Časopis pro pěstování matematiky, roč. 91 (1966), Praha

PRÍSPEVOK KU GEOMETRII KONVEXNÝCH MNOHOSTENOV V n-ROZMERNOM EUKLIDOVSKOM PRIESTORE

PAVEL BARTOŠ, Bratislava

(Došlo dňa 14. septembra 1965)

V euklidovskom n-rozmernom priestore E_n $(n \geqq 2)$ je dané m $(m > n)$ polpriestorov

(1) $$\pi_i = \vec{a}_i\vec{x} - h_i \leqq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

ktoré vyjadríme rovnicami

(2) $$\pi_i = \vec{a}_i\vec{x} - h_i = -q_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

kde q_i je nezáporný parameter, ktorý nazveme oporným parametrom roviny π_i, lebo istým spôsobom súvisí s oporným číslom h_i tento roviny. Ak treba prejsť k polpriestoru opačnému, píše sa $-q_i$ miesto q_i.

Prenik m polpriestorov (2) je konvexný m-sten, ak

1) má vnútorné body a

2) každá z m hraničných rovín $\pi_i = 0$ týchto polpriestorov obsahuje stenu mnohostena.

Mnohosten je potom buď ohraničený, buď neohraničený.

Či dané polpriestory (2) skutočne určujú konvexný m-sten majúci vlastnosti 1) a 2), závisí pri daných vektoroch $\vec{a}_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,n})$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ od hodnôt oporných čísel h_i rovín π_i. O tom sú známe vety 1 a 2 v § 5 kap. VII diela [1]. V tejto práci vyslovíme nutné a postačujúce podmienky existencie konvexného mnohostena určeného polpriestormi (2) pomocou oporných parametrov q_i. Príslušné vety sú aplikabilné v konkrétnych prípadoch a umožňujú aj snadné zisťovanie topologických vlastností konvexného mnohostena.

Predpokladajme, že vektory $\vec{a}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, sú lineárne nezávislé, takže roviny π_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, majú spoločný práve jeden bod (čím zo svojich úvah vylučujeme bezvrcholové hranoly) a platí

(3) $$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1}, \ldots, a_{1,n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}, \ldots, a_{n,n} \end{vmatrix} \neq 0$$

Z rovníc (2) pre $i = 1, 2, \ldots, n$ sa potom určí

$$x_j = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1}, \ldots, a_{1,j-1}, & h_1 - q_1, & a_{1,j+1}, \ldots, a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1}, \ldots, a_{n,j-1}, & h_n - q_n, & a_{n,j+1}, \ldots, a_{n,n} \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{4}$$

Ak oporné parametre $q_1, q_2, \ldots, q_n$ nadobúdajú nezávisle na sebe všetky možné nezáporné hodnoty, určujú vzťahy (4) súradnice práve všetkých spoločných bodov polpriestorov (2) pre $i = 1, 2, \ldots, n$. Bod $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ teda bude bodom preniku všetkých polpriestorov (2) vtedy a len vtedy, keď jeho súradnice (4) spĺňajú rovnice (2) pre $i = n + 1, n + 2, \ldots, m$. Po dosadení a úprave dostaneme

$$\begin{vmatrix} a_{n+k,1}, \ldots, a_{n+k,n}, & q_{n+k} - h_{n+k} \\ a_{1,1}, \ldots, a_{1,n}, & q_1 - h_1 \\ \ldots & \ldots \\ a_{n,1}, \ldots, a_{n,n}, & q_n - h_n \end{vmatrix} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m - n$$

To je $m - n \geqq 1$ (jedna v prípade simplexu v E_n) lineárnych rovníc, ktoré môžeme písať v tvare

$$\begin{vmatrix} a_{n+k,1}, \ldots, a_{n+k,n}, & q_{n+k} \\ a_{1,1}, \ldots, a_{1,n}, & q_1 \\ \ldots & \ldots \\ a_{n,1}, \ldots, a_{n,n}, & q_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{n+k,1}, \ldots, a_{n+k,n}, & h_{n+k} \\ a_{1,1}, \ldots, a_{1,n}, & h_1 \\ \ldots & \ldots \\ a_{n,1}, \ldots, a_{n,n}, & h_n \end{vmatrix} = \Delta_k,$$

$k = 1, 2, \ldots, m - n$. Rozvedúc determinant na ľavej strane podľa prvkov posledného stĺpca a označiac alg. doplnok prvku q_l, $l = 1, 2, \ldots, n$, $\delta_{k,l}$, dostaneme rovnice

$$\sum_{l=1}^{n} \delta_{k,l} q_l + (-1)^n \Delta q_n = \Delta_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m - n \tag{5}$$

