Časopis pro pěstování matematiky

Jiří Štěpánek

Das Dirichletsche Problem für die Laplace-Gleichung auf dem Gebiet einer Fläche

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 92 (1967), No. 1, 63--69

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117598`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 92 (1967), Praha

DAS DIRICHLETSCHE PROBLEM FÜR DIE LAPLACE-GLEICHUNG AUF DEM GEBIET EINER FLÄCHE

JIŘÍ ŠTĚPÁNEK, Praha

(Eingelangt am 10. Dezember 1966)

In der Arbeit wird die Dirichletsche Aufgabe auf einem allgemeinem Gebiet der Fläche mit dem metrischen Tensor $1, 0, g(r)\, h(\varphi)$ gelöst. Weiter werden einige Zusammenhänge harmonischer Funktionen auf Flächen mit den geodätischen Linien und Minimalflächen gezeigt.[1])

1. DIE LÖSUNG DES DIRICHLETSCHEN PROBLEMES AUF EINEM GEBIET DER FLÄCHE MIT DEM METRISCHEN TENSOR $1, 0, g(r)\, h(\varphi)$

Es sei in einem beschränkten Gebiet s der Fläche $\mathscr{S}$ im E_3 mit dem metrischen Tensor g^{ab} die erste Dirichletsche Aufgabe für die Laplace Gleichung[2])

$$g^{ab}\, \nabla_b \frac{\partial \omega}{\partial \xi^a} = 0 \tag{1}$$

gegeben.

Wenn man auf der Fläche die Krummflächenpolarparameter r, φ mit dem Pol S einführt, bekommt die Gleichung (1) die Form

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{G} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{1}{2G^2} \frac{\partial G}{\partial \varphi} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} = 0\,,$$

wo $1, 0, G(r, \varphi)$ der metrische Tensor der Fläche ist[3]) und die Grenzkurve $\mathscr{C}$ des Gebietes s hat die Gleichung $r = r(\varphi)$ (wir setzen voraus, dass $S \in s$ ist).

---

[1]) Diese Behandlung knüpft an meine Arbeiten: „Poissonsche, Wellen — und Wärmeleitungsgleichung auf Flächen", „Das Dirichletsche Problem für die Laplace-Gleichung auf dem geodätischen Kreis einer Fläche" an. Diese Arbeiten werden im weiterem kurz I, II, bezeichnet.

[2]) Siehe I, II.

[3]) Siehe II, § 2.

Wir lösen unser Problem für Flächen, bei denen $G(r, \varphi) = g(r)\, h(\varphi)$ ($g(r) > 0$, $h(\varphi) > 0$) ist. Auf diesen Flächen kann man isothermische Parameter u, v mit Hilfe der Transformation

$$(2) \qquad u = \int_{r_0}^{r} \frac{1}{\sqrt{[g(\varrho)]}}\, d\varrho\,, \quad v = \int_0^{\varphi} \sqrt{[h(\psi)]}\, d\psi \quad (r_0 > 0)$$

einführen und die Gleichung (1) bekommt dann die kanonische Form $(\partial^2\omega/\partial u^2) + (\partial^2\omega/\partial v^2) = 0$.[3])

Dabei wird vorausgesetzt, dass $u(0) = -\infty$ ist.[4]) Die Lösung dieser Aufgabe (nach II, § 1 ist diese eindeutig und korrekt) $\omega = \omega(u, v)$ und die (stetige) Randfunktion $f = f(v)$ sind in Bezug auf den Parameter v periodisch mit der Periode $v_0 = \int_0^{2\pi} \sqrt{[h(\psi)]}\, d\psi$ und die Grenzkurve $\mathscr{C}$ hat mit Rücksicht auf (2) die Gleichung $u = u(v)$, wo u die Periode v_0 hat. Wir setzen dabei voraus, dass $u(v) < 0$ ist.

