Časopis pro pěstování matematiky

Ladislav Mišík

Über die Klasse $\mathcal{M}_2$

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 91 (1966), No. 4, 389--393

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117580`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 91 (1966), Praha

ÜBER DIE KLASSE $\mathscr{M}_2$

LADISLAV MIŠÍK, Bratislava

(Eingelangt am 8. September 1965)

1. Z. ZAHORSKI definiert in [5] die Klasse $\mathscr{M}_2$. Eine Menge $A \subset (-\infty, \infty)$ hat die Eigenschaft M_2, wenn sie entweder leer ist, oder wenn sie eine F_σ-Menge mit folgender Eigenschaft ist: Es ist $m(A \cap J) > 0$ für jedes abgeschlossene Intervall J, welches mindestens eines seiner Endpunkte aus A hat. Dabei bedeutet m das lebesguesche Maß. Die Klasse $\mathscr{M}_2$ ist die Klasse aller Funktionen f, für welche die Mengen $\{x : f(x) > a\}$ und $\{x : f(x) < a\}$ für jede Zahl a die Eigenschaft M_2 haben. Die Funktion f hat die Eigenschaft von Denjoy, wenn sie Borelmeßbar ist und wenn für jedes offene Intervall J und jede zwei Zahlen a und b, $a < b$, folgendes gilt: es ist $m(\{x : x \in \bar{J},\ a < f(x) < b\}) = 0$ nur in dem Fall, wenn $\{x : x \in \bar{J},\ a < f(x) < b\}$ leer ist. Dabei bedeutet $\bar{J}$ die abgeschlossene Hülle von J. Es ist bekannt, daß eine Funktion aus der ersten Baireschen Klasse mit der Eigenschaft von Darboux existiert, welche die Eigenschaft von Denjoy nicht hat [4]. Das geht auch aus der Tatsache hervor, daß die Klasse $\mathscr{M}_1$ aller Funktionen aus der ersten Baireschen Klasse mit der Eigenschaft von Darboux nicht mit der Klasse $\mathscr{M}_2$ identisch ist [5]. Es ist leicht ersichtlich, daß jede Funktion aus der ersten Baireschen Klasse mit der Eigenschaft von Denjoy aus der Klasse $\mathscr{M}_2$ ist. In diesem Artikel werden wir beweisen, daß jede Funktion aus der Klasse $\mathscr{M}_2$ die Eigenschaft von Denjoy hat. Wir werden hier ein Problem aus [3], S. 429 lösen. Daraus wird unser Resultat über die Klasse $\mathscr{M}_2$ folgen.

2. Wir werden den n-dimensionalen euklidischen Raum E_n betrachten. Das System $\mathscr{B}$ wird eine Basis von offenen Mengen in E_n bedeuten. Wir werden weiter annehmen, daß die Basis $\mathscr{B}$ folgende vier Eigenschaften hat:

(1*) Zu jeder offenen Menge U, zu jedem Punkt $x \in E_n$ und zu jedem $B \in \mathscr{B}$, für welche $x \in U$ und $x \in \bar{B}$ gilt, existiert ein $C \in \mathscr{B}$ so, daß $C \subset U \cap B$ und $x \in \bar{C} - C$ ist.

(1**) Es ist $m(\bar{B} - B) = 0$ für jedes $B \in \mathscr{B}$.

(1***) Für jedes $B \in \mathscr{B}$, zu jedem $x \in \bar{B} - B$ und jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine offene Umgebung U von x so, daß $B \cap U$ eine zusammenhängende Menge ist und U in der ε-sphärischen Umgebung von x enthalten ist.

(2) Für jede Zerlegung $B = A_1 \cup A_2$, $B \in \mathscr{B}$, in zwei disjunkten nicht leere Teile mit der Eigenschaft:

Wenn $C \in \mathscr{B}$, $C \subset A_1$, bzw. $C \subset A_2$ ist, dann ist $\bar{C} \cap B \subset A_1$, bzw. $\bar{C} \cap B \subset A_2$, sind die Mengen $A_1' \cap A_2$ und $A_1 \cap A_2'$ nicht leer.

