Časopis pro pěstování matematiky

Jiří Kopáček; Marie Kopáčková

Задача Коши для слабо гиперболических систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 91 (1966), No. 4, 431--452

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117584

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1966

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 91 (1966), Praha

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СЛАБО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

ИРЖИ КОПАЧЕК и МАРИЕ СУХА (Jiří Kopáček a Marie Suchá), Прага

(Поступило в редакцию 9/XI 1965 г.)

Введение. В работе рассматривается задача Коши для систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} A^k \frac{\partial u}{\partial x_k} + Bu = f\,,$$

причем предполагается лищь действительность всех корней характеристического полинома $\det(\lambda E + \sum_{k=1}^{n} A^k \xi_k)$. Но с другой стороны приходится налагать ограничения на матрицу B. Из работы [4] ясно, что какое-нибудь ограничение необходимо, но наше к сожалению довольно ограничительно. Г. Пейзер в [1] рассмотрел случай одного уравнения высшего порядка, Ю. Охия [5] и Ж. Лэре и Ю. Охия [6] изучали разрешимость задачи Коши для гиперболических уравнений и систем с кратными характеристиками в классах Жеврея. В данной работе, так-же как и в работе [1], используются пространства Соболева W_2^k. Существование гладкого решения доказываем методом конечных разностей, в остальном применяем метод энергетических неравенств.

1. Обозначения и определения. Пусть T фиксированное число, $T > 0$, $0 \leqq t \leqq T$ и $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ целые неотрицательные числа. Обозначим

$$V_t = \{[\tau, x] \in E_{n+1};\ 0 \leqq \tau \leqq t,\ x \in E_n\}\ ; \quad S_t = \{[t, x] \in E_{n+1};\ x \in E_n\}\ ;$$

$$\alpha = [\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n]\ ; \quad |\alpha| = \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$$

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n}}{\partial t^{\alpha_0}\, \partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}\ ; \quad D_0 = \frac{\partial}{\partial t}\,, \quad D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Через D обозначим множество всех бесконечно дифференцируемых векторных функций $u = [u_1, u_2, \ldots, u_m]$ с ограниченным носителем в V_T. Для неотрицательного целого числа k пусть $W_2^k(V_T)$ или просто W_2^k есть гильбертово пространство векторных функций из $L_2(V_T)$, обладающих обобщенными суммируемыми с квадратом по V_T производными до порядка k включительно. Полагаем $W_2^0(V_T) = L_2(V_T)$. В пространствах W_2^k скалярное произведение определяется как обычно по формуле

$$(1) \qquad (u, v)_{W_2^k} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{V_T} D^\alpha u_i(t, x) \overline{D^\alpha v_i(t, x)} \, dt \, dx ,$$

где $u = [u_1, u_2, \ldots, u_m]$, $v = [v_1, v_2, \ldots, v_m]$. Обозначим еще через W_2^{-k} линейное нормированное пространство всех линейных ограниченных функционалов над W_2^k с нормой

$$(2) \qquad \|f\|_{W_2^{-k}} = \sup_{v \in W_2^k} \frac{(f, v)}{\|v\|_{W_2^k}} ,$$

где (f, v) значение функционала $f \in W_2^{-k}$ на функции $v \in W_2^k$. Пространство W_2^{-k} полное и если множество D вложить в W_2^{-k} по формуле $(f, v) = \int_{V_T} \sum_{i=1}^{m} f_i v_i \, dx \, dt$, $f \in D$, $v \in W_2^k$, то D будет плотным в W_2^{-k}. Пусть L линейный дифференциальный оператор вида

$$(3) \qquad L = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial}{\partial x_i} + B$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_n$, B постоянные матрицы типа (m, m). Для вещественных чисел λ, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ обозначим

$$a(\lambda, \xi) = \det (\lambda E + \sum_{i=1}^{n} A_i \xi_i) ;$$

$$H_m(\lambda, \xi) = a(\lambda, \xi) ; \quad H_{m-k}(\lambda, \xi) = \frac{\partial}{\partial \lambda} H_{m-k+1}(\lambda, \xi) , \quad \text{где} \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Пусть $\lambda_1^{m-i+1}, \lambda_2^{m-i+1}, \ldots, \lambda_{m-i+1}^{m-i+1}$ корни многочлена $H_{m-i+1}(\lambda, \xi)$, т.е.

$$(4) \qquad H_{m-i+1}(\lambda, \xi) = m(m-1)\ldots(m-i+2) \prod_{j=1}^{m-i+1} (\lambda - \lambda_j^{m-i+1}(\xi)) ,$$

$$i = 1, 2, \ldots, m .$$

Если ввести обозначение

$$P_k^{m-i}(\lambda, \xi) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{m-i+1} (\lambda - \lambda_j^{m-i+1}(\xi)) , \quad k = 1, 2, \ldots, m - i + 1 ,$$

то будут иметь место равенства

$$(4') \qquad H_{m-i}(\lambda, \xi) = m(m-1)\dots(m-i+1)\prod_{j=1}^{m-i}(\lambda - \lambda_j^{m-i}(\xi)) =$$

$$= m(m-1)\dots(m-i+2)\sum_{k=1}^{m-i+1} P_k^{m-i}(\lambda, \xi)$$

$$H_0(\lambda, \xi) = m!$$

Если $r_{kj}(\lambda, \xi)$ алгебраическое дополнение элемента $m_{kj}(\lambda, \xi)$ матрицы $\lambda E + \sum_{i=1}^{n} A_i\xi_i$, $M(\lambda, \xi) = \{r_{kj}(\lambda, \xi)\}_{k,j=1}^{m}$ квадратная матрица порядка m, то будем иметь

$$(5) \qquad M(\lambda, \xi)\,(\lambda E + \sum_{i=1}^{n} A_i\xi_i) = a(\lambda, \xi)\,E$$

Пусть наконец

$$\tilde{B}(\lambda, \xi) = M(\lambda, \xi)\,B\,.$$

Элементами матрицы $\tilde{B}(\lambda, \xi)$ являются многочлены степени $m-1$ переменных λ, ξ (или нули)

$$(6) \qquad \tilde{b}_{ik}(\lambda, \xi) = \sum_{j=1}^{m} r_{ij}(\lambda, \xi)\, b_{jk}\,, \quad i, k = 1, 2, \dots, m\,.$$

Предположим, что оператор L вида (3) гиперболический в следующем смысле:

а) уравнение

$$(7) \qquad a(\lambda, \xi) = 0$$

имеет относительно λ только вещественные корни для всех вещественных векторов ξ, $\xi \neq 0$.

б) существуют функции $\gamma_k^{i,j}(\xi)$, $i, j, k = 1, 2, \dots, m$ такие, что

$$(8) \qquad \tilde{b}_{i,j}(\lambda, \xi) = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k^{i,j}(\xi)\, P_k^{m-1}(\lambda, \xi)$$

в) $\gamma_k^{i,j}(\xi)$, $i, j, k = 1, 2, \dots, m$ ограничены для всех вещественных векторов ξ $\xi \neq 0$.

Отсюда видно, что мы допускаем операторы, для которых корни уравнения (7) могут быть кратными и кратность может меняться при изменении ξ. С другой стороны мы должны наложить ограничение на матрицу B. Корни многочлена H_{m-i} разделяют корни многочмена H_{m-i+1} в следующем смысле: если писать каждый корень столько раз, какова его кратность, то

$$\lambda_j^{m-i+1} < \lambda_j^{m-i} < \lambda_{j+1}^{m-i+1}\,, \quad \text{если} \quad \lambda_j^{m-i+1} < \lambda_{j+1}^{m-i+1}\,,$$

$$\lambda_j^{m-i+1} = \lambda_j^{m-i}\,, \qquad \text{если} \quad \lambda_j^{m-i+1} = \lambda_{j+1}^{m-i+1}\,,$$

где корни $\lambda_j^{m-i}, \lambda_k^{m-i+1}$ $(j = 1, 2, \ldots, m - i;\ \ k = 1, 2, \ldots, m - i + 1)$ пишем в неубывающей последовательности.

Коэффициенты H_{m-i+1} $(i = 1, 2, \ldots, m)$ как многочлены относительно λ ограничены на множестве $\{\xi; |\xi| = 1\}$, следовательно, корни λ_j^{m-i+1} $(j = 1, 2, \ldots, m - i + 1)$ также ограничены на этом множестве. Для вещественных векторов ξ, $\xi \neq 0$ и произвольных комплексных чисел s имеем

$$\lambda_k^{m-i+1}(s\xi) = s\lambda_k^{m-i+1}(\xi) \tag{9}$$

для $k = 1, 2, \ldots, m - i + 1$; $i = 1, 2, \ldots, m$.