Legt man nun $\omega(u, v) = U(u)\, V(v)$, erhält man für U, V die Gleichungen

$$U'' - \lambda U = 0\,, \quad V'' + \lambda V = 0$$

wo λ eine bestimmte nichtnegative Konstante ist. Daher folgt

$$U = c_1 e^{\sqrt{(\lambda)}u} + c_2 e^{-\sqrt{(\lambda)}u}\,, \quad V = d_1 e^{\sqrt{(-\lambda)}v} + d_2 e^{-\sqrt{(-\lambda)}v}$$

Für $\lambda > 0$ ist also

$$V = a \cos \sqrt{(\lambda)}\, v + b \sin \sqrt{(\lambda)}\, v$$

wo $\lambda = 4\pi^2 n^2/v_0^2$ (n natürlich) ist. Für $\lambda = 0$ ist $V'' = 0$, d.h. $V = cv + k$, wo $c = 0$. Für die Funktion U ist dann (in dem Falle $\lambda > 0$)

$$U = c_1 e^{2\pi n u/v_0} + c_2 e^{-2\pi n u/v_0}$$

wo mit Rücksicht auf die Voraussetzung $u(0) = -\infty$, $c_2 = 0$ ist. Für $\lambda = 0$ ist $U'' = 0$, d.h. $U = Cu + K$, wo wieder $C = 0$ ist.

Wir stellen die Reihe

$$(3) \qquad \omega(u, v) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{2\pi n u/v_0} \left(a_n \cos \frac{2\pi n}{v_0} v + b_n \sin \frac{2\pi n}{v_0} v \right)$$

zusammen. Hat die Reihe (3) beschränkte Koeffizienten, dann ist sie für $u < 0$ konvergent. Von der Randbedingung $\omega(u(v), v) = f(v)$ folgt

$$(4) \qquad f(v) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{2\pi n u(v)/v_0} \left(a_n \cos \frac{2\pi n}{v_0} v + b_n \sin \frac{2\pi n}{v_0} v \right)$$

[3]) Siehe I, II, § 4.

[4]) Siehe II, §2

Nachdem (4) nicht eine Entwicklung laut Orthogonalfunktionen ist, bestimmen wir ihre Koeffizienten so, dass wir die Funktionen in (4) in Fourierreihen nach $\cos(2\pi k v/v_0)$, $\sin(2\pi k v/v_0)$ zerlegen:

$$e^{2\pi n u(v)/v_0} \cos\frac{2\pi n}{v_0} v = \frac{A_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^{(n)} \cos\frac{2\pi k}{v_0} v + B_k^{(n)} \sin\frac{2\pi k}{v_0} v\right)$$

$$e^{2\pi n u(v)/v_0} \sin\frac{2\pi n}{v_0} v = \frac{\bar{A}_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\bar{A}_k^{(n)} \cos\frac{2\pi k}{v_0} v + \bar{B}_k^{(n)} \sin\frac{2\pi k}{v_0} v\right)$$

$$A_k^{(n)} = \frac{2}{v_0}\int_0^{v_0} e^{2\pi n u(v)/v_0} \cos\frac{2\pi n}{v_0} v \,.\, \cos\frac{2\pi k}{v_0} v \, dv$$

$$B_k^{(n)} = \frac{2}{v_0}\int_0^{v_0} e^{2\pi n u(v)/v_0} \cos\frac{2\pi n}{v_0} v \,.\, \sin\frac{2\pi k}{v_0} v \, dv$$

$$\bar{A}_k^{(n)} = \frac{2}{v_0}\int_0^{v_0} e^{2\pi n u(v)/v_0} \sin\frac{2\pi n}{v_0} v \,.\, \cos\frac{2\pi k}{v_0} v \, dv$$

$$\bar{B}_k^{(n)} = \frac{2}{v_0}\int_0^{v_0} e^{2\pi n u(v)/v_0} \sin\frac{2\pi n}{v_0} v \,.\, \sin\frac{2\pi k}{v_0} v \, dv$$

Von (4) bekommt man nach einer Berechnung

$$f(v) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \frac{A_0^{(n)}}{2} + b_n \frac{\bar{A}_0^{(n)}}{2}\right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n A_k^{(n)} + b_n \bar{A}_k^{(n)}) \cos\frac{2\pi k}{v_0} v + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n B_k^{(n)} + b_n \bar{B}_k^{(n)}) \sin\frac{2\pi k}{v_0} v$$

