Pavel Bartoš

O jednej metóde určenia polomeru gule vpísanej a gulí pripísaných simplexu v E_n a niektoré aplikácie

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 92 (1967), No. 1, 8--15

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117593`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 92 (1967), Praha

O JEDNEJ METÓDE URČENIA POLOMERU GULE VPÍSANEJ A GULÍ PRIPÍSANÝCH SIMPLEXU V E_n A NIEKTORÉ APLIKÁCIE

PAVEL BARTOŠ, Bratislava

(Došlo dňa 25. júna 1965)

Venované pamiatke RUDOLFA ZELINKU

Označiac $\boldsymbol{a}_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,n})$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ môžeme rovnice polpriestorov, ktorých prenikom je simplex v E_n, písať v tvare

(1) $$l_i = \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{x} + b_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n + 1\,.$$

Tu l_i sú nezáporné parametre, ktoré podľa (5) a (6) v práci [2] spĺňajú vzťah[1])

(2) $$\sum_{i=1}^{n+1} B_i l_i = \Delta$$

kde $B_i \neq 0$ sú doplnky prvkov b_i v determinante

(3) $$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots, & a_{1,n}, & b_1 \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots, & a_{2,n}, & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n+1,1}, & a_{n+1,2}, & \ldots, & a_{n+1,n}, & b_{n+1} \end{vmatrix} \neq 0$$

Parametre $l_i \geqq 0$ súvisia so vzdialenosťami v_i bodu x od rovín $l_i = 0$ vzťahom

$$v_i = \frac{|\boldsymbol{a}_i \boldsymbol{x} + b_i|}{|\boldsymbol{a}_i|} = \frac{l_i}{|\boldsymbol{a}_i|}$$

takže

(4) $$l_i = v_i |\boldsymbol{a}_i|$$

---

[1]) Ak v (1) neboli vybraté práve tie polpriestory, ktorých prenikom je simplex, takže niektoré parametre l_i sú nekladné, platí vzťah (2) vo forme

$$\sum_{i=1}^{n+1} |B_i|\, l_i = |\Delta|$$

Na to treba pamätať i pri niektorých ďalších vzťahoch.

Pre stred S $(n-1)$-gule simplexu vpísanej je

$$v_i = \varrho\,, \quad i = 1, 2, \dots, \quad n + 1$$

a ϱ je polomer tejto gule. Podľa (2) je potom

$$\varrho = \frac{\Delta}{\sum_{i=1}^{n+1} |\boldsymbol{a}_i| \, B_i}\,. \tag{5}$$

Súradnice jej stredu $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ dostaneme riešením sústavy lineárnych rovníc

$$\boldsymbol{a}_i \boldsymbol{s} + b_i = \varrho |\boldsymbol{a}_i|\,, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

resp. dosadením $l_i = \varrho |\boldsymbol{a}_i|$ do hotového parametrického vyjadrenia bodov simplexu podľa práce [2].

Polomer a stred gule simplexu zvonku k stene, ležiacej v nadrovine $l_j = 0$ pripísanej[2]) dostaneme rovnakým spôsobom, ak v použitých vzťahoch miesto l_j píšeme $-l_j$, a teda jej polomer je

$$\varrho_j = \frac{\Delta}{\sum_{i=1}^{n+1} |\boldsymbol{a}_i| \, B_i - 2|\boldsymbol{a}_j| \, B_j} \tag{6}$$

súradnice jej stredu $s_j = (s_{j,1}, s_{j,2}, \dots, s_{j,n})$ sú korene sústavy lineárnych rovníc

$$\boldsymbol{a}_i \boldsymbol{s}_j + b_i = \varrho_j |\boldsymbol{a}_i|\,, \quad i = 1, 2, \dots, \quad n + 1\,, \quad i \neq j$$

alebo sa dostanú z parametrického vyjadrenia bodov simplexu podľa [2], ak v ňom píšeme $l_i = \varrho_j |\boldsymbol{a}_i|$, keď $i \neq j$ a $l_j = -\varrho_j |\boldsymbol{a}_i|$.