Rovnice (5), tzv. charakteristické rovnice preniku polpriestorov (2), nie sú identitami vzhľadom na nezáporné premenné q_i, lebo $\Delta \neq 0$. Vyjadrujú nutné a postačujúce podmienky pre oporné parametre $q_1, q_2, \ldots, q_m$, z ktorých prvých n určí podľa (4) súradnice práve všetkých bodov preniku polpriestorov (2). V ďalšom ich použijeme na dokazovanie viet o konvexných mnohostenoch (spomedzi ktorých sme bezvrcholové hranoly vylúčili).

Veta 1. *Prenik polpriestorov* (2) *má vlastnosť* 1) *vtedy a len vtedy, keď sústava rovníc* (5) *s neznámymi* $q_1, q_2, \ldots, q_m$ *má riešenie v obore kladných čísel.*

Dôkaz. Vtedy a len vtedy, keď nezáporné parametre vyhovujú rovniciam (5), sú body pomocou nich podľa (4) určené bodmi preniku všetkých polpriestorov (2). Vtedy a len vtedy, keď všetky tieto parametre sú kladné, leží bod vnútri všetkých polpriestorov (2), a teda je aj vnútorným bodom ich preniku.

Veta 2. *Časť hranice preniku polpriestorov* (2) *ležiaca v rovine* π_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, *má v tejto rovine vnútorné body vtedy a len vtedy, keď rovnice (5) majú riešenie tejto vlastnosti:* $q_i = 0$, $q_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$, $j \neq i$.

Dôkaz. Za uvedených podmienok a len vtedy existuje v rovine π_i taký bod, ktorý náleží do preniku všetkých polpriestorov (2), ale neleží v žiadnej inej hraničnej rovine π_j, $j \neq i$ teda leží vnútri steny v π_i.

Veta 3. *Prenik polpriestorov (2) je konvexný m-sten vtedy a len vtedy, keď sústava rovníc (5) má m riešení tejto vlastnosti:*

$$\alpha_1)\ q_1 = 0,\ q_i > 0,\ i \neq 1\ ;\quad \alpha_2)\ q_2 = 0,\ q_i > 0,\ i \neq 2, \ldots ;$$
$$\alpha_m)\ q_m = 0,\ q_i > 0,\ i \neq m\,.$$

Dôkaz. Podľa vety 2 sú tieto podmienky nutné a postačujúce pre vlastnosť 2). Avšak z existencie riešení α_1), α_2), ..., α_m) vyplýva aj existencia riešenia sústavy (6) v obore kladných čísel[1]), a teda sú tie podmienky nutné a postačujúce aj pre vlastnosť 1). Tým je veta dokázaná.

Veta 4. *Konvexný mnohosten určený polpriestormi (2) je neohraničený vtedy a len vtedy, keď má neohraničené hraničné útvary k-rozmerné,* $k = 1, 2, \ldots, n - 1$.

Takýto mnohosten je určite ohraničený vtedy, keď každý parameter q_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$*-nie nutne všetky spolu-sa vyskytuje aspoň v jednej takej rovnici (5), v ktorej* $\Delta_k \neq 0$, $\delta_{k,i} \neq 0$ *a v ktorej pre všetky nenulové koeficienty* $\delta_{k,j}$ *platí*

$$\operatorname{sign} \delta_{k,j} = \operatorname{sign} (-1)^n \Delta = \operatorname{sign} \Delta_k\,.$$

Dôkaz. Kedže neohraničený konvexný mnohosten má aspoň n neohraničených stien, je tvrdenie pre $k = n - 1$ triviálne. Zároveň je zrejmé, že tieto neohraničené steny – súc časťou hranice neohraničeného ihlana alebo hranola – majú neohraničené hraničné útvary k-rozmerné, $1 \leqq k < n - 1$. Ohraničené telesa tejto vlastnosti nemajú. Tým je dokázaná prvá časť vety.

Správnosť druhej časti vety vyplýva z toho, že za uvedených podmienok sú parametre $q_1, q_2, \ldots, q_n$ a potom aj nimi podľa (5) určené $q_{n+1}, q_{n+2}, \ldots, q_m$ určite ohraničené.