Daher folgt für $k = 0$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \frac{A_0^{(n)}}{2} + b_n \frac{\bar{A}_0^{(n)}}{2}\right) = \frac{1}{v_0}\int_0^{v_0} f(v)\, dv$$

und für $k = 1, 2, \ldots$

(5) $$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n A_k^{(n)} + b_n \bar{A}_k^{(n)}) = \frac{2}{v_0}\int_0^{v_0} f(v) \cos\frac{2\pi k}{v_0} v \, dv$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n B_k^{(n)} + b_n \bar{B}_k^{(n)}) = \frac{2}{v_0}\int_0^{v_0} f(v) \sin\frac{2\pi k}{v_0} v \, dv$$

Für a_n, b_n ($n = 1, 2, \ldots$) bekommt man so in (5) ein unendliches System linearer

Gleichungen. Wenn man

$$a_n = x_{2l-1},\ b_n = x_{2l}\ ;\quad A_k^{(n)} = P_{2k-1}^{(2l-1)},\ \bar{A}_k^{(n)} = P_{2k-1}^{(2l)}\ ;\quad B_k^{(n)} = P_{2k}^{(2l-1)},\ \bar{B}_k^{(n)} = B_{2k}^{(2l)}$$

$$\frac{2}{v_0}\int_0^{v_0} f(v) \cos \frac{2\pi k}{v_0} v \, dv = R_{2k-1}\,, \quad \frac{2}{v_0}\int_0^{v_0} f(v) \sin \frac{2\pi k}{v_0} v \, dv = R_{2k}$$

bezeichnet, kann man (5) in der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_k^{(n)} x_n = R_k \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{6}$$

schreiben.

Man kann beweisen: Wenn $|R_k| \leqq K\ (k = 1, 2, \ldots)$, $|P_k^{(n)}| \leqq \varepsilon_n\ (n \neq k)$, $|P_k^{(k)} - 1| \leqq \leqq \varepsilon_k$, $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n = q < 1$, dann hat das System (6) eine Lösung $x_n\ (n = 1, 2, \ldots)$, die man mit Hilfe der sukzessiven Approximationen finden kann.

Nämlich wenn man für $n \neq k : p_k^{(n)} = -P_k^{(n)}$ und für $n = k : p_k^{(k)} = 1 - P_k^{(k)}$ legt, kann man das System (6) in die Form

$$x_k = \sum_{n=1}^{\infty} p_k^{(n)} x_n + R_k$$

überschreiben, wobei

$$\sum_{n=1}^{\infty} |p_k^{(n)}| = |P_k^{(k)} - 1| + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{\infty} |P_k^{(n)}| < \varepsilon_k + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{\infty} \varepsilon_n = q < 1$$

ist. Das bedeutet aber, dass das System total regulär ist. Nachdem $|R_k| \leqq K$ ist, hat das System eine Lösung, die man mit der Methode der sukzessiven Approximationen finden kann.[5])

So wie auch in der Ebene beweisen wir, dass die Reihe (3), deren Koeffizienten dem System (5) genügen, wobei $a_n = O(1/n^2)$, $b_n = O(1/n^2)$ ist, eine Lösung unseren Problemes ist. Die Reihe für ω hat (im Falle $u \leqq 0$) eine konvergente Majorante $\frac{1}{2}|a_0| + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$ und die Reihen für $\partial^2\omega/\partial u^2$, $\partial^2\omega/\partial v^2$ haben (für $u \leqq u_0 < 0$) eine konvergente Majorante $C \sum_{n=1}^{\infty} (4\pi^2 n^2 e^{2\pi n u_0/v}/v_0^2)$. Im weiteren wird dann der Satz 3 von I, § 1 benützt.[6])

Bemerkung. Für die Ebene (wo $g(r) = r^2$, $h(\varphi) = 1$ ist) ist die Transformation (2) (zwischen den isothermischen und Polarparametern) $u = \log (r/r_0)$, $v = \varphi$. Es ist also $v_0 = 2\pi$ und die Reihe (3) hat in den Polarparametern die Form

$$\omega(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)$$

---

[5]) Siehe [4] (Literaturverzeichnis siehe in I).