Dabei bedeutet A_1' die Ableitung der Menge A_1.

Diese vier Eigenschaften haben unter anderem die Basis aller offenen Intervalle in E_n und die Basis aller offenen sphärischen Umgebungen in E_n.

Wir gehen zu der Definitionen der Klassen $\mathscr{M}_2(\mathscr{B})$ und $\mathscr{D}_1(\mathscr{B})$ über. Die Klasse $\mathscr{M}_2'(\mathscr{B})$ definieren wir als die Klasse aller Borelmeßbaren Funktionen f, für welche die Mengen $\{x : x \in \bar{B}, f(x) > a\}$ und $\{x : x \in \bar{B}, f(x) < a\}$ für jedes $B \in \mathscr{B}$ und für jede Zahl a entweder leer oder von positivem lebesgueschem Maß sind. Die Klasse $\mathscr{D}_1'(\mathscr{B})$ ist die Klasse aller Borelmeßbaren Funktionen f, welche die Eigenschaft von Denjoy haben, d.h. für sie sind die Mengen $\{x : x \in \bar{B},\ a < f(x) < b\}$ für jedes $B \in \mathscr{B}$ und für jede zwei Zahlen a und b, $a < b$, entweder leer oder von positivem lebesgueschem Maß. Es ist evident, daß $\mathscr{D}_1'(\mathscr{B}) \subset \mathscr{M}_2'(\mathscr{B})$ ist. Die Klasse $\mathscr{M}_2(\mathscr{B})$, bzw. $\mathscr{D}_1(\mathscr{B})$ ist die Klasse aller Funktionen aus der ersten Baireschen Klasse, die zugleich aus der Klasse $\mathscr{M}_2'(\mathscr{B})$, bzw. $\mathscr{D}_1'(\mathscr{B})$ sind. Es gilt $\mathscr{D}_1(\mathscr{B}) \subset \mathscr{M}_2(\mathscr{B})$.

Unter der Klasse $\mathscr{M}_*'(\mathscr{B})$ verstehen wir die Menge aller Funktionen f, für welche die Mengen $\{x : f(x) \geqq a\}$ und $\{x : f(x) \leqq a\}$ folgende Eigenschaft haben: Wenn $B \in \mathscr{B}$ ist und wenn $B \subset \{x : f(x) \geqq a\}$, bzw. $B \subset \{x : f(x) \leqq a\}$ gilt, dann gilt auch $\bar{B} \subset \{x : f(x) \geqq a\}$, bzw. $\bar{B} \subset \{x : f(x) \leqq a\}$. Man beweist leicht, daß $\mathscr{M}_2'(\mathscr{B}) \subset \subset \mathscr{M}_*'(\mathscr{B})$ ist. Daraus und aus dem Satz 1 aus [2] geht hervor, daß jede Funktion aus der Klasse $\mathscr{M}_2(\mathscr{B})$ die Eigenschaft von Darboux hat.

Die Klasse $\mathscr{M}_2$ ist die Klasse $\mathscr{M}_2(\mathscr{B})$ für den Fall, wenn $\mathscr{B}$ die Basis aller offenen Intervalle in E_1 bedeutet. In diesem Fall werden wir die Klasse $\mathscr{M}_2'(\mathscr{B})$ auch als $\mathscr{M}_2'$ bezeichnen.

Satz 1. *Es gilt* $\mathscr{D}_1(\mathscr{B}) = \mathscr{M}_2(\mathscr{B})$.

Beweis. Man muß nur die Relation $\mathscr{M}_2(\mathscr{B}) \subset \mathscr{D}_1(\mathscr{B})$ beweisen. Es sei also $f \in \in \mathscr{M}_2(\mathscr{B}) - \mathscr{D}_1(\mathscr{B})$. Wir werden zeigen, daß diese Annahme zu einem Widerspruch führt.