Veta 5. *Nech* $\mathfrak{M}$ *je konvexný m-sten, určený polpriestormi (2). Prenik rovín* $\pi_{i_1}, \pi_{i_2}, \ldots, \pi_{i_k}$ $(i_1, i_2, \ldots, i_k$ *je nejaká kombinácia bez opakovania indexov* $1, 2, \ldots, m$, $2 \leqq k \leqq n)$ *je* $(n - k)$*-rozmerným hraničným útvarom mnohostena* $\mathfrak{M}$ *vtedy a len vtedy, keď sústava (5) má riešenie*

$$q_{i_1} = q_{i_2} = \ldots = q_{i_k} = 0\,,\quad q_l > 0\,,\quad l = 1, 2, \ldots, m\,,\quad l \neq i_1, i_2, \ldots, i_k\,.$$

V prípade $k = n \geqq 3$ *môže platiť aj* $q_e = 0$.

---

[1]) Ak lineárna rovnica o m neznámych má dve riešenia $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, má aj tretie riešenie $((x_1 + y_1)/2, (x_2 + y_2)/2, \ldots, (x_m + y_m)/2)$. Takéto riešenie sústavy (5) odvodené napr. z riešenia α_1) a α_2) však je z oboru kladných čísel.

Dôkaz. Nech $k < n$. Vtedy a len vtedy, keď sú splnené podmienky vety, leží v preniku rovín $\pi_{i_1}, \pi_{i_2}, \ldots, \pi_{i_k}$ taký bod, ktorý je hraničným bodom mnohostena $\mathfrak{M}$, ale neleží v žiadnej inej hraničnej rovine $\pi_l(l \neq i_1, i_2, \ldots, i_k)$ a teda je vnútorným bodom $(n - k)$-rozmerného hraničného útvaru mnohostena $\mathfrak{M}$.

Tvrdenie v prípade $k = n$ (pre vrcholy mnohostena), rozlíšené pre $n = 2$ a $n > 2$, je triviálne.

Pomocou vety 5 možno v konkrétnom prípade vždy rozhodnúť o počte hrán a vrcholov mnohostena, ako aj o ich topologickom rozpoložení.

Veta 6. *Majme maticu reálnych čísel*

$$\begin{pmatrix} a_{1,1}, \ldots, a_{1,n}, h_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m,1}, \ldots, a_{m,n}, h_m \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{1,1}, \ldots, a_{1,n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}, \ldots, a_{n,n} \end{vmatrix} \neq 0, \quad m > n \geqq 2.$$

Nech $\vec{a}_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,n})$, $i = 1, 2, \ldots, m$. *Sústava* $m - n$ *lineárnych rovníc s neznámymi* $q_1, q_2, \ldots, q_m$

$$\begin{vmatrix} a_{n+k,1}, \ldots, a_{n+z,n}, & q_{n+k} - h_{n+k} \\ a_{1,1}, \quad \ldots, a_{1,n}, & q_1 - h_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n,1}, \quad \ldots, a_{n,n}, & q_n - h_n \end{vmatrix} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m - n$$

a) *má riešenie v obore kladných čísel vtedy a len vtedy, keď v tom prípade, že platí pre určité* k, $k \neq i_1, i_2, \ldots, i_{l_0}$

$$\vec{a}_k = \sum_{l=1}^{l_0} v_{k,l}\vec{a}_{i_l} \tag{6}$$

kde $k = 1, 2, \ldots, m$, $1 \leqq l_0 \leqq n$ *vektory* $\vec{a}_{i_l}$ *sú lineárne nezávislé a* $i_1, i_2, \ldots, i_{l_0}$ *je kombinácia indexov* $1, 2, \ldots, m$, *platí v prípade* $v_{k,l} < 0$ *aj* $h_k > \sum_{l=1}^{l_0} v_{k,l}h_{i_l}$ *a* b) *má riešenia*

$$\alpha_1)\ q_1 = 0,\ q_i > 0,\ i \neq 1\,; \quad \alpha_2)\ q_2 = 0,\ q_i > 0,\ i \neq 2, \ldots, ;$$
$$\alpha_m)\ q_m = 0,\ q_i > 0,\ i \neq m$$

vtedy a len vtedy, keď v tom prípade, že existuje rozklad (6) *s udanými vlastnosťami, platí v prípade* $v_{k,l} < 0$ *aj* $h_k > \sum_{l=1}^{l_0} v_{k,l}h_{i_l}$ *a v prípade* $v_{k,l} > 0$ *aj* $h_k < \sum_{l=1}^{l_0} v_{k,l}h_{i_l}$.