[6]) Vgl. [1].

Von der Randbedingung folgt

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r(\varphi)}{r_0}\right)^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)$$

2. HARMONISCHE FUNKTIONEN AUF EINER FLÄCHE, GEODÄTISCHE LINIEN UND MINIMALFLÄCHEN

Die Differentialgleichung der geodätischen Kurven $\omega(\xi^a) = \text{konst.}$ auf einer Fläche im E_3 hat die Form

$$g^{ab} \nabla_b \frac{\dfrac{\partial \omega}{\partial \xi^a}}{\sqrt{\left(g^{ab} \dfrac{\partial \omega}{\partial \xi^a} \dfrac{\partial \omega}{\partial \xi^b}\right)}} = 0 \tag{1}$$

wo g^{ab} der metrische Tensor der Fläche ist.[7])

Die Gleichung (1) kann man in der Form

$$g^{ab} \nabla_b \frac{\partial \omega}{\partial \xi^a} + \sqrt{\left(g^{ab} \frac{\partial \omega}{\partial \xi^a} \frac{\partial \omega}{\partial \xi^a}\right)} g^{ab} \frac{\partial \omega}{\partial \xi^a} \frac{\partial}{\partial \xi^b} \frac{1}{\sqrt{\left(g^{ab} \dfrac{\partial \omega}{\partial \xi^a} \dfrac{\partial \omega}{\partial \xi^b}\right)}} = 0 \tag{2}$$

schreiben. Nachdem man die Laplace Gleichung auf der Fläche $g^{ab}\nabla_b(\partial\omega/\partial\xi^a) = 0$ für die Gleichung für die Equiskalarkurven $\omega(\xi^a) = \text{konst.}$ der harmonischen Funktion auf der Fläche halten kann, folgt von (2) der

Satz 1. *Die Equiskalarkurven der harmonischen Funktion auf der Fläche sind gerade dann zugleich ihre geodätischen Kurven, wenn*

$$g^{ab} \frac{\partial \omega}{\partial \xi^a} \frac{\partial}{\partial \xi^b} \frac{1}{\sqrt{\left(g^{ab} \dfrac{\partial \omega}{\partial \xi^a} \dfrac{\partial \omega}{\partial \xi^b}\right)}} = 0 \tag{3}$$

gilt.

Die Gleichung (3) ist erfüllt, wenn

$$g^{ab} \frac{\partial \omega}{\partial \xi^a} \frac{\partial \omega}{\partial \xi^b} = \text{konst.} \quad (\neq 0) \tag{4}$$

ist. Dieses ist aber die Gleichung der geodätischen Parallellinien der Fläche. Wir bekommen so den

Satz 2. *Sind die Equiskalarkurven der harmonischen Funktion auf der Fläche zugleich auch ihre geodätischen Parallellinien, dann sind es die geodätischen Kurven der Fläche.*

---

[7]) Siehe [3].

Bemerkung 1. Wenn man $\dfrac{1}{\sqrt{\left(g^{ab}\dfrac{\partial\omega}{\partial\xi^a}\dfrac{\partial\omega}{\partial\xi^b}\right)}} = f$

bezeichnet, dann hat die Gleichung (3) die Form $g^{ab}(\partial\omega/\partial\xi^a)(\partial f/\partial\xi^b) = 0$. Es ist also grad ω zu grad f senkrecht, d.h. die Kurven $\omega =$ konst. sind zu den Kurven $f =$ = konst. senkrecht oder auch zu den Kurven (4). Daher folgt das bekannte Ergebniss: Die Equiskalarkurven der harmonischen Funktion auf der Fläche sind genau dann auch ihre geodätischen Kurven, wenn sie zu den geodätischen Parallellinien senkrecht sind.[8])

Die Differentialgleichung der Minimalfläche $z = z(x, y)$, $[x, y] \in o$ ist

$$r(1 + q^2) - 2spq + t(1 + p^2) = 0 \tag{5}$$

($p = z_x$, $q = z_y$, $r = z_{xx}$, $s = z_{xy}$, $t = z_{yy}$). Die Gleichung (5) ist der Gleichung $H = 0$ equivalent, wo H die mittlere Krümmung der Fläche ist.