2. Энергетическое неравенство. Целью этого параграфа является получение энергетического неравенства для гиперболического оператора L, удовлетворяющего условиям а, б, в п. 1. Неравенства будем доказывать для вещественных векторных функций $u = [u_1, u_2, \ldots, u_m]$, $u \in D$, $u_i(0, x) = 0$, $x \in E_n$; $i = 1, 2, \ldots, m$. Через C будем обозначать постоянные, независящие на u. Применяя линейный оператор $L_1 = M(D)$, $D = [\partial/\partial t, \partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n]$ к векторной функции Lu, получим в силу (5) и (6)

$$L_1(Lu) = a(D)\, Eu + \tilde{B}(D)\, u\,, \tag{10}$$

где $M(D)$, $\tilde{B}(D)$ – линейные матричные операторы порядка $m - 1$, $a(D)$ линейный оператор порядка m, получающиеся из $M(\lambda, \xi)$, $\tilde{B}(\lambda, \xi)$ и $a(\lambda, \xi)$ соответсвенно заменой $[\lambda, \xi]$ на D. Если записать (10) по координатам, получим

$$(L_1 Lu)_k = a(D)\, u_k + \sum_{j=1}^{m} \tilde{b}_{kj}(D)\, u_j\,. \tag{11}$$

В дальнейшем воспользуемся следующими общеизвестными результатами и результатами работы [1].

Лемма 2.1. *Пусть $y(t) \geqq 0$ непрерывная функция на интервале $\langle 0, T\rangle$, удовлетворяющая на нем неравенству*

$$y(t) \leqq K \int_0^t y(s)\, \mathrm{d}s + \int_0^t \varrho(s)\, \mathrm{d}s\,,$$

где $\varrho(t)$ интегрируемая на $\langle 0, T\rangle$ неотрицательная функция и K положительная постоянная. Тогда для $y(t)$ имеет место оценка

$$y(t) \leqq e^{Kt} \int_0^t \varrho(s)\, \mathrm{d}s$$

для $t \in \langle 0, T\rangle$.

Лемма 2.2. *Пусть f и g бесконечно дифференцируемые функции, $|\alpha| = m$ и $|\beta| = m - 1$. Потом*

$$(12)\qquad D^\alpha f D^\beta g + D^\alpha g D^\beta f = \sum_{j=0}^{n} D_j\, C^j_{\alpha\beta}(f, g)$$

где $C^j_{\alpha\beta}$ вещественные симметрические формы производных порядка $m - 1$ функций f и g.

Применяя лемму 2.2 для функций w и $\bar{w}$ (комплексно сопряженная к w) получим

$$(13)\qquad H_{m-i+1}(D)\, w\, \overline{H_{m-i}(D)\, w} + \overline{H_{m-i+1}(D)\, w}\, H_{m-i}(D)\, w = \sum_{k=0}^{n} D_k\, A_k^{m-i}(w)\,,$$

где $A_0^{m-i}, A_1^{m-i}, \ldots, A_n^{m-i}$ эрмитовы формы производных порядка $m - i$ функции w; $i = 1, 2, \ldots, m$.

Лемма 2.3. *Пусть w действительная бесконечно дифференцируемая финитная функция на V_T, $w(0, x) = 0$; $x \in E_n$. Тогда*

$$(14)\qquad \int_{S_t} A_0^{m-i}(w)\, \mathrm{d}x \geqq 0\,, \quad 0 \leqq t \leqq T, \quad i = 1, 2, \ldots, m\,.$$

Лемма 2.4. *Пусть E линейный дифференциальный оператор вида*

$$E = a(D) + L_{m-1}(D) + \ldots + L_0(D)$$

где $a(D)$ оператор определеный в (10), удовлетворяющий условию а) п. 1. и $L_{m-i}(D)$ однородный линейный оператор порядка $m - i$ и такой, что существуют ограниченные для всех $\xi \in E_n$, $\xi \neq 0$ функции $\gamma_1^{m-i}, \gamma_2^{m-i}, \ldots, \gamma_{m-i+1}^{m-i}$ такие, что имеет место равенство $L_{m-i}(\lambda, \xi) = \sum_{k=1}^{m-i+1} \gamma_k^{m-i}(\xi)\, P_k^{m-i}(\lambda, \xi)$. Потом для любой функции w из предыдущей леммы имеет место неравенство

$$(15)\qquad \int_{S_t} (L_{m-i} w)^2\, \mathrm{d}x \leqq C \int_{S_t} A_0^{m-i}(w)\, \mathrm{d}x\,;$$

$i = 1, 2, \ldots, m$; $0 \leqq t \leqq T$, где C не зависит на w.

Из этой леммы и условий б) и в) вытекает для функции u неравенство

$$(16)\qquad \int_{S_t} [\tilde{b}_{ij}(D)\, u_j(t, x)]^2\, \mathrm{d}x \leqq C \int_{S_t} A_0^{m-i}(u_j)\, \mathrm{d}x\,; \quad i, j = 1, 2, \ldots, m\,.$$

Из равенства (13) получаем для u_j неравенство

$$\sum_{k=0}^{n} \int_{V_t} D_k A_k^{m-i}(u_j)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}\tau \leqq \int_{V_t} [H_{m-i+1}(D)\, u_j]^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}\tau + \int_{V_t} [H_{m-i}(D)\, u_j]^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}\tau\,.$$

Суммируя эти неравенства по $j = 1, 2, \ldots, m$, получим

$$(17)\quad \sum_{j=1}^{m} \int_{S_t} A_0^{m-i}(u_j)\,\mathrm{d}x \leqq \sum_{j=1}^{m} \int_{V_t} \{[H_{m-i+1}(D)\,u_j]^2 + [H_{m-i}(D)\,u_j]^2\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau + \\ + \sum_{j=1}^{m} \int_{S_0} A_0^{m-i}(u_j)\,\mathrm{d}x\,.$$

Суммируя еще по $i = 1, 2, \ldots, m$, можем, в силу (15), написать

$$(18)\quad \sum_{i,j=1}^{m} \int_{S_t} A_0^{m-i}(u_j)\,\mathrm{d}x \leqq C\left\{\sum_{i,j=1}^{m} \int_{S_0} A_0^{m-i}(u_j)\,\mathrm{d}x + \sum_{i,j=1}^{m} \int_{V_t} A_0^{m-i}(u_j)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\right\} + \\ + \sum_{j=1}^{m} \int_{V_t} [a(D)\,u_j]^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Из (11) получим интегрированием по области V_t и суммированием по $j = 1, 2, \ldots, m$

$$(19)\quad \sum_{j=1}^{m} \int_{V_t} [a(D)\,u_j]^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau \leqq C \sum_{j=1}^{m} \int_{V_t} \{(L_1 Lu)_j^2 + \sum_{k=1}^{m} [\tilde{b}_{jk}(D)\,u_k]^2\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Вследствие (16) и (19) из (18) вытекает неравенство

$$(19')\quad \int_{S_t} \sum_{i,j=1}^{m} A_0^{m-i}(u_j)\,\mathrm{d}x \leqq C\left\{\int_{S_0} \sum_{i,j=1}^{m} A_0^{m-i}(u_j)\,\mathrm{d}x + \right. \\ \left. + \int_{V_t} [\sum_{i,j=1}^{m} A_0^{m-i}(u_j) + \sum_{j=1}^{m} (L_1 Lu)_j^2]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\right\}.$$

Так как L_1 оператор с постоянными коэффициентами порядка не более чем $m - 1$, то имеет место оценка

$$(20)\quad \sum_{j=1}^{m} (L_1 Lu)_j^2 \leqq C \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha| \leqq m-1} [D^\alpha (Lu)_j]^2\,.$$

Используя вид оператора L и теоремы вложения С. Л. Соболева можно оценить все производные функции u до порядка $m - 1$ на S_0 и получить таким образом неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{m} \int_{S_0} A_0^{m-i}(u_j)\,\mathrm{d}x \leqq C \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha| \leqq m-1} \int_{V_t} [D^\alpha (Lu)_j]^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Если использовать это неравенство и неравенство (20) в (19′) и применить лемму 2.1, получим

$$\int_{S_t} \sum_{i,j=1}^{m} A_0^{m-i}(u_j)\,\mathrm{d}x \leqq C\sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha|\leqq m-1} \int_{V_t} [D^\alpha(Lu)_j]^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau \tag{21}$$

интегрируя (21) по t от 0 до T

$$\int_{V_T} (\sum_{i,j=1}^{m} A_0^{m-i}(u_j))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqq C\sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha|\leqq m-1} \int_{V_T} [D^\alpha(Lu)_j]^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,. \tag{21′}$$

В силу этого неравенства и (4) имеет место

$$\int_{V_T} (\sum_{j=1}^{m} u_j^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqq C\sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha|\leqq m-1} \int_{V_T} [D^\alpha(Lu)_j]^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,,$$

что доказывает следующую теорему.