Polomery $\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_{n+1}$ súvisia spolu podľa (5) a (6) vzťahom

$$\frac{n-1}{\varrho} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\varrho_i}\,. \tag{7}$$

V práci [1] pojednáva Miroslav Fiedler náročným matematickým aparátom o rozsiahlom súbore problémov, týkajúcich sa simplexu v E_n. Stred simplexu vpísanej gule sa tu javí ako jeden prvok množiny význačných bodov simplexu. Pre jej polomer odvodil autor vzťah (7,4)

$$\varrho = \frac{\sqrt{(\frac{1}{2}|\Delta'|)}}{\sum_{i=1}^{n+1} \sqrt{|g_{ii}|}}\,. \tag{8}$$

---

[2]) O ostatných zvonku pripísaných guliach, z ktorých každá je zvonku pripísaná k viacerým stenám simplexu, neuvažujeme. Vzťahy pre ne by sme dostali obdobne zmenou znamienok viacerých parametrov l_i.

Tu $\Delta' = |e_{rs}|$; $r, s = 0, 1, 2, \ldots, n+1$ pričom $e_{00} = 0$, $e_{r0} = e_{0p} = 1$ a keď $rs \neq 0$ je $e_{rs} = O_rO_s^2$ (štvorec vzdialenosti vrcholov O_r a O_s simplexu, teda $e_{rs} = 0$, keď $r = s$ a keď $r \neq s$, je e_{sr} štvorec hrany simplexu spojujúcej jeho vrcholy O_r a O_s). Ďalej značí g_{rs} doplnok prvku e_{rs} v determinante Δ'.

Vzájomný vzťah (5) a (8) a príčina ich formálnej odlišnosti vysvitne, ak určíme n-dimenzionálny obsah V simplexu a $(n-1)$-dimenzionálny obsah V_i jeho steny, ležiacej v rovine $l_i = 0$. Podľa (3,11) v [1] je

$$V^2 = \frac{(-1)^{n+1}\Delta'}{2^n(n!)^2} \tag{9}$$

a

$$V_i^2 = \frac{(-1)^n g_{ii}}{2^{n-1}[(n-1)!]^2}, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1. \tag{10}$$

Z (9) a (10) vyplýva

$$\frac{nV}{\sum_{i=1}^{n+1} V_i} = \frac{\sqrt{(\frac{1}{2}|\Delta'|)}}{\sum_{i=1}^{n+1}\sqrt{|g_{ii}|}} = \varrho \tag{11}$$

čo je zovšeobecnenie známeho vzťahu v E_2 a E_3. Obdobne

$$\frac{nV}{\sum_{i=1}^{n+1} V_i - 2V_j} = \varrho_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Obsah simplexu môžeme počítat aj ako absolútnu hodnotu výrazu (pozri [3] strana 102)

$$\pm V = \frac{1}{n!}\begin{vmatrix} x_1^{(1)}, & x_2^{(1)}, & \ldots, x_n^{(1)}, & 1 \\ x_1^{(2)}, & x_2^{(2)}, & \ldots, x_n^{(2)}, & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n+1)}, & x_2^{(n+1)}, & \ldots, x_n^{(n+1)}, & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{n!}\begin{vmatrix} \frac{A_{1,1}}{B_1}, & \frac{A_{1,2}}{B_1}, & \ldots, \frac{A_{1,n}}{B_1}, & 1 \\ \frac{A_{2,1}}{B_2}, & \frac{A_{2,2}}{B_2}, & \ldots, \frac{A_{2,n}}{B_2}, & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{A_{n+1,1}}{B_{n+1}}, & \frac{A_{n+1,2}}{B_{n+1}}, & \ldots, \frac{A_{n+1,n}}{B_{n+1}}, & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{n!\, B_1 B_2 \ldots B_{n+1}} \begin{vmatrix} A_{1,1}, & A_{1,2}, & \ldots, A_{1,n}, & B_1 \\ A_{2,1}, & A_{2,2}, & \ldots, A_{2,n}, & B_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n+1,1}, & A_{n+1,2}, & \ldots, A_{n+1,n}, & B_{n+1} \end{vmatrix}$$