Die Minimalflächen sind in engem Zusammenhang mit harmonischen Funktionen auf Flächen. Es gilt

Satz 3. *Die Fläche $\mathcal{S}$: $z = z(x, y)$ ist gerade dann minimal, wenn die Funktion z harmonisch auf $\mathcal{S}$ ist.*

Beweis. Die Laplace Gleichung auf der Fläche $\mathcal{S}$ hat die Form[9])

$$\frac{1 + q^2}{1 + p^2 + q^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} - 2\frac{pq}{1 + p^2 + q^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y} + \frac{1 + p^2}{1 + p^2 + q^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} -$$
$$- \left[\frac{1 + q^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}r - 2\frac{pq}{(1 + p^2 + q^2)^2}s + \frac{1 + p^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}t\right]p\frac{\partial\omega}{\partial x} -$$
$$- \left[\frac{1 + q^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}r - 2\frac{pq}{(1 + p^2 + q^2)^2}s + \frac{1 + p^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}t\right]q\frac{\partial\omega}{\partial y} = 0$$

Legen wir da $\omega = z$, so bekommen wir

$$r(1 + q^2)(1 + p^2 + q^2) - 2pqs(1 + p^2 + q^2) + t(1 + p^2)(1 + p^2 + q^2) -$$
$$- [(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t]p^2 - [(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t]q^2 = 0$$

oder
$$r(1 + q^2) - 2spq + t(1 + p^2) = 0$$

d.h. die Gleichung (5).

Bemerkung 2. Für die Ebene (als einen Spezialfall einer Minimalfläche) ist der Satz evident.

Anschrift des Verfassers: Praha 1, Malostranské nám. 25 (Matematicko-fyzikální fakulta KU).

[8]) Siehe [3].
[9]) Siehe I, § 1.

Výtah

DIRICHLETŮV PROBLÉM PRO LAPLACEOVU ROVNICI NA OBLASTI PLOCHY

JIŘÍ ŠTĚPÁNEK, Praha

V článku je řešena Dirichletova úloha na obecné oblasti plochy s metrickým tensorem 1, 0, $g(r)\,h(\varphi)$. Řešení je za pomoci tzv. isotermických parametrů u, v vyjádřeno řadou

$$\omega(u, v) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{2\pi n u/v_0} \left(a_n \cos \frac{2\pi n}{v_0} v + b_n \sin \frac{2\pi n}{v_0} v \right)$$

jejíž koeficienty vyhovují jistému nekonečnému systému lineárních rovnic. Za dodatečných podmínek má systém řešení, jež lze nalézt metodou postupných aproximací.

Dále jsou uvedeny některé souvislosti harmonických funkcí na plochách s geodetickými čarami a minimálními plochami.

Резюме

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА НА ОБЛАСТИ ПОВЕРХНОСТИ

ЙИРЖИ ШТЕПАНЕК (Jiří Štěpánek), Прага

В статье решается задача Дирицхле на общей области поверхности с метрическим тензором 1, 0, $g(r)\,h(\varphi)$. Решение выражено при помощи т. наз. изотермических параметров u, v в виде ряда

$$\omega(u, v) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{2\pi n u/v_0} \left(a_n \cos \frac{2\pi n}{v_0} v + b_n \sin \frac{2\pi n}{v_0} v \right)$$

коэффициенты которого удовлетворяют определенной бесконечной системе линейных уравнений. При добавочных условиях имеет система решение, которое можно получить методом последовательных приближений.

Далее указаны некоторые связи гармонических функций на поверхностях с геодезическими линиями и минимальными поверхностями.