Теорема 2.1. *Пусть* L *гиперболический оператор* (*т.е. удовлетворяющий условии* а), б), в) п. 1.) *Тогда существует постоянная* $C > 0$, *что для всех функций* $u \in D$, $u_i(0, x) = 0$, $x \in E_n$, $i = 1, 2, \ldots, m$, *имеет место неравенство*

$$\|u\|_{L_2} \leqq C\|Lu\|_{W_2^{m-1}}\,. \tag{22}$$

Это соотношение дает сразу однозначность в D решения задачи Коши

$$Lu = f \tag{23}$$

с начальными данными

$$u_i(0, x) = 0\,, \quad x \in E_n\,, \quad i = 1, 2, \ldots, m\,. \tag{24}$$

3. Решение задачи Коши для гиперболического оператора методом конечных разностей. В этом пункте мы построим решение u системы уравнений (23), удовлетворяещее условиям (24), для $f = [f_1, f_2, \ldots, f_m]$, $f \in D$, т.е. докажем следующую теорему.

Теорема 3.1. *Пусть* $f = [f_1, f_2, \ldots, f_m]$ *вещественная векторная функция*, $f \in D$ *и* L *гиперболический оператор, определенный в п.* 1. *Тогда существует одна и только одна функция* $u = [u_1, u_2, \ldots, u_m]$, $u \in D$, *удовлетворяющая уравнению* (23) *и начальным условиям* (24).

В пространстве E_{n-1} построим сетку с узловыми точками $[t, x] = [k_0\tau, k_1 h, \ldots, k_n h]$, где $k_0, k_1, \ldots, k_n$ целые числа и τ, h положительные числа. Если функция $u(t, x)$ определена в V_T или только в точках сетки, определим векторную функцию u_Δ по формуле

$$u_\Delta(t, x) = u(k_0\tau, k_1 h, \ldots, k_n h)\,, \tag{25}$$

если $k_0\tau \leqq t < (k_0 + 1)\tau$ и $k_i h \leqq x_i < (k_i + 1) h$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Обозначим

$$u^{\pm i} = u(t, x_1, \ldots, x_i \pm h, \ldots, x_n) ; \qquad u^{\pm 0} = u(t \pm \tau, x_1, x_2, \ldots, x_n) ;$$

$$\Delta_i u = \frac{1}{2h}(u^{+i} - u^{-i}) ; \quad \Delta_0 u = \frac{1}{2\tau}(u^{+0} - u^{-0}) ;$$

$$J_2 u = \tfrac{1}{2}(u^{+0} + u^{-0}) ;$$

$$\Delta^\alpha = \Delta_0^{\alpha_0}\Delta_1^{\alpha_1} \ldots \Delta_n^{\alpha_n} ; \quad |\alpha| = \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n .$$

Пусть M_Δ такое целое и τ такое положительное число, что имеет место равенство $M_\Delta \tau = T$ и пусть далее

$$C_2 = \max_{1 \leqq k \leqq m} \max_{\substack{\xi \in E_n \\ |\xi_i| \leqq 1}} |\lambda_k^m(\xi)| .$$

Через Ω_t обозначим множество всех точек сетки на S_t, $t \in \langle 0, T \rangle$, вида $[t, k_1 h, \ldots, k_n h]$ и через K n-мерный куб со стороной длины 2π; $\Omega_\Delta = \{x_k \in E_n,$ $x_k = [k_2 h, \ldots, k_n h]$, $k_1, \ldots, k_n$ целые$\}$.

Замечание. Пусть функции v, w определены на множестве точек сетки в V_T и обращаются в нуль вне какого-нибудь куба для всех t, $t \in \langle 0, T \rangle$. Тогда верны следующее равенства:

(26) $$\Delta_i(vw) = \Delta_i v w^{+i} + \Delta_i w v^{-i} ,$$

(27) $$\sum_{j=m}^{k_0-1} [\Delta_0 v\, J_2 w + \Delta_0 w\, J_2 v]_{t=j\tau} =$$
$$= \frac{1}{2\tau}\{[vw + (vw)^{-0}]_{t=k_0\tau} - [vw + (vw)^{-0}]_{m\tau}\} ,$$

(28) $$\sum_{j=m}^{k_0-1} (v\, J_2 w - w\, J_2 v) =$$
$$= \tfrac{1}{2}\{[v^{-0} w - w^{-0} v]_{t=k_0\tau} - [v^{-0} w - w^{-0} v]_{t=m\tau}\} ,$$

(29) $$\sum_{\Omega_t} \Delta_i v w + \sum_{\Omega_t} \Delta_i w v = 0$$

где $k_0 = m + 1, m + 2 \ldots, M_\Delta$. Обозначим еще для $\xi \in E_n$

$$\hat{v}(t, \xi) = \sum_{x_k \in \Omega_k} v(t, x_k)\, e^{-ik\xi} , \text{ где } k\xi = \sum_{i=1}^n k_i \xi_i$$

и заметим, что имеют место соотношения

(30a) $$\frac{h^n}{(2\pi)^n} \int_K \hat{v}(t, \xi)\, \overline{\hat{w}(t, \xi)}\, d\xi = h^n \sum_{x_k \in \Omega_\Delta} v(t, x_k)\, \overline{w(t, x_k)}$$

$$\widehat{\Delta_i v} = \frac{1}{h}\, \hat{v} \sin \xi_i$$

и следовательно

$$\widehat{H_{m-i}(\Delta)v} = H_{m-i}\hat{v}\,, \tag{30б}$$

где для краткости обозначаем

$$H_{m-i}\left(\Delta_0, \frac{i}{h}\sin\xi_1, \ldots, \frac{i}{h}\sin\xi_n)\right) = H_{m-i}\left(\Delta_0, \frac{i}{h}\sin\xi\right) = H_{m-i},$$

$$P_k^{m-i}\left(\Delta_0, \frac{i}{h}\sin\xi_1, \ldots, \frac{i}{h}\sin\xi_n\right) = P_k^{m-i}\left(\Delta_0, \frac{i}{h}\sin\xi\right) = P_k^{m-i}\,.$$

При доказательстве теоремы 3.1 нам понадобится следующая лемма, доказанная в [3], стр. 144.

Лемма 3.1. *Пусть $y(t)$ неотрицательная функция для $t = k_0\tau$, $k_0 = 0, 1, \ldots, M_\Delta$, удовлетворяющая для $k_0 = 1, 2, \ldots, M_\Delta$ неравенствам*

$$y(k_0\tau) \leqq K_1\{y(0) + \tau\sum_{s=0}^{k_0} y(s\tau) + F(k_0\tau)\}\,,$$

где $F(k_0\tau)$ неотрицательная неубывающая функция для $k_0 = 1, 2, \ldots, M_\Delta$. Пусть $\tau K_1 \leqq \frac{1}{2}$, $\tau \leqq 1$. Потом существует постоянная K_2, зависящая только от K_1 и $T = M_\Delta\tau$, что имеет место неравенство

$$y(k_0\tau) \leqq K_2\{y(0) + F(k_0\tau)\}$$

для $k_0 = 0, 1, \ldots, M_\Delta$.

Доказателство теоремы 3.1. Пусть $\tau_1, \tau_2, \ldots, h_1, h_2, \ldots$ последовательности положительных чисел, удовлетворяющих условиям

$$\lim_{\nu\to\infty}\tau^\nu = 0\,, \quad \lim_{\nu\to\infty}h^\nu = 0\,, \quad \frac{\tau^\nu}{h^\nu} = \varkappa\,, \quad \nu = 1, 2, \ldots\,, \quad \tau^\nu < 1\,.$$

Для каждой пары $\tau, h, \tau = \tau^\nu$, $h = h^\nu$, $\tau < 1$ определим векторную функцию u следующим образом (индекс ν опускаем):

$$u(k_0\tau, x_k) = 0 \quad \text{для} \quad k_0 \leqq 0 \tag{31a}$$

и для $k_0 \geqq 0$ является решением системы уравнений

$$\Delta_0 u(k_0\tau, x_k) + \sum_{i=1}^{n} A_i\,\Delta_i u(k_0\tau, x_k) + Bu(k_0\tau, x_k) = f(k_0\tau, x_k)\,. \tag{31б}$$

Решение системы (23) с условиями (24) получим как слабый предел ступенчатых функций $u_\Delta^\nu = u_\Delta$ ($\nu = 1, 2, \ldots$), которые построим по сеточным функциям (31а, б) по формулам (25). Из (30) и (31) следует, что для произвольного натурального числа l и вектора $\beta = [\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n]$, $\beta_0 = 0$, $1 \leqq |\beta| \leqq l$, $1 \leqq j \leqq m$ имеют место соотношения

$$\Delta^\beta u_j(\tau, x_k) = 2\tau\Delta_r\Delta^{\beta'} f_j(0, x_k) = \varkappa[\Delta^{\beta'} f_j^{+r}(0, x_k) - \Delta^{\beta'} f_j^{-r}(0, x_k)]\,,$$

$$\Delta_0 u_j(\tau, x_k) = f_j(\tau, x_k) - \sum_{s=1}^{m} [2\tau b_{js} f_s(0, x_k) + \varkappa \sum_{i=1}^{n} a_{js}^i (f_s^{+i}(0, x_k) - f_s^{-i}(0, x_k)]\,,$$