Da $f \notin \mathscr{D}_1(\mathscr{B})$ ist, existiert ein offenes Intervall (a, b) und ein Element B aus der Basis $\mathscr{B}$ so, daß die Menge $\{x : x \in \bar{B},\ f(x) \in (a, b)\}$ eine nicht leere Menge ist und $m(\{x : x \in \bar{B},\ f(x) \in (a, b)\}) = 0$ ist. Wir definieren jetzt zwei Mengen A_1 und A_2 folgendermaßen: es ist $A_1 = \{x : x \in \bar{B},\ f(x) \leqq a\}$ und $A_2 = \{x : x \in \bar{B},\ f(x) \geqq b\}$.

Nehmen wir folgende Menge in Betracht: $P = \bar{B} - (\mathrm{int}_B A_1 \cup \mathrm{int}_B A_2)$, wobei $\mathrm{int}_B A_1$, bzw. $\mathrm{int}_B A_2$ das Innere von der Menge A_1, bzw. A_2 relativ zu $\bar{B}$ bedeutet. Die Menge P ist relativ zu $\bar{B}$ abgeschlossen, also ist sie auch abgeschlossen. Wir werden jetzt zeigen, daß die Menge P eine nicht leere perfekte Menge ist.

Zuerst gilt $\{x : x \in \bar{B},\ a < f(x) < b\} \subset P$. Da die Menge $\{x : x \in \bar{B},\ a < f(x) < b\}$ nicht leer ist, ist die Menge P nicht leer.

Weiter muß $P \subset A'_1 \cap A'_2$ sein. Wir werden zeigen, daß die Annahme $x \in P$, $x \notin A'_1$ zu einem Widerspruch führt. Wenn $x \in P$, $x \notin A'_1$ ist, existiert eine offene Menge U, für welche $x \in U$ und $U \cap A_1 \subset \{x\}$ gilt. Betrachten wir ein beliebiges Element u aus $\bar{B} \cap U$. Dann existiert nach (1*) eine offene Menge $C \in \mathscr{B}$ so, daß $u \in \in \bar{C} - C$ und $C \subset B \cap U$ ist. Da die Menge $C \cap A_1$ in $\{x\}$ enthalten ist, da $f \in \mathscr{M}_2(\mathscr{B})$ ist und weil die Gleichung $m(\{x : x \in \bar{B}, a < f(x) < b\}) = 0$ gilt, muß $f(u) \geqq b$ sein. Daraus folgt jetzt, daß $\bar{B} \cap U \subset A_2$ ist. Also muß $x \in \bar{B} \cap U \subset \operatorname{int}_B A_2$ sein. Das ist aber unmöglich, weil $x \in P$ ist. Ähnlich bekommt man ein Widerspruch, wenn man $x \in P$ und $x \notin A'_2$ annimmt. So haben wir beweisen, daß $P \subset A'_1 \cap A'_2$ ist.

Wir werden jetzt beweisen, daß die Menge $A^c = \{x : x \in \bar{B}, f(x) = c\}$ für jedes c aus dem Intervall (a, b) eine dichte Teilmenge von P ist. Es sei $x \in P \cap B$ und C eine solche offene Menge aus $\mathscr{B}$, welche den Punkt x enthält und welche in B enthalten ist. Da $P \subset A'_1 \cap A'_2$, $x \in P$ und $x \in C$ ist, existieren zwei Punkte u und v aus C so, daß $f(u) \leqq a$ und $f(v) \geqq b$ ist. Da die Funktion f die Eigenschaft von Darboux bezüglich der Basis $\mathscr{B}$ hat, ist der Durschnitt $\{x : x \in \bar{B}, f(x) = c\} \cap C$ nicht leer. Wenn $x \in \in P \cap (\bar{B} - B)$ ist, dann existiert nach (1***) zu jedem $\varepsilon > 0$ eine offene Umgebung U von x so, daß $B \cap U$ eine zusammenhängende Menge ist, und U in der ε-sphärischen Umgebung des Punktes x enthalten ist. Da die Menge $B \cap U$ zusammenhängend ist, kann nicht $B \cap U = ((\operatorname{int}_B A_1) \cap U) \cup ((\operatorname{int}_B A_2) \cap U)$ sein. Es muß also mindestens ein Punkt u aus P in $B \cap U$ enthalten sein. Aus der vorigen Betrachtung geht hervor, daß in $B \cap U$ mindestens ein z existiert, für das $f(z) = c$ ist. Damit haben wir bewiesen, daß die Menge $\{x : x \in \bar{B}, f(x) = c\}$ eine dichte Teilmenge in P ist. So ist die Menge P eine nicht leere abgeschlossene und in sich dichte Menge, also ist sie perfekt.