Dôkaz. Veta 1(2) § 5 kap. VII. diela [1] vyslovuje nutné a dostačujúce podmienky, aby prenik polpriestorov (2) mal vnútorné body (mal vnútorné body a s každou rovinou π_i spoločný útvar $(n - 1)$-rozmerný).[2] Veta 1 (3) tohoto článku vyjadruje

[2]) O zovšeobecnení pre ľubovoľný priestor E_n hovorí sa v poznámkach v bode 7 cit § — u diela [1].

tie isté podmienky v inej forme. Dokazovaná veta a) (b)) vyjadruje samozrejmú ekvivalenciu týchto podmienok vyslovených v dvoch formách, tým je dokázaná.

Poznámka. Pre $m = n + 1$ možno vetu 6 interpretovať ako nutné a postačujúce podmienky možnosti transformácie determinantu

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, \ldots, a_{1,n}, & h_1 \\ \dots\dots\dots\dots & \\ a_{n+1}, \ldots, a_{n+1,n}, & h_{n+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1}, \ldots, a_{1,n}, & q_1 \\ \dots\dots\dots\dots & \\ a_{n+1,1}, \ldots, a_{n+1,n}, & q_{n+1} \end{vmatrix}$$

pričom sa prvých n stĺpcov nemení a prvky posledného stĺpca sa stanú a) kladnými, b) jeden – a to ktorýkoľvek – nulovým a ostatné kladnými. Obdobne možno interpretovať aj vetu v prípade $m > n + 1$ ako istú transformáciu príslušnej neštvorcovej matice.

Na ukážku použitia odvodených výsledkov uvedieme:

Príklad. Dané sú polpriestory v E_3:

$$z \geqq 0,\ x \geqq 0,\ 2y + z - 2 \leqq 0,\ 2x - 2y + z - 2 \leqq 0,\ z - 2y \geqq 0\,; \tag{7}$$

Dokážte: a) prenikom polpriestorov (7) je ohraničený konvexný päťsten; b) prenikom prvých štyroch polpriestorov (7) a opačného polpriestoru k poslednému je tiež ohraničený konvexný päťsten; c) prenik štyroch posledných polpriestorov (7) a opačného polpriestoru k prvému nie je konvexný päťsten; d) prenik 1., 2., 4. a 5. polpriestoru (7) a opačného polpriestoru k druhému je neohraničený konvexný päťsten.

V prípade a) určte počet hrán v jednotlivých stenách a počet vrcholov mnohostena.

Riešenie. a) Rovnice polpriestorov (7) píšeme pomocou oporných parametrov

$$z = q_1,\ x = q_2,\ 2y + z - 2 = -q_3,\ 2x - 2y + z - 2 = -q_4,\ z - 2y = q_5\,.$$

Z prvých troch rovníc máme $x = q_2$, $y = 1 - \frac{1}{2}(q_1 + q_3)$, $z = q_1$. To dosadíme do ostatných rovníc a po úprave dostaneme rovnice

$$2q_1 + 2q_2 + q_3 + q_4 = 4\,,\quad 2q_1 + q_3 - q_5 = 2 \tag{8}$$

Rozhodujúce riešenia sústavy (8) nájdeme snadno niekoľkými pokusmi, čo veľmi uľahčuje okolnosť, že neznáme $q_{n+1}, \ldots, q_m$ sa vyskytujú práve v jedinej rovnici. Tu napr. nájdeme riešenia

$$(0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})\,;\quad (1, 0, 1\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1\tfrac{1}{2})\,;\quad (1\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, 0, \tfrac{1}{2}, 1)\,;\quad (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 2, 0, 1)\,;$$
$$(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, 1\tfrac{1}{2}, 1\tfrac{1}{2}, 0)\,.$$

Podľa vety 3 je teda uvažovaný prenik konvexný päťsten. Tento je podľa vety 4 ohraničený, lebo parametre q_1, q_2, q_3 sú podľa prvej rovnice (8) ohraničené.

Hrany tohoto päťstena v rovine $q_1 = 0$ určíme takto: V priesečnici rovín $q_1 = 0$, $q_2 = 0$ hrana leží podľa vety 5, lebo sústava (8) má napr. riešenie $(0, 0, 3, 1, 1)$. V priesečnici rovín $q_1 = 0$, $q_3 = 0$ však neleží hrana, lebo z druhej rovnice vyplýva $q_5 = -2$. V priesečnici rovín $q_1 = 0$, $q_4 = 0$ a rovín $q_1 = 0$, $q_5 = 0$ musia, pravdaže, hrany byť, lebo útvar v tejto stene je už určite trojuholnikom.