где $\beta' = [0, \beta_1, \ldots, \beta_r - 1, \ldots, \beta_n]$. Эти соотношения дают оценку выражения $\Delta^\beta u_j(\tau, x_k)$ для $\beta_0 \leqq 1$ через значения функции f:

$$\sum_{\substack{|\beta| \leqq l \\ \beta_0 \leqq 1}} |\Delta^\beta u_j(\tau, x_k)|^2 \leqq C \sum_{l=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{|\beta| \leqq l-1 \\ \beta_0 = 0}} \{|f_l(\tau, x_k)|^2 + |f_l(0, x_k)|^2 +$$
$$+ |f_l^{+i}(0, x_k)|^2 + |f_l^{-i}(0, x_k)|^2\}\,.$$

Суммируя эти оценки по $j = 1, 2, \ldots, m$ и $x_k \in \Omega_\Delta$, получим после умножения на h^n неравенство

$$[h^n \sum_{x_k \in \Omega_\Delta} \sum_{j=1}^{m} \sum_{\substack{|\beta| \leqq l \\ \beta_0 \leqq 1}} |\Delta^\beta u_j|^2]_{t=\tau} \leqq \tag{32}$$
$$\leqq C\{h^n[\sum_{x_k \in \Omega_\Delta} \sum_{j=1}^{m} \sum_{\substack{|\gamma| \leqq l-1 \\ \gamma_0 = 0}} |\Delta^\gamma f_j|^2]_{t=\tau} + h^n[\sum_{x_k \in \Omega_\Delta} \sum_{j=1}^{m} \sum_{\substack{|\gamma| \leqq l-1 \\ \gamma_0 = 0}} |\Delta^\gamma f_j|^2]_{t=0}\}\,.$$

Докажем теперь несколько лемм.

Лемма 3.2. *Пусть l, p целые неотрицательные числа, $0 \leqq p \leqq l$; τ, h положительные числа ($\tau/h = \varkappa$, $\tau < 1$). Тогда для функции u, определенной соотношениями* (31а, б) *имеет место неравенство*

$$h^n [\sum_{x_k \in \Omega_\Delta} \sum_{j=1}^{m} \sum_{\substack{|\alpha| \leqq l \\ \alpha_0 \leqq p}} |\Delta^\alpha u_j|^2]_{t=p\tau} \leqq C \sum_{s=0}^{p} h^n [\sum_{x_k \in \Omega_\Delta} \sum_{j=1}^{m} \sum_{\substack{|\beta| \leqq l-1 \\ \beta_0 < s}} |\Delta^\beta f_j|^2]_{t=s\tau}\,, \tag{33}$$

для $s = 0$, $\beta_0 = 0$, где постоянная C не зависит, как всюду в дальнейшем, от f, τ, h.

Доказательство. Неравенство (33) доказывается методом математической индукции по p. Неравенство (32) дает (33) для $p = 1$. Предполагая выполнение (33) для всех q, $q < p$, докажем его для p, $p > 1$. В силу уравнения (31б) имеем для $\beta = [\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n]$, $\beta_0 = 0$, $|\beta| \geqq 1$

(34)
$$\Delta^\beta u_j(p\tau, x_k) = \Delta^\beta u_j((p-2)\tau, x_k) +$$
$$+ \varkappa\, \Delta^\beta[f_j^{+r}((p-1)\tau, x_k) - f_j^{-r}(p-1)\tau, x_k)] -$$
$$- 2\tau \sum_{\mu=1}^{m} [b_{j\mu}\, \Delta^\beta u_\mu((p-1)\tau, x_k) + \sum_{i=1}^{n} a_{j\mu}^i\, \Delta_i \Delta^\beta u_\mu((p-1)\tau, x_k)]\,,$$

(35)
$$\Delta_0 u_j(p\tau, x_k) = f_j(p\tau, x_k) - \sum_{\mu=1}^{m} [b_{j\mu} u_\mu(p\tau, x_k) + \sum_{i=1}^{n} a_{j\mu}^i\, \Delta_i u_\mu(p\tau, x_k)\,.$$

Вместо $\Delta_i u_\mu(p\tau, x_k)$ и $u_l(p\tau, x_k)$ подставим в (35) их выражения из (34). Для выражений $\Delta^\alpha u_j$, $|\alpha| \leqq l$, $\alpha_0 \leqq p$ рассмотрим три случая:
(A) если $\alpha_0 < p - 1$, то, применяя (34), можем написать

$$\Delta^\alpha u_j(p\tau, x_k) = \Delta^{\alpha'} \Delta_r u_j((p-2)\tau, x_k) +$$
$$+ \varkappa\, \Delta^{\alpha'}[f_j^{+r}((p-1)\tau, x_k) - f_j^{-r}((p-1)\tau, x_k)] -$$
$$- \sum_{\mu=1}^{m} \{2\tau b_{j\mu}\, \Delta^{\alpha'} \Delta_r u_\mu((p-1)\tau, x_k) +$$
$$+ \varkappa \sum_{i=1}^{n} a_{j\mu}^i\, \Delta^{\alpha'} \Delta_i [u_\mu^{+r}((p-1)\tau, x_k) - u_\mu^{-r}((p-1)\tau, x_k)]\}\,.$$

Правую часть можно по индуктивному предположению оценить, и следовательно, можно оценить тоже $h^n \sum_{j=1}^{m} \sum_{x_k \in \Omega_\Delta} [\Delta^\alpha u_j(p\tau, x_k)]^2$ для $\alpha_0 < p - 1$ правой частью (33).

(B) Если $\alpha_0 = p - 1$, $|\alpha| = l$, можно писать

$$\Delta^\alpha u_j(p\tau, x_k) = \Delta^{\alpha'} f_j(p\tau, x_k) -$$
$$- \sum_{\mu=1}^{m} [b_{j\mu}\, \Delta^{\alpha'} u_\mu(p\tau, x_k) + \sum_{i=1}^{n} a_{j\mu}^i\, \Delta_i \Delta^{\alpha'} u_\mu(p\tau, x_k)]\,,$$

где $\alpha' = [\alpha_0 - 1, \alpha_1, \dots, \alpha_n]$, $|\alpha'| \leqq l - 1$, $j = 1, 2, \dots, m$. Применяя (A), оценим правую часть этого равенства и тем самым получим оценку (33) для $\alpha_0 = p - 1$.
(C) Если $\alpha_0 = p$, то

$$\Delta^\alpha u_j(p\tau, x_k) = \Delta^{\alpha'} \Delta_0 u_j(p\tau, x_k) =$$
$$= \Delta^{\alpha'} f_j(p\tau, x_k) - \sum_{\mu=1}^{m} [b_{j\mu}\, \Delta^{\alpha'} u_\mu(p\tau, x_k) + \sum_{i=1}^{n} a_{j\mu}^i\, \Delta^{\alpha'} \Delta_i u_\mu(p\tau, x_k)]$$

где $\alpha' = [\alpha_0 - 1, \alpha_1, \dots, \alpha_u]$. Отсюда и из ($B$) получится нужная оценка и в этом случае.

Лемма 3.3. *Пусть имеют место предположения леммы* 3.2 *и* $\varkappa \leqq \delta/C_2$, $\delta \in (0, 1)$. *Тогда*

$$(36)\qquad \frac{h^n}{(2\pi)^n}\int_K \sum_{i,j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m-i+1}\{|P_k^{m-i}\hat{u}_j(k_0\tau,\xi)|^2 + (|P_k^{m-i}\hat{u}_j(k_0\tau,\xi)|^2)^{-0}\}\,\mathrm{d}\xi \leqq$$

$$\leqq C\,\frac{h^n}{(2\pi)^n}\int_K \sum_{i,j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m-i+1}\{|P_k^{m-i}\hat{u}_j(m\tau,\xi)|^2 + (|P_k^{m-i}\hat{u}_j(m\tau,\xi)|^2)^{-0}\}\,\mathrm{d}\xi\, +$$

$$+\, C\,\frac{\tau h^n}{(2\pi)^n}\int_K \{\sum_{s=m}^{k_0-1}\sum_{l,j=1}^{m}|\widehat{r_{jl}(\Delta)}f(s\tau,\xi)|^2\}\,\mathrm{d}\xi\,,$$

для целого k_0, $m + 1 \leqq k_0 \leqq M_\Delta - m$.