kde $x^{(j)} = (x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots, n+1$ sú vrcholy simplexu, $A_{i,k}$ doplnky prvkov $a_{i,k}$, B_i doplnok prvku b_i v determinante Δ. Podľa vety o determinante doplnkov je teda

$$(12) \qquad V = \left| \frac{\Delta^n}{n!\, B_1 B_2 \ldots B_{n+1}} \right|$$

Na určenie $(n - 1)$-dimenzionálneho obsahu V_j stien simplexu použijeme vzťah

$$V = \frac{V_j h_j}{n}, \quad j = 1, 2, \ldots, n + 1$$

kde h_j je výška simplexu príslušná k podstave v rovine $l_j = 0$. V ďalšom budeme predpokladať, že rovnice oporných rovín $l_j = 0$ máme v normovanom tvare, takže $|\boldsymbol{a}_j| = 1$, a teda

$$h_j = |\boldsymbol{a}_j \boldsymbol{x}^{(j)} + b_j| = \left| \boldsymbol{a}_j \boldsymbol{A}_j \frac{1}{B_j} + b_j \right| = \left| \frac{\Delta}{B_j} \right|$$

takže

$$(13) \qquad V_j = \frac{nV}{h_j} = \frac{n|\Delta|^n}{n!\, |B_1 B_2 \ldots B_{n+1}|} : \frac{|\Delta|}{|B_j|} = \frac{1}{(n-1)!} \left| \frac{B_j \Delta}{B_1 B_2 \ldots B_{n+1}} \right|.$$

Zo vzťahov (12) a (13) máme

$$\varrho = \frac{nV}{\sum_{i=1}^{n+1} V_i} = \frac{|\Delta|}{\sum_{i=1}^{n+1} |B_i|}$$

čo je vzorec (5) pre normované rovnice oporných rovín, a obdobne

$$\varrho_j = \frac{nV}{\sum_{i=1}^{n+1} V_i - 2V_j} = \frac{|\Delta|}{\sum_{i=1}^{n+1} |B_i| - 2|B_j|}, \quad j = 1, 2, \ldots, n + 1 .\,^{3})$$

Tým sme ukázali na vzájomnú súvislosť vzťahov (5) a (8) a naznačili, ako sa jeden z druhého odvodí. Zároveň je daná možnost vyjadriť Δ' a g_{ii} pomocou koeficientov rovníc oporných rovín simplexu.

Naše úvahy sú úzko zamerané na určenie polomeru vpísanej gule; ak chceme pomocou ich výsledkov určiť iné veličiny simplexu, sme nútení použiť vzťahy týchto veličín k polomeru vpísanej gule z iných teórií, napr. zo syntetickej geometrie. Ukážeme to na príklade z analytickej geometrie v E_2.

Píšme rovnice polrovín, ktorých prenikom trojuholník je, v normovanej forme

$$a_i x + b_i y + c_i = l_i, \quad a_i^2 + b_i^2 = 1, \quad l_i \geqq 0, \quad i = 1, 2, 3$$

[3]) Ak je zaručené, že v rovniciach polpriestorov (1) sú všetky parametre l_i nezáporné, možno vo výrazoch pre ϱ a ϱ_j vynechať znaky absolútnej hodnoty podľa (6) v práci [2].

a označme A_i, B_i, C_i po rade doplnky prvkov a_i, b_i, c_i v determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

pričom $C_1C_2C_3 \neq 0$. Podľa (5) a (6) je

$$\varrho = \frac{\Delta}{C_1 + C_2 + C_3}, \quad \varrho_1 = \frac{\Delta}{-C_1 + C_2 + C_3}, \tag{14}$$

$$\varrho_2 = \frac{\Delta}{C_1 - C_2 + C_3}, \quad \varrho_3 = \frac{\Delta}{C_1 + C_2 - C_3}.$$