Daraus folgt jetzt, daß die partielle Funktion f auf P keinen Stetigkeitspunkt bezüglich der Menge P in P hat. Das ist aber ein Widerspruch, weil die Funktion f aus der ersten Baireschen Klasse ist.

Es gilt:

Folgerung. *Jede Funktion aus der Klasse $\mathscr{M}_2$ hat die Eigenschaft von Denjoy.*

Der Satz 1 gibt in machen Fällen die Lösung des Problems aus [3], S. 429.

3. **Satz 2.** *Es sei $\mathscr{B}$ eine Basis in E_2, für welche folgendes gilt:*

Für jedes $B \in \mathscr{B}$ und jedes $(x_0, y_0) \in \bar{B}$ enthält die Menge $\bar{B}$ für ein geeignetes $\delta > 0$ mindestens eine von diesen vier Mengen: $\{(u, y_0) : x_0 \leqq u < x_0 + \delta\}$, $\{(u, y_0) : x_0 - \delta < u \leqq x_0\}$, $\{(x_0, v) : y_0 \leqq v < y_0 + \delta\}$ und $\{(x_0, v) : y_0 - \delta < < v \leqq y_0\}$.

Es sei $f(x, y)$ eine Funktion auf E_2 definiert, welche für jedes y als Funktion von x und für jedes x als Funktion von y stetig ist. Dann ist die Funktion $f(x, y)$ aus der Klasse $\mathscr{D}_1(\mathscr{B})$.

Beweis. Die Funktion $f(x, y)$ ist aus der ersten Baireschen Klasse [1], S. 285. Für jedes a und b, $a < b$, sind die Mengen $\{(x, y) : (x, y) \in \bar{B}, a < f(x, y) < b\}$ für jedes

$B \in \mathscr{B}$ Borelmeßbare Mengen. Wenn $\{(x, y) : (x, y)\, a < f(x, y) < b\} \neq \emptyset$ ist, dann existiert ein Intervall J entweder an der x-Achse oder an der y-Achse so, daß entweder $m(\{y : (x, y) \in \bar{B},\ a < f(x, y) < b\}) > 0$ für jedes $x \in J$ oder $m(\{x : (x, y) \in \bar{B},\ a < f(x, y) \not< b\}) > 0$ für jedes $y \in J$ ist. Daraus folgt nun, daß $m(\{(x, y) : (x, y) \in \bar{B},\ a < f(x, y) < b\}) > 0$ ist. Also ist die Funktion $f(x, y)$ aus der Klasse $\mathscr{D}_1(\mathscr{B})$.