Доказательство. Из формул (4) и (4′) следует

$$\frac{\tau h^n}{(2\pi)^n}\sum_{s=m}^{k_0-1}\int_K \{H_{m-i+1}\hat{u}_j(s\tau,\xi)\,\overline{J_2H_{m-i}\hat{u}_j(s\tau,\xi)} + \overline{H_{m-i+1}\hat{u}_j(s\tau,\xi)}\,J_2H_{m-i}\hat{u}_j(s\tau,\xi)\}\,\mathrm{d}\xi =$$

$$= \frac{\tau h^n}{(2\pi)^n}\sum_{s=m}^{k_0-1}\sum_{k=1}^{m-i+1}\Bigg[\int_K \{\Delta_0 P_k^{m-i}\hat{u}_j(s\tau,\xi)\,\overline{J_2P_k^{m-i}\hat{u}_j(s\tau,\xi)}\, +$$

$$+\,\overline{\Delta_0 P_k^{m-i}(s\tau,\xi)}\,J_2P_k^{m-i}(s\tau,\xi)\}\,\mathrm{d}\xi\, +$$

$$+\frac{i}{h}\int_K \lambda_k^{m-i+1}(\sin\xi)\,\{P_k^{m-i}\hat{u}_j(s\tau,\xi)\,\overline{J_2P_k^{m-i}\hat{u}_j(s\tau,\xi)} + \overline{P_k^{m-i}\hat{u}_j(s\tau,\xi)}\,J_2P_k^{m-i}\hat{u}_j(s\tau,\xi)\}\,\mathrm{d}\xi\Bigg].$$

Применяя (27) и (28), можем правую часть переписать в виде

$$\frac{1}{2}\,\frac{h^n}{(2\pi)^n}\sum_{k=1}^{m-i+1}\int_K \{|P_k^{m-i}\hat{u}_j(k_0\tau,\xi)|^2 + (|P_k^{m-i}\hat{u}_j(k_0\tau,\xi)|^2)^{-0} - |P_k^{m-i}\hat{u}_j(m\tau,\xi)|^2 -$$

$$-\,(|P_k^{m-i}\hat{u}_j(m\tau,\xi)|^2)^{-0}\}\,\mathrm{d}\xi\, -$$

$$-\,\frac{\tau}{h}\,\frac{h^n}{(2\pi)^n}\sum_{k=1}^{m-i+1}\int_K \lambda_k^{m-i+1}(\sin\xi)\,\mathrm{Im}\,\{P_k^{m-i}\hat{u}_j(k_0\tau,\xi)\,[P_k^{m-i}\hat{u}_j(k_0\tau,\xi)]^{-0}\, -$$

$$-\,P_k^{m-i}\,\hat{u}_j(m\tau,\xi)\,[P_k^{m-i}\hat{u}_j(m\tau,\xi)]^{-0}\}\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Оценивая это выражение, получим

$$(37)\qquad 2\,\frac{\tau h^n}{(2\pi)^n}\sum_{s=m}^{k_0-1}\int \{H_{m-i+1}\hat{u}_j(s\tau,\xi)\,\overline{J_2H_{m-i}\hat{u}_j(s\tau,\xi)}\, +$$

$$+\,J_2H_{m-i}\hat{u}_j(s\tau,\xi)\,\overline{H_{m-i+1}\hat{u}_j(s\tau,\xi)}\}\,\mathrm{d}\xi \geqq \frac{h^n}{(2\pi)^n}\sum_{k=1}^{m-i+1}\int_K \{|P_k^{m-i}\hat{u}_j(k_0\tau,\xi)|^2\, +$$

$$+\,(|P_k^{m-i}\hat{u}_j(k_0\tau,\xi)|^2)^{-0} - |P_k^{m-i}\hat{u}_j(m\tau,\xi)|^2 - (|P_k^{m-i}\hat{u}_j(m\tau,\xi)|^2)^{-0}\}\,\mathrm{d}\xi\, -$$

$$- \varkappa C_2 \frac{h^n}{(2\pi)^n} \sum_{k=1}^{m-i+1} \int_K \{|P_k^{m-i} \hat{u}_j(k_0\tau, \xi)|^2 + (|P_k^{m-i} \hat{u}_j(k_0\tau, \xi)|^2)^{-0} + |P_k^{m-i} \hat{u}_j(m\tau, \xi)|^2 + $$
$$+ (|P_k^{m-i} \hat{u}_j(m\tau, \xi)|^2)^{-0}\} \, \mathrm{d}\xi \, .$$

Если использовать требование $\tau/h = \varkappa \leqq \delta/C_2$, $\delta \in (0, 1)$, то можем написать, суммируя неравенства (37) по $i, j = 1, 2, \ldots, m$

$$\frac{h^n}{(2\pi)^n} \sum_{i,j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m-i+1} \int_K \{|P_k^{m-i} \hat{u}_j(k_0\tau, \xi)|^2 + (|P_k^{m-i} \hat{u}_j(k_0\tau, \xi)|^2)^{-0}\} \, \mathrm{d}\xi \leqq$$
$$\leqq C \frac{h^n}{(2\pi)^n} \sum_{i,j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m-i+1} \int_K \{|P_k^{m-i} \hat{u}_j(m\tau \, \xi)|^2 + (|P_k^{m-i} \hat{u}_j(m\tau, \xi)|^2)^{-0}\} \, \mathrm{d}\xi +$$
$$+ 2 \frac{\tau h^n}{(2\pi)^n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{s=m}^{k_0-1} \int_K \sum_{i=1}^{m} \{H_{m-i+1} \hat{u}_j(s\tau, \xi) \, \overline{J_2 H_{m-i} \hat{u}_j(s\tau, \xi)} +$$
$$\overline{H_{m-i+1} \hat{u}_j(s\tau, \xi)} \, . \, J_2 H_{m-i} \hat{u}_j(s\tau, \xi)\} \, \mathrm{d}\xi$$

и оценивая правую часть, получим

$$\frac{h^n}{(2\pi)^n} \sum_{i,j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m-i+1} \int_K \{|P_k^{m-i} \hat{u}_j(k_0\tau, \xi)|^2 + (|P_k^{m-i} \hat{u}_j(k_0\tau, \xi)|^2)^{-0}\} \, \mathrm{d}\xi \leqq$$
$$\leqq C \frac{h^n}{(2\pi)^n} \sum_{i,j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m-i+1} \int_K \{|P_k^{m-i} \hat{u}_j(m\tau, \xi)|^2 + (|P_k^{m-i} \hat{u}_j(m\tau, \xi)|^2)^{-0}\} \, \mathrm{d}\xi +$$
$$+ C \frac{\tau h^n}{(2\pi)^n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{s=m}^{k_0-1} \int_K \left| a\left(\Delta_0, \frac{i}{h} \sin \xi\right) \hat{u}_j(s\tau, \xi) \right|^2 \mathrm{d}\xi +$$
$$+ C \frac{\tau h^n}{(2\pi)^n} \sum_{i,j=1}^{m} \sum_{s=m}^{k_0} \int_K \{|H_{m-i} \hat{u}_j(s\tau, \xi)|^2 + (|H_{m-i} \hat{u}_j(s\tau, \xi)|^2)^{-0}\} \, \mathrm{d}\xi \, .$$

Используя (4), (11), (23) и условия б), в), можем второе и третье слагаемое оценить через $|P_k^{m-i} \hat{u}_j(s\tau, \xi)|^2$ и $|\widehat{r_{jl}(\Delta) f}|^2$, и применяя лемму 3.1 получим (36).

Лемма 3.4. *Пусть имеют место предположения леммы* 3.3. *Потом*

$$h^n \sum_{x_k \in \Omega_\Delta} \sum_{j=1}^{m} u_j^2(k_0\tau, x_k) \leqq C\{\tau h^n \sum_{s=m}^{k_0-1} \sum_{x_k \in \Omega_\Delta} \sum_{|\alpha|=m-1} \sum_{j=1}^{m} [\Delta^\alpha f_j(s\tau, x_k)]^2 + \tag{38}$$
$$+ h^n \sum_{x_k \in \Omega_\Delta} \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\gamma| \leqq m-1} ([\Delta^\gamma u_j(m\tau, x_k)]^2 + [\Delta^\gamma u_j((m-1)\tau, x_k)]^2)\}$$

где k_0 *целое,* $m + 1 \leqq k_0 \leqq M_\Delta - m$.

Следствие 1. *В предположениях леммы* 3.3 *имеет место неравенство*

$$(39)\qquad h^n \sum_{x_k \in \Omega_\Delta} \sum_{j=1}^{m} u_j^2(k_0\tau, x_k) \leqq C\{\tau h^n \sum_{s=m}^{k_0-1} \sum_{x_k \in \Omega_\Delta} \sum_{|\alpha|=m-1} (\Delta^\alpha f_j(s\tau, x_k))^2 + $$
$$+ h^n \sum_{s=0}^{m} \sum_{x_k \in \Omega_\Delta} \sum_{j=1}^{m} \sum_{\substack{|\gamma| \leqq m-2 \\ \gamma_0 \leqq s-1}} (\Delta^\gamma f_j(s\tau, x_k))^2\}$$

где $0 \leqq k_0 \leqq M_\Delta - m$ *целое,* $\gamma_0 = 0$ *для* $s = 0$.

Лемма 3.2 дает нужную оценку второго слагаемого в правой части (38) а также оценку

$$(40)\qquad h^n \sum_{j=1}^{m} \sum_{x_k \in \Omega_\Delta} u_j^2(p\tau, x_k) \leqq C \sum_{s=0}^{m-1} h^n \sum_{x_k \in \Omega_\Delta} \sum_{j=1}^{m} \sum_{\substack{|\alpha| \leqq m-1 \\ \alpha_0 \leqq p-1}} (\Delta^\alpha f_j(s\tau, x_k))^2$$

для $p = 0, 1, \ldots, m$, что сразу приводит к неравенству (39).