Pre obsah trojuholníka máme podľa (12)[4])

$$P = \frac{\Delta^2}{2|C_1C_2C_3|} \tag{15}$$

a pre dĺžky d_1, d_2, d_3 jeho strán podľa (13)

$$d_i = \left|\frac{C_i\Delta}{C_1C_2C_3}\right|, \quad i = 1, 2, 3. \tag{16}$$

Polomer r kružnice trojuholníku opísanej určíme pomocou planimetrického vzorca $r = d_1d_2d_3/4P$ a dostaneme

$$r = \left|\frac{\Delta}{2C_1C_2C_3}\right| \tag{17}$$

a potom pre vnútorné uhly α_1, α_2, α_3 trojuholníka

$$\sin\alpha_1 = \frac{d_i}{2r} = |C_i|, \quad i = 1, 2, 3. \tag{18}$$

Zo vzťahov (14), (15) a (17) vyplýva

$$P = r|\Delta|, \quad v\varrho = \frac{P}{|C_1 + C_2 + C_3|}, \quad r = \frac{d_1 + d_2 + d_3}{2|C_1 + C_2 + C_3|} \tag{19}$$

---

[4]) Tu nemôžeme vynechať znak absolútnej hodnoty, hoci je $l_i \geqq 0$, $i = 1, 2, 3$, lebo je zaručené len, že sign C_i = sign $\Delta \neq 0$, $i = 1, 2, 3$.

a zo vzťahov (15) a (16) pre výšky trojuholníka

$$v_i = \frac{\Delta}{C_i}, \quad i = 1, 2, 3 \tag{20}$$

atď.

Rozmanitosť vzťahov v E_n by sa, pravdaže, zväčšila, nebudeme sa tým zaoberať. Nakoniec ukážeme na jednom príklade praktickú aplikabilitu výsledkov.

Príklad. Dané sú rovnice oporných priamok trojuholníka

$$x = 0\,, \quad 4x + 3y - 12 = 0\,, \quad 12x + 5y - 60 = 0\,. \tag{1}$$

Použite výsledkov tejto práce na výpočet rôznych veličín tohoto trojuholníka.

Riešenie. Spôsobom opísaným v práci (2) nájdeme, že uvažovaný trojuholník je prenikom polrovín

$$x = l_1\,, \quad \tfrac{1}{5}(4x + 3y - 12) = l_2\,, \quad \tfrac{1}{13}(-12x - 5y + 60) = l_3\,. \tag{2}$$

Pritom sme použili normovaného tvaru rovníc oporných priamok. Z rovníc (2) určíme parametrické vyjadrenie bodov trojuholníka

$$x = l_1\,, \quad y = \tfrac{1}{3}(-4l_1 + 5l_2 + 12) \tag{3}$$

a nezáporné parametre l_1, l_2, l_3 spĺňajú rovnicu

$$16l_1 + 25l_2 + 39l_3 = 120\,. \tag{4}$$

Súradnice vrcholov dostaneme, keď dva z parametrov majú nulovú hodnotu. Pri $l_2 = l_3 = 0$ je podľa (4) $l_1 = \frac{15}{2}$ a tak $O_1 = (\frac{15}{2}, -6)$. Obdobne dostaneme $O_2 = (0, 12)$, $O_3 = (0, 4)$.

Podľa (4) je

$$\varrho = \frac{120}{16 + 25 + 39} = \frac{3}{2}, \quad \varrho_1 = \frac{120}{-16 + 25 + 39} = \frac{5}{2}$$

a obdobne $\varrho_2 = 4$, $\varrho_3 = 60$.

Hodnoty Δ a C_i určíme teraz vhodne takto:

V determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0 \\ \frac{4}{5}, & \frac{3}{5}, & -\frac{12}{5} \\ -\frac{12}{13}, & -\frac{5}{13}, & \frac{60}{13} \end{vmatrix}$$

určíme jeden minor, napr.

$$C_3 = \begin{vmatrix} 1, & 0 \\ \frac{4}{5}, & \frac{3}{5} \end{vmatrix} = \frac{3}{5}.$$