Die Basis $\mathscr{B}_1$ aller offenen Intervalle in E_2 und die Basis $\mathscr{B}_2$ aller offenen sphärischen Umgebungen in E_2 haben die Eigenschaft, welche im Satze 2 ist. Also ist jede Funktion, welche für jedes x als Funktion von y und für jedes y als Funktion von x stetig ist, aus den Klassen $\mathscr{D}_1(\mathscr{B}_1)$ und $\mathscr{D}_1(\mathscr{B}_2)$. Aus den zwei Beispielen, welche in [3], S. 429 gegeben sind, folgt, daß $\mathscr{M}_2(\mathscr{B}_1) - \mathscr{M}_2(\mathscr{B}_2) \neq \emptyset$ und $\mathscr{M}_2(\mathscr{B}_2) - \mathscr{M}_2(\mathscr{B}_1) \neq \emptyset$ gilt. Wenn $\mathscr{B}_3$ die Basis aller offenen Rechtecke bedeutet, dann ist $\mathscr{M}_2(\mathscr{B}_3)$ eine echte Teilmenge von $\mathscr{M}_2(\mathscr{B}_2)$.

Wir werden noch zeigen, daß eine solche Funktion aus der zweiten Baireschen Klasse existiert, welche aus der Klasse $\mathscr{M}'_2$ ist und die die Eigenschaft von Denjoy nicht hat. Nehmen wir das Intervall $\langle 0, 1\rangle$. Es sei $K_{11} = \langle 0, 1\rangle - \bigcup\{J_i : i = 1, 2, 3, \ldots\}$, wobei $J_1 = (\frac{3}{8}, \frac{5}{8})$, $J_2 = (\frac{5}{32}, \frac{7}{32})$, $J_3 = (\frac{25}{32}, \frac{27}{32})$, $J_4 = (\frac{9}{128}, \frac{11}{128})$, $J_5 = (\frac{37}{128}, \frac{39}{128})$, $J_6 = (\frac{89}{128}, \frac{91}{128})$, $J_7 = (\frac{119}{128}, \frac{121}{128})$, … Jetzt werden wir die Mengen $K_{21}, K_{12}, K_{22}, K_{13}, K_{23}, K_{14}, K_{24}, \ldots$ folgendermaßen definieren: $K_{21} = \bigcup\{J_i \cap \varphi_i(K_{11}) : i = 1, 2, 3, \ldots\}$, $K_{12} = \bigcup\{\bigcup\{J_{ij} \cap \varphi_{ij}(K_{11}) : j = 1, 2, 3, \ldots\} : i = 1, 2, 3, \ldots\}$, $K_{22} = \bigcup\{\bigcup\{\bigcup\{J_{ijk} \cap \varphi_{ijk}(K_{11}) : k = 1, 2, 3, \ldots\} : j = 1, 2, 3, \ldots\} : i = 1, 2, 3, \ldots\}$, $K_{13} = \bigcup\{\bigcup\{\bigcup\{\bigcup\{J_{ijkl} \cap \varphi_{ijkl}(K_{11}) : l = 1, 2, 3, \ldots\} : k = 1, 2, 3, \ldots\} : j = 1, 2, 3, \ldots\} : i = 1, 2, 3, \ldots\}, \ldots$, wobei die Menge $J_i - \varphi_i(K_{11})$ die Summe $\bigcup\{J_{ij} : j = 1, 2, 3, \ldots\}$ von disjunkten offenen Intervallen, die Menge $J_{ij} - \varphi_{ij}(K_{11})$ die Summe $\bigcup\{J_{ijk} : k = 1, 2, 3, \ldots\}$ von disjunkten offenen Intervallen, die Menge $J_{ijk} - \varphi_{ijk}(K_{11})$ die Summe $\bigcup\{J_{ijkl} : l = 1, 2, 3, \ldots\}$ von disjunkten offenen Intervallen, …, ist und wobei φ_i, bzw. φ_{ij}, bzw. φ_{ijk}, bzw. $\varphi_{ijkl}, \ldots$ die lineare Abbildung von $\langle 0, 1\rangle$ auf J_i, bzw. J_{ij}, bzw. J_{ijk}, bzw. $J_{ijkl}, \ldots$ ist, welche die Zahl 1 in den rechten Endpunkt und die Zahl 0 in den linken Endpunkt des Intervalls abbildet. Es sei $K_1 = \bigcup\{K_{1i} : i = 1, 2, 3, \ldots\}$ und $K_2 = \bigcup\{K_{2i} : i = 1, 2, 3, \ldots\}$. Die Mengen K_1 und K_2 haben folgende Eigenschaften: 1°. Sie sind F_σ-Mengen und 2°. für jedes Intervall $J \subset \langle 0, 1\rangle$ gilt: $m(J \cap K_1) > 0$ und $m(J \cap K_2) > 0$ und $m(J \cap K_1) + m(J \cap K_2) = m(J)$.