Следствие 2. *Пусть* ω *произвольное фиксированное число,* $\omega > 0$. *Обозначим* $V_{T*} = \{[t, x] \in E_{n+1};\ -\omega \leqq t \leqq T, x \in E_n\}$. *Тогда в предположижениях леммы* 3.4 *имеет место неравенство*

$$(41)\quad \tau h^n \sum_{s=-[\omega/\tau]}^{M_\Delta - m} \sum_{x_k \in \Omega_\Delta} \sum_{j=1}^{m} u_j^2(s\tau, x_k) \leqq C\tau h^n \sum_{j=1}^{m} \sum_{x_k \in \Omega_\Delta t} \{ \sum_{s=m}^{M_\Delta - m} \sum_{|\alpha|=m-1} (\Delta^\alpha f_j(s\tau, x_k))^2 + $$
$$+ \sum_{s=0}^{m} \sum_{\substack{|\gamma| \leqq m-1 \\ \gamma_0 \leqq s-1}} (\Delta^\gamma f_j(s\tau, x_k))^2\}.$$

Это неравенство получим, если умножить (39) на τ и просуммировать по $k_0 = 0, 1, \ldots, M_\Delta - m$.

Доказательство леммы 3.4. Рассмотрим $P_k^{m-i}\hat{u}_j(t, \xi)$. Очевидно

$$P_k^{m-i}\hat{u}_j(t, \xi) = \sum_{|\alpha|=m-i} a_\alpha \left(\frac{i}{h} \sin \xi\right) \Delta_0^{\alpha_0} \hat{u}_j(t, \xi),$$

где a_α однородные функции своих переменных степени $m - i - \alpha_0$, и, следовательно,

$$(42)\qquad |P_k^{m-i}\hat{u}_j(t, \xi)|^2 \leqq C \sum_{\alpha_0=0}^{m-i} \left| \frac{\left(\sum_{l=1}^{n} |\sin \xi_l|\right)^{m-i-\alpha_0}}{h^{m-i-\alpha_0}} \Delta_0^{\alpha_0} \hat{u}_j(t, \xi) \right|^2$$

для $k = 1, 2, \ldots, m - i$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$. Используя (42) в неравенстве (36), получим после перехода от функций $\hat{u}_j, \hat{f}_j$ к функциям u_j, f_j

$$h^n \sum_{j=1}^{m} \sum_{x_k \in \Omega_\Delta} u_j^2(k_0\tau, x_k) \leqq C \left\{ h^n \sum_{i,j=1}^{m} \sum_{\alpha_0=0}^{m-i} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_K \left| \left(\frac{\sum_{l=1}^{n} |\sin \xi_l|}{h} \right)^{m-i-\alpha_0} \Delta_0^{\alpha_0} \hat{u}_j(m\tau, \xi) \right|^2 d\xi + \right.$$
$$\left. + \tau h^n \sum_{s=m}^{k_0-1} \sum_{j,l=1}^{m} \sum_{x_k \in \Omega_\Delta} [r_{jl}(\Delta) f_l(s\tau, x_k)]^2 \right\}.$$

Потому что

$$\sum_{j,l=1}^{m} \sum_{x_k\in\Omega_\Delta} [r_{jl}(\Delta)\, u_l(t, x_k)]^2 \leqq C \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha|=m-1} \sum_{x_k\in\Omega_\Delta} [\Delta^\alpha f_j(t, x_k)]^2$$

и

$$\left(\frac{\sum_{l=1}^{n} |\sin \xi_l|}{h}\right)^{m-i-\alpha_0} \leqq C \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\sin \xi_l}{h}\right)^{m-i-\alpha_0}$$

то имеет место неравенство (38) и лемма 3.4 доказана.

Применяя к системе (31) оператор Δ^α, получим оценку для $\Delta^\alpha u$, аналогично, как мы получили (38) для u.

Лемма 3.5. *Пусть p натуральное число. Потом в предположениях леммы* 3.3 *имеет место оценка*

$$(43) \qquad \tau h^n \sum_{|\alpha|=p} \sum_{s=m+p}^{M_\Delta-m-p} \sum_{x_k\in\Omega_\Delta} \sum_{j=1}^{m} (\Delta^\alpha u_j(s\tau, x_k))^2 \leqq$$

$$\leqq C\{\tau h^n \sum_{s=m+p}^{M_\Delta-m-p} \sum_{x_k\in\Omega_\Delta} \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\gamma|=m+p-1} [\Delta^\gamma f_j(s\tau, x_k)]^2 +$$

$$+ h^n \sum_{s=0}^{m+p} \sum_{i,j=1}^{m} \sum_{x_k\in\Omega_\Delta} \sum_{\substack{|\gamma|\leqq m+p-2\\ \gamma_0<s}} [\Delta^\gamma f_j(s\tau, x_k)]^2\,,$$

для k_0 целого, $m + p + 1 \leqq k_0 \leqq M_\Delta - m - p$.

Доказательство. Применяя оператор Δ^α, $|\alpha| = p$ к уравнениям (31б), получим

$$(44) \qquad \Delta_0(\Delta^\alpha u) + \sum_{i=1}^{n} A_i\Delta_i(\Delta^\alpha u) + B(\Delta^\alpha u) = \Delta^\alpha f.$$

Поступая теперь подобно, как при доказательстве (38) и применяя наконец лемму 3.2, получим (43).

Лемма 3.6. *В предположениях леммы* 3.3 *имеет место оценка*

$$(45) \qquad \tau h^n \sum_{s=-[\omega/\tau]}^{M_\Delta-m} \sum_{x_k\in\Omega_\Delta} \sum_{j=1}^{m} \sum_{r=0}^{n} |\Delta_r u_j(s\tau, x_k)|^2 \leqq$$

$$\leqq C\tau h^n \{ \sum_{s=m}^{M_\Delta-m} \sum_{j=1}^{m} \sum_{x_k\in\Omega_\Delta} \sum_{\substack{|\alpha|\leqq m\\ \alpha_0\leqq m-1}} |\Delta^\alpha f_j(s\tau, x_k)|^2 + \sum_{s=0}^{m} \sum_{j=1}^{m} \sum_{x_k\in\Omega_\Delta} \sum_{\substack{|\gamma|\leqq m\\ \gamma_0\leqq s-1}} |\Delta^\gamma f_j(s\tau, x_k)|^2 \}$$

для $r = 0, 1, 2, \ldots, n$, где ω произвольное положительное число.

Доказательство. Применяя оператор Δ_r, $r = 1, 2, \ldots, n$ к уравнениям (31б), получим $\Delta_0(\Delta_r u) + \sum_{i=1}^{n} A_i \Delta_i(\Delta_r u) + B(\Delta_r u) = \Delta r f$. Из этого и следствия 2 леммы 3.4 для функций $\Delta_r u$, $\Delta_r f$ следует

$$\tau h^n \sum_{s=-[\omega/\tau]}^{M_\Delta - m} \sum_{x_k \in \Omega_\Delta} \sum_{j=1}^{m} \left|\Delta_r u_j(s\tau, x_k)\right|^2 \leqq \tag{46}$$

$$\leqq C\tau h\{\sum_{s=m}^{M_\Delta - m} \sum_{j=1}^{m} \sum_{x_k \in \Omega_\Delta} \sum_{|\alpha| = m-1} \left|\Delta^\alpha \Delta_r f_j(s\tau, x_k)\right|^2 + \sum_{s=0}^{m} \sum_{j=1}^{m} \sum_{x_k \in \Omega_\Delta} \sum_{\substack{|\gamma| \leqq m-1, \\ \gamma_0 \leqq s-1}} \left|\Delta^\gamma \Delta_r f_j(s\tau, x_k)\right|^2\}$$

для $r = 1, 2, \ldots, n$. Из (41), (46) и уравнений (31) получим нужную оценку и для $\Delta_0 u$.

Неравенства (41), (43) и (46) дают оценки функций $u, \Delta^\alpha u$ ($|\alpha| = 1, 2, \ldots$). Чтобы доказать существование решения системы (23), удовлетворяющего условиям (24) для $f \in D$, поступаем следующим образом:

Возьмем последовательности положительных чисел τ^ν, h^ν ($\nu = 1, 2, \ldots$), удовлетворяющих условиям $\tau^\nu \leqq C_1 < 1$, $\lim_{\nu \to \infty} \tau^\nu = 0$, $\lim_{\nu \to \infty} h^\nu = 0$, $\tau^\nu / h^\nu = \varkappa \leqq \delta / C_2$, $\delta \in (0, 1)$, $\nu = 1, 2, \ldots$ и для каждой пары τ^ν, h^ν построим функцию u^ν по формулам (31а), (31б). Наконец определим функцию u_Δ^ν с помощью u^ν по формуле (25). Покажем, что последовательность $\{u_\Delta^\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ сходится слабо в L_2 к функции $u \in D$ удовлетворяющей (23), (24).

