden. Diese Tatsache folgt daraus, dass jede Lösung der Gleichung (30), deren Werte in $I_{1x}^{(i)}$ liegen, von der Form $x_i[h(\xi)]$ ist, wo h eine homographische Transformation ist. Gleichzeitig ist damit die Eindeutigkeit der der Gleichung (29) lokal äquivalenten Gleichung mit gegebenen Koeffizienten $p_2(x)$ bewiesen.

Eine weitere Eigenschaft der Gleichung $I_n(y, f(x)) = 0$ folgt aus dem

Hilfssatz 3. *Für $k = 2, 3, \ldots, n$ seien $p_k(x) \in C_{n-k}(I_1)$, $q_k(\xi) \in C_{n-k}(I_2)$ und es sei $(2')\, I_{2\xi} \sim (1')\, I_{1x}$. Dann gilt: $(2')$ ist selbstadjungiert in $I_{2\xi} \Leftrightarrow (1')$ ist selbstadjungiert in I_{1x}.*

Beweis. Wenn $(2')\ I_{2\xi} \sim (1')\, I_{1x}\{\xi(x), t(x)\}$, ist $t(x) = c/\sqrt{(|\xi'(x)|^{n-1})}$, $c \neq 0$ ist eine Konstante. Möge $(\bar{2}')$ $[(\bar{1}')]$ zu $(2')$ $[(1')]$ adjungiert sein. Nach dem Satz 7, [1], ist $(\bar{2}')\, I_{2\xi} \sim (\bar{1}')\, I_{1x}\{\xi(x), c_1/\sqrt{(|\xi'(x)|^{n-1})}\}$, $c_1 \neq 0$ ist eine Konstante. Daraus erhalten wir die Behauptung des Hilfssatzes.

Aus dem Hilfssatz 3 folgt unmittelbar der

Satz 5. *Die Gleichung $I_n(y, f(x)) = 0$ ist für jede $f(x) \in C_{n-2}(I_1)$ in I_1 selbstadjungiert.*

Bemerkung 7. Aus der Form der selbstadjungierten Polynome, [6], S. 96, geht hervor, dass es unendlich viele selbstadjungierte Gleichungen $(1')$ der Ordnung $n > 3$ mit dem Koeffizienten $p_2(x) = f(x)$ gibt.

Mögen $f(x) \in C_{n-2}(I_1)$, $g(\xi) \in C_{n-2}(I_2)$ zwei Funktionen sein. Dann

$$y'' + \frac{3}{n+1} f(x)\, y = 0\,, \tag{31}$$

bzw.

$$v'' + \frac{3}{n+1} g(\xi)\, v = 0 \tag{32}$$

ist die begleitende Gleichung 2-ter Ordnung der Gleichung $I_n(y, f(x)) = 0$, bzw. der Gleichung $I_n(v, g(\xi)) = 0$. Von der Beziehung zwischen Äquivalenz dieser Gleichungen spricht der

Satz 6.

$$I_n(v, g(\xi)) = 0, I_{2\xi} \sim I_n(y, f(x)) = 0, I_{1x}\{\xi(x), c/\sqrt{(|\xi'(x)|^{n-1})}\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (32)\, I_{2\xi} \sim (31)\ I_{1x}\{\xi(x), c_1/\sqrt{|\xi'(x)|}\},\ c, c_1 \neq 0 \textit{ sind Konstanten.}$$

Beweis. Es sei $(32)\ I_{2\xi} \sim (31)\, I_{1x}\{\xi(x), c_1\sqrt{|\xi'(x)|}\}$. Durch die Funktion $\xi(x) \in C_{n+1}(I_{1x})$ und die Gleichung $I_n(y, f(x)) = 0$ ist dann eindeutig die Gleichung $(2')$ in $I_{2\xi}$ mit der Eigenschaft $(2')\ I_{2\xi} \sim I_n(y, f(x)) = 0,\ I_{1x}\{\xi(x), c/\sqrt{(|\xi'(x)|^{n-1})}\}$ bestimmt. Es ist klar, dass ihr Koeffizient $q_2(\xi) = g(\xi)$, $\xi \in I_{2\xi}$ ist. Bei Berücksichtigung des Satzes 2, [1], ist (2') der Gleichung (29) lokal äquivalent und nach dem Satz 4 ist sie die Gleichung $I_n(v, g(\xi)) = 0$ in $I_{2\xi}$.

Der zweite Teil des Satzes wurde schon unmittelbar nach der Definition 4 angeführt.

Literatur

[1] *V. Šeda:* Über die Transformation der linearen Differentialgleichungen n-ter Ordnung. I. Čas. pěst. mat. *90*, (1965), 385—412.

[2] *O. Borůvka:* Sur les transformations différentielles linéaires complètes du second ordre. Ann. di Mat. p. ed app. *49*, 1960, 229—252.

[3] *O. Borůvka:* Sur la transformation des intégrales des équations différentielles linéaires ordinaires du second ordre. Ann. di Mat. p. ed app., *41*, 1956, 325—342.

[4] *O. Schlömilch:* Vorlesungen über einzelne Theile der höheren Analysis, Compendium der höheren Analysis, II. Band, Braunschweig 1866.

[5a] *Z. Hustý:* Über die Transformation und Äquivalenz homogener linearer Differentialgleichungen von höherer als der zweiten Ordnung. Czech. Math. Journ. *15* (*90*), 1965, 479—502.

[5b] *Z. Hustý:* Über die Transformation und Äquivalenz homogener linearer Differentialgleichungen von höherer als der zweiten Ordnung (1. Fortsetzung). Czech. Math. Journ. *16* (*91*), 1966, 1—13.