Es sei f die reelle Funktion, welche auf $(-\infty, \infty)$ folgendermaßen definiert ist: $f(x) = 1$ für $x \in K_1$, $f(x) = 0$ für $x \in K_2$ und $f(x) = \frac{1}{2}$ für $x \notin K_1 \cup K_2$. Die Funktion f ist aus der zweiten Baireschen Klasse, sie ist weiter aus $\mathscr{M}'_2$ und hat nicht die Eigenschaft von Denjoy, weil die Menge $\{x : x \in \langle 0, 1\rangle, \frac{1}{4} < f(x) < \frac{2}{3}\}$ eine nicht leere Menge von lebesgueschem Maß Null ist.

Es besteht die Frage, ob eine solche Funktion existiert, welche zugleich zu der zweiten Baireschen Klasse mit der Eigenschaft von Darboux und zu der Klasse $\mathscr{M}'_2$ gehört und die Eigenschaft von Denjoy nicht hat.

Literatur

[1] *Kuratowski C.:* Topologie I, Warszawa 1952.
[2] *Mišík L.:* Über die Funktionen der ersten Baireschen Klasse mit der Eigenschaft von Darboux, Mat. fyz. časopis SAV *14* (1964), 44—48.
[3] *Mišík L.:* Über die Eigenschaft von Darboux und einigen Klassen von Funktionen, Revue roum. Math. Pures Appl. *11* (1966), 411—430.
[4] *Weil C. E.:* On properties of derivatives, Trans. Amer. Math. Soc. *114* (1965), 363—376.
[5] *Zahorski Z.:* Sur la première dérivée. Trans. Amer. Math. Soc. *69* (1950), 1—54.

Anschrift des Verfassers: Bratislava, Obrancov mieru 41 (Matematický ústav SAV).

Výťah

O TRIEDE $\mathcal{M}_2$

LADISLAV MIŠÍK, Bratislava

V práci sa dokazuje, že každá funkcia zo Zahorskeho triedy $\mathcal{M}_2$ má Denjoyovu vlastnosť, tj. pre každý uzavretý interval J a pre každé dve čísla a a b je množina $\{x\colon x \in J,\ a < f(x) < b\}$ buď prázdna alebo kladnej lebesgueovej miery. Okrem toho je tu príklad funkcie druhej triedy Bairea nemajúcej Denjoyovu vlastnosť, u ktorej množiny $\{x\colon x \in J,\ f(x) > a\}$ a $\{x\colon x \in J,\ f(x) < a\}$ pre každé číslo a a každý uzavretý interval J sú buď prázdne alebo kladnej lebesgueovej miery.

Резюме

О КЛАССЕ $\mathcal{M}_2$

ЛАДИСЛАВ МИШИК (Ladislav Mišík), Братислава

В работе доказывается, что каждая функция из класса Загорского $\mathcal{M}_2$ обладает свойством Данжоа, т. е. для каждого закрытого интервала I и для каждых двух чисел a и b множество $\{x\colon x \in I,\ a < f(x) < b\}$ является или пустым, или имеет положительную меру Лебега. Кроме того, здесь дается пример функции второго класса Бера, необладающей свойством Данжоа, для которой множества $\{x\colon x \in I, f(x) > a\}$ и $\{x\colon x \in I, f(x) < a\}$ для каждого закрытого интервала I являются либо пустыми, либо имеют положительную меру Лебега.