При $f \in D$ правые части неравенств (41), (46) ограничены равномерно по ν. Следовательно, последовательности функций u_Δ^ν, $\Delta_i u_\Delta^\nu$, $i = 0, 1, \ldots, n$ ограничены равномерно в $L_2(V_{T*})$ (полагаем $u_\Delta^\nu(k_0\tau, x_k) = 0$, $\Delta_i u_\Delta^\nu(k_0\tau, x_k) = 0$ для $i = 0, 1, \ldots, n$, $\nu = 1, 2, \ldots$, $M_\Delta - m < k_0 \leqq M_\Delta$). Пусть p натуральное число. Тогда из (45) вытекает равномерная ограниченность в $L_2(V_T)$ функций $\Delta^\alpha u$, $|\alpha| = p$, где полагаем $\Delta^\alpha u_\Delta^\nu(k_0\tau, x_k) = 0$, для $0 \leqq k_0 \leqq m + p$ и $M_\Delta - m - p \leqq \leqq k_0 \leqq M_\Delta$. Поэтому из последовательности u_Δ^ν можно выбрать подпоследовательность v_Δ^ν такую, что $\Delta^\alpha v_\Delta^\nu$ сходится к функции w_α слабо в $L_2(V_{T*})$ для $|\alpha| \leqq 1$ и в $L_2(V_T)$ для $|\alpha| \geqq 2$. Покажем, что w_α есть обобщенная производная функции $u = \lim_{\nu \to \infty} v_\Delta^\nu$, т. е. $w_\alpha = D^\alpha u$. По формулам (25) и (29) имеем для любой сеточной функции v и любой бесконечно дифференцируемой функции φ с компактным носителем во внутренности V_T равенства

$$\sum_{x_k \in \Omega_\Delta} \Delta_i v(t, x_k)\, \varphi(t, x_k) = -\sum_{x_k \in \Omega_\Delta} \Delta_i \varphi(t, x_k)\, v(t, x_k)$$

и

$$\sum_{l=-[\omega/\tau]}^{M_\Delta - 1} \sum_{x_k \in \Omega_\Delta} \Delta_0 v(l\tau, x_k)\, \varphi(l\tau, x_k) = -\sum_{l=-[\omega/\tau]}^{M_\Delta - 1} \sum_{x_k \in \Omega_\Delta} v(l\tau, x_k)\, \Delta_0 \varphi(l\tau, x_k)$$

и, следовательно

$$(47)\quad \sum_{l=m+|\alpha|}^{M_\Delta-1}\sum_{x_k\in\Omega_\Delta}\Delta^\alpha v(l\tau, x_k)\,\varphi(l\tau, x_k) = (-1)^{|\alpha|}\sum_{l=m+|\alpha|}^{M_\Delta-1}\sum_{x_k\in\Omega_\Delta} v(l\tau, x_k)\,\Delta^\alpha\varphi(l\tau, x_k)\,.$$

Применяя последнее для функций v_Δ^ν, получим

$$(48)\qquad \int_{V_T}\Delta^\alpha v(t, x)\,\varphi_\Delta(t, x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = (-1)^{|\alpha|}\int_{V_T} v_\Delta^\nu\Delta^\alpha\varphi_\Delta(t, x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

для $\nu = 1, 2, \ldots$ Из предыдущего и благодаря гладкости φ видно, что можно перейти в этом равенстве к пределу по ν и получить

$$\int_{V_T} w_\alpha(t, x)\,\varphi(t, x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = (-1)^{|\alpha|}\int_{V_T} u(t, x)\,D^\alpha\varphi(t, x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

для любого α.

Но это значит, что функция имеет обобщенные производные всех порядков. По теореме вложения С. Л. Соболева она бесконечно дифференцируема в V_T. Предельным переходом в равенстве

$$\tau h^n\sum_{l=1}^{M_\Delta-1}\sum_{x_k\in\Omega_\Delta}\sum_{j=1}^{m}\{\Delta_0 v_j^\nu(l\tau, x_k) + \sum_{s=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{js}^i\Delta_i v_s^\nu(l\tau, x_k) + \sum_{s=1}^{m} b_{js}v_s^\nu(l\tau, x_k)\}\,\varphi_j(l\tau, x_k) =$$

$$= \tau h^n\sum_{l=1}^{M_\Delta-1}\sum_{x_k\in\Omega_\Delta}\sum_{j=1}^{m} f_j(l\tau, x_k)\,\varphi_j(l\tau, x_k)$$

для $\nu \to \infty$ получим

$$\int_{V_T}\{Lu(t, x) - f(t, x)]\,\varphi(t, x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0$$

для любой вышеуказанной функции φ. В виду плотности таких функций в L_2 и бесконечной дифференцируемости u и f, получим, что u удовлетворяет системе (23). Покажем, что удовлетворяет и условию (24). Благодаря оценкам (41) и (45) можно показать, что $u \in W_2^1(V_{T*})$. Тогда по теореме вложения С. Л. Соболева можно писать

$$\lim_{t\to 0}\int_{S_t} u^2\,\mathrm{d}x = \int_{S_0} u^2\,\mathrm{d}x\,.$$

Но так как очевидно

$$\lim_{t\to 0-}\int_{S_t} u^2\,\mathrm{d}x = 0$$

то $u(0, x) = 0$ для всех $x \in E_n$.

Из финитности f и уравнений (31) следует также финитность u. Однозначность такого решения и сходимость всей последовательности u_Δ^ν вытекает из теоремы 2.1.

4. Задача Коши для $f \in W_2^{m-1}$.

Определение 4.1. Будем называть векторную функцию $u \in L_2(V_T)$ сильным решением задачи (23), (24), если существует последовательность функций $u_\nu \in D$, $\nu = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющих (24), такая, что

$$\lim_{\nu \to \infty} \|Lu_\nu - f\|_{W_2^{m-1}} = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{\nu \to \infty} \|u_\nu - u\|_{L_2} = 0 \,.$$

Теорема 4.1. *Пусть* L *удовлетворяет условиям* а)—в) п. 1. *Пусть* $f \in W_2^{m-1}(V_T)$. *Тогда существует одно и только одно сильное решение задачи* (23), (24).

Доказательство. Для $f \in W_2^{m-1}$ существует (см. [2] стр. 340—343) последовательность функций f_ν, $f_\nu \in D$, $\nu = 1, 2, \ldots$ такая, что

$$\lim_{\nu \to \infty} \|f_\nu - f\|_{W_2^{m-1}} = 0 \,.$$

Для каждой функции f_ν существует по теореме 3.1 функция u_ν, удовлетворяющая (24) и системе

$$Lu_\nu = f_\nu \,.$$

Из неравенства (22) следует

$$\|u_\nu - u_\mu\|_{L_2} \leqq C\|f_\nu - f_\mu\|_{W_2^{m-1}} \,, \quad \nu, \mu = 1, 2, \ldots$$

где C не зависит от μ, ν. Следовательно, последовательность функций u_ν является фундаментальной и в силу полноты L_2 существует $u \in L_2$ такая, что

$$\lim_{\nu \to \infty} \|u_\nu - u\|_{L_2} = 0$$

и которая есть искомым сильным решением задачи (23), (24). Единственность следует из неравенства (22), которому удовлетворяет очевидно и сильное решение.

5. Задача Коши для $f \in L_2(V_T)$.

Определение 5.1. Пусть $f \in L_2(V_T)$. Линейный ограниченный функционал $u \in W_2^{-m+1}$ будем называть сильным решением системы уравнений (23) при начальных условиях (24), если существует последовательность $\{u_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ векторных функций $u_\nu \in D$, удовлетворяющих условиям (24) такая, что

$$\lim_{\nu \to \infty} \|Lu_\nu - f\|_{L_2} = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{\nu \to \infty} \|u_\nu - u\|_{W_2^{-m+1}} = 0 \,.$$

Для доказательства существования решения задачи Коши для произвольной функции $f \in L_2$ мы должны предположить, что тоже для оператора

$$L^* = -\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} A_i^* \frac{\partial}{\partial x_i} + B^*$$

выполняются условия б) и в) из п. 1. Так как условие а) выполнено автоматически благодаря гиперболичности L, то L^* тоже гиперболический оператор. Тогда мы можем, используя предшествующие результаты, доказать энергетическое неравенство в норме $\| \ \|_{W_2^{-m+1}}$.

Теорема 5.1. *Пусть L и L^* гиперболические операторы и $u = [u_1, u_2, \dots, u_m]$, $u \in D$ вещественная векторная функция, удовлетворяющая условиям* (24). *Тогда имеет место неравенство*

$$\|u\|_{W_2^{-m+1}} \leqq C\|Lu\|_{L_2} \tag{49}$$

где постоянная C не зависит от u.