Obdobne nájdeme, že steny v rovinách $q_2 = 0$, $q_4 = 0$, $q_5 = 0$ tvoria štvoruholníky a v rovine $q_3 = 0$ trojuholník. Teleso teda má $h = \frac{1}{2}(3 + 3 + 3.4) = 9$ hrán. Počet vrcholov podľa Eulerovej vety je $v = 9 + 2 - 5 = 6$. Pomocou vety 5 však môžeme určiť aj topologické rozloženie vrcholov takto:

Priesečník rovín $q_1 = 0$, $q_2 = 0$, $q_3 = 0$ nie je vrcholom päťstena, lebo sústava (8) dá $q_5 = -2$. Priesečník rovín $q_1 = 0$, $q_2 = 0$, $q_4 = 0$ je vrcholom, lebo teraz $q_3 = 4$, $q_5 = 2$. Obdobne nájdeme, že body $q_1 = q_2 = q_5 = 0$, $q_1 = q_4 = q_5 = 0$, $q_2 = q_3 = q_4 = 0$, $q_2 = q_3 = q_5 = 0$, $q_3 = q_4 = q_5 = 0$ sú vrcholmi päťstena, body $q_1 = q_3 = q_4 = 0$, $q_1 = q_3 = q_5 = 0$ a $q_2 = q_4 = q_5 = 0$ však nimi nie sú.

b) Teraz máme charakteristické rovnice (po zmene znamienka q_5 v (8))

$$2q_1 + 2q_2 + q_3 + q_4 = 4\,, \quad 2q_1 + q_3 + q_5 = 2\,.$$

Postupom ukázaným v bode a) sa potvrdí, že i tento prenik je ohraničený konvexný päťsten.

c) Pre tento prenik dostaneme rovnice

$$-2q_1 + 2q_2 + q_3 + q_4 = 4\,, \quad -2q_1 + q_3 - q_5 = 2$$

Tento prenik nie je konvexným päťstenom, lebo pre $q_3 = 0$ druhá rovnica nemá riešenia v obore kladných čísel.

d) V tomto prípade máme charakteristické rovnice

$$2q_1 + 2q_2 - q_3 + q_4 = 4\,, \quad 2q_1 + q_3 - q_5 = 2\,.$$

Ukázaným postupom potvrdíme, že prenik je konvexný päťsten. Jeho neohraničenosť sa dokáže podľa vety 4 takto:

V priesečnici rovín $q_1 = 0$, $q_2 = 0$ má päťsten hranu, lebo sústava $-q_3 + q_4 = 4$, $q_3 - q_5 = 2$ má napr. riešenie $q_3 = 3$, $q_4 = 7$, $q_5 = 1$. Snadno sa presvedčíme, že riešením tej sústavy sú aj všetky čísla $3 + z$, $7 + z$, $1 + z$, kde z je ľubovoľné číslo. Pri kladnom z dostaneme tak ľubovoľne veľké kladné hodnoty týchto parametrov, čo značí, že táto hrana a tým aj päťsten sú neohraničené.

Literatúra

[1] *A. D. Alexandrov:* Vypuklije mnogogranniki, Moskva—Leningrad, 1950.

Adresa autora: **Bratislava, Sibírska 9.**

Резюме

К ГЕОМЕТРИИ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ В n-МЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

ПАВЕЛ БАРТОШ (Pavel Bartoš), Братислава

В работе выводятся необходимые и достаточные условия для того, чтобы пересечение m полупространств (2) было выпуклым m-гранником. Эти условия выражаются при помощи опорных параметров $q_1, q_2, \ldots, q_m$, удовлетворяющих характеристическим уравнениям (5), строение которых выражает и топологическую структуру многогранника. Из рассуждений вытекает теорема 6, касающаяся определенного преобразования матриц действительных чисел.

Summary

CONTRIBUTION TO THE GEOMETRY OF CONVEX POLYHEDRA IN n-SPACE

PAVEL BARTOŠ, Bratislava

Necessary and sufficient conditions are found for the intersection of semispaces (2) to be an n-dimensional convex polyhedron. These conditions are expressed in terms of support parameters $q_1, q_2, \ldots, q_m$ satisfying the characteristic equations (5); their structure also describes the topological constitution of the polyhedron. In the course of this there is obtained theorem 6 concerning a certain transformation of real matrices.