[5c] *Z. Hustý:* Über die Transformation und Äquivalenz homogener linearer Differentialgleichungen von höherer als der zweiten Ordnung (Ende). Czech. Math. Journ. *16* (*91*), 1966, 161—185.

[6a] *Дж. Сансоне:* Обыкновенные дифференциальные уравнения, Том 1, Перевод с итальянского, Москва 1953.

[6b] *Дж. Сансоне:* Обыкновенные дифференциальные уравнения, Том 2, Перевод с итальянского, Москва 1954.

[7] *A. R. Forsyth:* Invariants, Covariants and Quotient-Derivatives associated with Linear Differential Equations. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. *179* (1888) A, 377—489.

[8] *Ch. L. Bouton:* Invariants of the General Linear Differential Equation and their Relation to the Theory of Continuous Groups. Amer. Journ. of Math. *21* (1899), 25—84.

[9] *E. J. Wilczynski:* Projective Differential Geometry of Curves and Ruled Surfaces. Leipzig 1906.

Anschrift des Verfassers: Šmeralova 2, Bratislava (Prírodovedecká fakulta UK).

Výťah

O TRANSFORMÁCII LINEÁRNYCH DIFERENCIÁLNYCH ROVNÍC n-TÉHO RÁDU, II

VALTER ŠEDA, Bratislava

V práci [1] bol zavedený pojem ekvivalencie dvoch lineárnych diferenciálnych rovníc (ďalej rovníc) toho istého rádu n (definícia 1). V tejto práci sa vyšetrujú podmienky, za ktorých sú dve rovnice ekvivalentné. Dokazuje sa, že *dve homogénne rovnice 1-vého rádu sú vždy úplne ekvivalentné* (veta 1), tj. sú ekvivalentné v celých svojich definičných intervaloch (definícia 2). Ďalej je tu dokázaná *nutná a postačujúca podmienka, aby dve rovnice* (1'), (2') *rádu* $n \geqq 2$ *boli navzájom ekvivalentné.* Tá spočíva v tom, aby prvá zložka $\xi(x)$ nositeľa ekvivalencie $\{\xi(x), t(x)\}$ bola spoločným riešením systému nelineárnych diferenciálnych rovníc (11) a $t(x)$ bolo určené vzťahom (8). Súčasne sú uvedené základné vlastnosti riešení rovnice (11) (veta 2).

Pomocou Schlömilchových výsledkov je odvodený *tvar relatívnych invariantov rovnice* ($1_n''$) *vzhľadom na grupu transformácií* (16) (veta 3). Z neho vyplýva, že rovnica ($1_l''$), tzv. *sprievodná rovnica rádu* l, $2 \leqq l \leqq n$, *rovnice* ($1_n''$) (definícia 3) má význam pri transformácii rovnice ($1_n''$), ktorý je uvedený v dôsledku vety 3.

Konečne je definovaná *rovnica lokálne ekvivalentná s rovnicou* (29) ako rovnica (1'), pre ktorú jestvuje riešenie $v(x) \mathrel{\ddagger} 0$ rovnice ($1_2'$) tak, že v každom intervale I_{1x}, v ktorom $v(x) \neq 0$, platí $(1')\, I_{1x} \sim (29)\, I_{2\xi}$ (definícia 5). Táto rovnica je jednoznačne určená svojím koeficientom $p_2(x) = f(x) \in C_{n-2}(I_1)$ (veta 4), je samoadjungovaná (veta 5) a jej transformácia bezprostredne súvisí s transformáciou jej sprievodnej rovnice 2-hého rádu (veta 6).

Резюме

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ n-ОГО ПОРЯДКА II

ВАЛЬТЕР ШЕДА (Valter Šeda), Братислава

В работе [1] было введено понятие эквивалентности двух линейных дифференциальных уравнений (в дальшем только „уравнений") тогоже порядка n (определение 1). В этой работе исследуются условия, при которых два уравнения эквивалентны. Доказано, что *два однородных уравнения 1-ого порядка всегда совершенно эквивалентны* (теорема 1), т. е. они эквивалентны во всех своих интервалах определения (определение 2). Далее доказано *необходимое и доста-*

точное условие, чтобы два уравнения (1′), (2′) *порядка* $n \geqq 2$ *были взаимно эквивалентны*. Это состоит в том, чтобы первая компонента $\xi(x)$ носителя эквивалентности $\{\xi(x), t(x)\}$ была совместным решением системы нелинейных дифференциальных уравнений (11) и $t(x)$ было определено соотношением (8). Одновременно были приведены основные свойства решений уравнения (11) (теорема 2).

С помощью результатов Шлемилха была восстановлена *форма относительных инвариантов уравнения* ($1''_n$) *относительно группы преобразований* (16) (теорема 3). Из этого следует, что уравнение ($1''_l$), так называемое *сопровождающее уравнение порядка* l, $2 \leqq l \leqq n$, уравнения ($1''_n$) (определение 3) имеет важное значение при преобразовании уравнения ($1''_n$), которое показано в следствии теоремы 3.

Наконец определено *уравнение локально эквивалентное с уравнением* (29). Это уравнение (1′), для которого существует решение $v(x) \not\equiv 0$ уравнения ($1'_2$) так, что во всяком интервале I_{1x}, в котором $v(x) \neq 0$, выполнено условие: (1′) $I_{1x} \sim$ $\sim$ (29) $I_{2\xi}$ (определение 5). Это уравнение однозначно определено своим коэффициентом $p_2(x) = f(x) \in C_{n-2}(I_1)$ (теорема 4), самосопряженно (теорема 5) и его преобразование непосредственно находится в связи с преобразованием его сопровождающего уравнения 2-ого порядка (теорема 6).