Доказательство. По теореме 3.1 существует для каждой функции $v \in D$ одна и только одна функция $w \in D$, являющаяся решением задачи Коши для системы $L^*w = v$ с нулевыми начальными условиями при $t = T$. Потому что в (3) можно взять точную верхнюю грань только по функциям $v \in D$, и так как существует (по теореме 2.1) положительная постоянная C независящая на w такая, что для $w \in D$, $w_i(T, x) = 0$ для $i = 1, 2, \dots, m$ имеет место неравенство

$$\|w\|_{L_2} \leqq C\|L^*w\|_{W_2^{m-1}},$$

можем писать

$$\|u\|_{W_2^{-m+1}} = \sup_{w \in D} \frac{|(u, v)_{L_2}|}{\|v\|_{W_2^{m-1}}} \leqq C \sup_{w} \frac{|(Lu, w)_{L_2}|}{\|w\|_{L_2}}$$

откуда в силу неравенства $(Lu, w)_{L_2} \leqq \|Lu\|_{L_2} \cdot \|w\|_{L_2}$ получим неравенство (49).

Из этой теоремы следует непосредственно однозначность решения задачи (23), (24) в $W_2^{-m+1}(V_T)$. Следующая теорема доказывается так-же, как теорема 4.2.

Теорема 5.2. *Пусть L, L^* гиперболические операторы. Тогда для любой функции $f \in L_2$ существует один и только один функционал $u \in W_2^{-m+1}$, являющийся сильным решением задачи* (23), (24).

Определение 5.2. Пусть $f \in L_2$. Функционал $u \in W_2^{-m+1}$ будем называть слабым решением задачи (23), (24), если для всех $\varphi \in D$, $\varphi(t, x) = 0$ для $t = T$ имеет место равенство

$$(f, \varphi)_{L_2} = (u, L^*\varphi)_{W_2^{-m+1}}.$$

Теорема 5.3. *Если L^* гиперболический, то существует одно и только одно слабое решение задачи* (23), (24) *для любой функции $f \in L_2(V_T)$.*

Доказательство. Оператор L^* отображает $D^0 = \{\varphi; \varphi \in D, \ \varphi = 0$ для $t = T\}$ на D взаимнооднозначно. Пусть $L\varphi = \psi$. Тогда формула

$$h(\psi) = (f, \varphi)_{L_2}$$

определяет на всюду плотном множестве $D \in W_2^{m-1}$ линейный функционал, который в виду

$$|h(\psi)| = |(f, \varphi)| \leqq \|f\|_{L_2} \cdot \|\varphi\|_{L_2} \leqq C\|f\|_{L_2} \cdot \|L^*\varphi\|_{W_2^{m-1}} = C\|f\|_{L_2} \cdot \|\psi\|_{W_2^{m-1}}$$

также ограничен. Следовательно существует один и только один элемент $u \in W_2^{-m+1}$ такой, что

$$h(\psi) = (u, \psi) = (u, L^*\varphi)$$

для любой $\varphi \in D$, $\varphi = 0$ для $t = T$, $x \in E_n$. Теорема доказана.

6. Примеры. Покажем, что для $f \in W_2^{m-1}(V_T)$ можно в общем случае гарантировать существование сильного решения только в L_2. Для этого постром систему двух уравнений для функций u_1, u_2 двух независимых переменных t, x, удовлетворяющую условиям гиперболичности с правой частью в $W_2^1(V_T)$, решение которой принадлежит L_2, но не принадлежит $W_2^1(V_T)$. Рассмотрим систему

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u_1 - u_2) = f_1\,, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u_1 - u_2) = f_2 \tag{50}$$

с начальными условиями

$$u_i(0, x) = 0\,, \quad x \in E_1\,, \quad i = 1, 2\,. \tag{51}$$

Эта система гиперболична (нуль есть двухкратным корнем характеристического уравнения). Вычитая второе уравнение из первого, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_1 - u_2) = f_1 - f_2\,. \tag{52}$$

Из (52) и (50) имеем

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = f_1 + \frac{\partial}{\partial x}\int_0^t (f_2 - f_1)\,\mathrm{d}\tau\,, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} = f_2 + \frac{\partial}{\partial x}\int_0^t (f_2 - f_1)\,\mathrm{d}\tau\,. \tag{53}$$

Возьмем теперь $f = [f_1, f_2]$ в следующем виде:

$$f_1(t, x) = 0 \qquad \text{для} \quad t \geqq 0,\ x \in E_1\,,$$

$$f_2(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad t \geqq 0,\ x < 0 \\ 6t^2\, x\, \varphi(x) & \text{для} \quad t \geqq 0,\ x \geqq 0 \end{cases}$$

где $\varphi(x)$ бесконечно дифференцируемая функция и такая, что

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad |x| \geqq K + 1 \\ 1 & \text{для} \quad |x| \leqq K \\ 0 \leqq \varphi \leqq 1 & \text{для} \quad K \leqq |x| \leqq K + 1 \end{cases}$$

где $K > 0$ некоторая постоянная. Потом решение задачи (50), (51) в смысле нашего определения дано формулами

$$u_1(t, x) = \int_0^t g_2(\tau, x)\, d\tau\,, \quad u_2(t, x) = \int_0^t g_2(\tau, x)\, d\tau + \int_0^t f_2(\tau, x)\, d\tau\,,$$

где

$$g_2(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t f_2(\tau, x)\, d\tau\,,$$

что легко проверить, приближая f_2 с помощью средних функций (см. [2], стр. 342). Очевидно

$$u_i(t, x) = 0 \qquad \text{для} \quad x < 0,\ t \geqq 0,\ i = 1, 2$$

$$u_1(t, x) = \frac{t^4}{2}\,, \quad u_2(t, x) = \frac{t^4}{2} + 2t^3 x \quad \text{для} \quad 0 \leqq x \leqq K, t \geqq 0\,.$$

Эти функции имеют скачок $t^4/2$ на прямой $x = 0$, так что они не принадлежат $W_2^1(V_T)$.

Условия б), в) определения гиперболичности для системы с главной частью данной левой частью (50) сводятся к тому, что матрица B должна иметь вид

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ -b_{11} & -b_{12} \end{pmatrix}$$

где b_{11}, b_{12} произвольные.

На примере системы (50) также легко показать, что не имеет место энергетическое неравенство

$$\|u\|_{L_2} \leqq C\|Lu\|_{L_2}$$

которое верно в случае различных корней характеристического уравнения. Возьмем последовательность функций $f_1^n \equiv 0$, $f_2^n = \sin nx \,.\, \varphi(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, где $\varphi(x)$ такая-же, что и в предыдущем примере. Тогда соответствующие решения задачи (50), (51) имеют вид

$$u_1^n(t, x) = \frac{t^2}{2} \left[\varphi(x) \sin nx + n\, \varphi'(x) \cos nx\right], \quad u_2^n(t, x) = u_1^n + \varphi(x)\, t \sin nx\,.$$

Отсюда видно, что нормы u_1^n, u_2^n в $L_2(V_T)$ неограничены, в то время как

$$\|f_2^n\|_{L_2} \leqq T \,.\, (K + 1)\,.$$

Литература

[1] *G. Peyser:* Energy inequalities for hyp. equations in several variables with multiple characteristics and const. coeff. Trans. Am. Math. Soc. Vol. *108*, (1963), p. 478–490.

[2] *В. И. Смирнов:* Курс высшей математики, т. 5. Физматгиз. Москва 1960.

[3] *О. А. Ладыженская:* Смешанная задача для гиперболического уравнения, ГТТЛ Москва 1953.

[4] *A. Lax:* On Cauchy's problem for part. dif. equations with multiple characteristics. Communications of pure and applied math. Vol. *IX*, No 2, str. 135–170, 1956.

[5] *Y. Ohya:* Lé problème de Cauchy pour les équations à characteristiques multiples. Journal of the Math. Soc. of Japan, t. *16*, p. 268–286, 1964.

[6] *J. Leray, Y. Ohya:* Systèmes lineaires hyperboliques non stricts. Seminaire sur les équations aux derivées part. Collège de France, 1964.

Адреса авторов: Jiří Kopáček, Praha 8 - Karlín, Sokolovská 83 (Matematicko-fyzikální fakulta KU); Marie Suchá, Praha 2, Vyšehradská 49 (ÚTAM ČSAV).

Výtah

CAUCHYOVA ÚLOHA PRO SLABĚ HYPERBOLICKÉ SOUSTAVY LINEÁRNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY

JIŘÍ KOPÁČEK, MARIE SUCHÁ, Praha

Pro soustavu (1) je dokázána existence a unicita silného řešení ($\in L_2$) pro $f \in W_2^{n-1}$ slabého řešení ($\in W_2^{-n+1}$) pro $f \in L_2$ a stabilita jistého diferenčního schématu za předpokladu, že rovnice det $|\lambda E + \xi_i A_i| = 0$ má pouze reálné kořeny a při jistých omezeních na matici B.

Summary

THE CAUCHY PROBLEM FOR WEAKLY HYPERBOLIC SYSTEMS OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENTS

JIŘÍ KOPÁČEK, MARIE SUCHÁ, Praha

The existence and uniqueness of the strong solution ($\in L_2$ for $f \in W_2^{n-1}$) and of the weak solution ($\in W_2^{-n+1}$ for $f \in L_2$) of the system (1) is proved. The stability of some difference schemas for (1) is established. The weak hyperbolicity means that the characteristic equation has only real roots and that B satisfies some further conditions.