Kedže je kladný, sú aj Δ a C_1, C_2 kladné. Podľa (4) je $\Delta/C_3 = \frac{120}{39}$, odkiaľ $\Delta = \frac{24}{13}$; ďalej $C_1/\Delta = \frac{16}{120}$, odkiaľ $C_1 = \frac{16}{65}$ a obdobne $C_2 = \frac{5}{13}$. Máme teda

$$(5) \qquad \Delta = \frac{24}{13}, \quad C_1 = \frac{16}{65}, \quad C_2 = \frac{5}{13}, \quad C_3 = \frac{3}{5}.$$

Súradnice stredu vpísanej kružnice a stredov pripísaných kružníc určíme z parametrického vyjadrenia (3) a (4). Dostaneme

$$S = \left(\varrho, \frac{-4\varrho + 5\varrho + 12}{3}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right); \quad S_1 = \left(-\varrho_1, \frac{4\varrho_1 + 5\varrho_1 + 12}{3}\right) = \left(-\frac{5}{2}, \frac{23}{2}\right);$$

$$S_2 = \left(\varrho_2, \frac{-4\varrho_2 - 5\varrho_2 + 12}{3}\right) = (4, -8); \quad S_3 = \left(\varrho_3, \frac{-4\varrho_3 + 5\varrho_3 + 12}{3}\right) = (60, 24).$$

Obsah počítame zo vzťahu $P = |\Delta^2/2C_1C_2C_3|$, teda $P = 30$ a potom $r = P/|\Delta| = 30 : \frac{24}{13} = \frac{65}{4}$. Veľkosť strán dostaneme zo vzťahov $d_i = |C_i\Delta/C_1C_2C_3|$, teda $d_1 = 8$, $d_2 = \frac{25}{2}$, $d_3 = \frac{39}{2}$.

Pre veľkosti vnútorných uhlov platí $\sin \alpha_i = |C_i|$, takže $\sin \alpha_1 = \frac{16}{65}$, $\sin \alpha_2 = \frac{5}{13}$, $\sin \alpha_3 = \frac{3}{5}$. Príslušné ostré uhly sú $\alpha'_1 = 14°15'0''$, $\alpha'_2 = 22°37'12''$, $\alpha'_3 = 36°52'11''$. Kedže $\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3 < 180°$, je trojuholník tupouhlý a α_3 je tupý uhol. Preto $\alpha_1 = 14°15'0''$, $\alpha_2 \doteq 22°37'12''$, $\alpha_3 \doteq 143°07'49''$.

Jestvujú rozmanité iné možnosti kombinovania výpočtov.

Literatúra

[1] *M. Fiedler:* Geometrie simplexu v E_n, Časopis pro pěstování matematiky, roč. *79*, str. 297 až 320, ročník *80*, str. 462—476 a ročník *81*, str. 182—223.

[2] *P. Bartoš:* Poznámka o určení simplexu rovinami a o parametrickom vyjadrení súradníc jeho bodov. Tamže, ročník *90*, str. 366—368.

[3] *K. Borsuk:* Geometria analityczna w *n* wymiarach, Monografie matematyczne, Tom XII, Warszawa, 1950.

Adresa autora: Bratislava, Sibírska 9.

Резюме

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАДИУСА ВПИСАННОГО ШАРА И ПРИПИСАННЫХ ШАРОВ СИМПЛЕКСА В E_n И НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ

ПАВЕЛ БАРТОШ (Pavel Bartoš), Братислава

В этой работе на основе параметрического выражения точек симплекса в E_n выводятся соотношения для величины радиуса вписанного щара и приписанных шаров симплекса, уравнения опорных плоскостей которого данны.

Zusammenfassung

ÜBER EINE METHODE DER BESTIMMUNG VON DEM RADIUS DER EINGESCHRIEBENEN UND ZUGESCHRIEBENEN KUGELN EINES SIMPLEXES IM E_n UND EINIGE ANWENDUNGEN

PAVEL BARTOŠ, Bratislava

In der Arbeit werden mit Hilfe der parametrischen Ausdrücke für die Punkte des Simplexes im E_n Beziehungen für die Größe der Radiuse der ein- und zugeschriebenen Kugeln des Simplexes, wobei die Gleichungen dessen Stützebenen bekannt sind, hergeleitet.