Časopis pro pěstování matematiky, roč. 90 (1965), Praha

RŮZNÉ

O JEDNEJ VLASTNOSTI ROVNOSTRANNÉHO TROJUHOLNÍKA A NIEKTORÝCH INÝCH TROJUHOLNÍKOV

PAVEL BARTOŠ, Bratislava

V práci sa študujú riešenia systému rovníc (1), pričom o koeficientoch a, b, c sa predpokladá, že predstavujú dĺžky strán trojuholníka.

Budeme vyšetrovať riešenia (x, y, z) systému rovníc

$$\begin{aligned} -ax + b + c &= 0 \\ a - by + c &= 0 \\ a + b - cz &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

kde a, b, c sú kladné parametre. Z podmienky $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ vyplýva pre riešenie (x, y, z) systému (1)

$$-\begin{vmatrix} -x, & 1, & 1 \\ 1, & -y, & 1 \\ 1, & 1, & -z \end{vmatrix} = xyz - x - y - z - 2 = 0 \tag{2}$$

Ďalej ak (x, y, z) je riešenie systému (1), potom je zrejmé, že matica $\begin{pmatrix} -x, & 1, & 1 \\ 1, & -y, & 1 \\ 1, & 1, & -z \end{pmatrix}$ má hodnosť 2, a tak

$$a : b : c = \frac{1}{1+x} : \frac{1}{1+y} : \frac{1}{1+z}. \tag{3}$$

Veta 1. *Nech a, b, c značia dĺžky strán trojuholníka, nech (x, y, z) je riešením sústavy (1). Potom čísla x, y, z sú prirodzené vtedy a len vtedy, keď $a = b = c$.*

Dôkaz. Nech a, b, c sú dĺžky strán trojuholníka a nech prirodzené čísla x, y, z vyhovujú sústave (1). Potom

$$x = \frac{b+c}{a}, \quad y = \frac{c+a}{b}, \quad z = \frac{a+b}{c}$$

a tak $x, y, z > 1$. Položme $x = 2 + u$, $y = 2 + v$, $z = 2 + w$. Dosadením do (2) dostaneme $u = v = w = 0$, teda $x = y = z = 2$. Potom z (3) vyplýva $a = b = c$. Obrátene, ak $a = b = c > 0$, potom z (1) dostávame $x = y = z = 2$.

Veta 2. *Nech a, b, c značia dĺžky strán trojuholníka $\triangle$. Potom spomedzi čísel*

$$x = \frac{b + c}{a}, \quad y = \frac{c + a}{b}, \quad z = \frac{a + b}{c} \tag{4}$$

sú práve dve prirodzené vtedy a len vtedy, keď je splnená jedna z týchto podmienok:

(*a*) $\triangle$ *je pravouhlý trojuholník, ktorého dĺžky strán sú v pomere* $4 : 3 : 5$;

(*b*) $\triangle$ *je tupouhlý trojuholník s uhlom* $120°$, *ktorého dĺžky strán sú v pomere* $5 : 3 : 7$.

Dôkaz. Nech napríklad čísla x, y sú prirodzené a z nie je prirodzené. Potom $x = 2 + u$, $y = 2 + v$, $z = 1 + w$, kde u, v sú celé, $u, v \geqq 0$ a $w > 0$, w nie je celé. Dosadením do (2) dostaneme

$$uvw + u + v + 3w + uv + 2uw + 2vw = 3 \tag{5}$$

Pri $u = v = 0$ dostaneme odtiaľ $w = 1$, čo je vo spore s predchádzajúcim. Keďže $w > 0$, vyplýva z (5) $u + v + uv < 3$ a tak pre u, v, w a x, y, z máme len tieto možnosti

u	v	w
0	1	$\frac{2}{5}$
0	2	$\frac{1}{7}$

,

x	y	z
2	3	$\frac{7}{5}$
2	4	$\frac{8}{7}$

(hodnoty u, v a súčasne x, y možno zameniť). Na základe (3) sa potom možno presvedčiť, že je $a : b : c = 4 : 3 : 5$ alebo $a : b : c = 5 : 3 : 7$. Ľahko sa možno presvedčiť aj o tom, že každá z podmienok (*a*), (*b*) je aj postačujúca k tomu, aby práve dve spomedzi čísel x, y, z boli prirodzené.

Na sústavu (1) môžeme nazerať ako na sústavu troch rovníc o neznámych x, y, z, a, b, c. Vynára sa otázka, ako vyzerajú všetky riešenia (x, y, z, a, b, c) (v prirodzených x, y, z, a, b, c) tejto sústavy. Ak prirodzené x, y, z, a, b, c vyhovujú sústave (1), potom z (2) vyplýva, že nie je možné, aby dve z čísel x, y, z sa rovnali 1. Súčasne z (2) vidieť, že nie je možné, aby všetky čísla x, y, z boli väčšie než 1 a aspoň jedno z nich bolo súčasne väčšie než 2. Nech $x = 1$, potom z (2) vyplýva $yz = y + z + 3$, odtiaľ $z = 1 + 4(y - 1)^{-1}$, tedy $(y - 1)/4$, a tak buď $y = 2$ alebo $y = 3$. Máme teda tieto možnosti:

(6)

x	1	1
y	2	3
z	5	3

a z (3) vyplýva

$$(7) \qquad a : b : c = 3 : 2 : 1 \quad \text{alebo} \quad a : b : c = 2 : 1 : 1 .$$

Ľahko sa možno presvedčiť, že ak x, y, z, a, b, c sú volené tak, aby boli splnené (6), (7), potom (x, y, z, a, b, c) je riešením sústavy (1). Tým sme nahliadli platnosť tejto vety.

Veta 3. *Všetky riešenia (x, y, z, a, b, c) sústavy (1) v prirodzených x, y, z, a, b, c sú*

1) $x = 2, \quad y = 2, \quad z = 2, \quad a = n, \quad b = n, \quad c = n,$

2) $x = 1, \quad y = 2, \quad z = 5, \quad a = 3n, \quad b = 2n, \quad c = n,$

3) $x = 1, \quad y = 3, \quad z = 3, \quad a = 2n, \quad b = n, \quad c = n,$

n je prirodzené číslo. Pritom x, y, z a súčasne a, b, c možno navzájom zameniť tak, že v matici $\begin{pmatrix} x, & y, & z \\ a, & b, & c \end{pmatrix}$ vymeníme stĺpce.

Jednoduchým dôsledkom uvedenej vety je poznatok, že všetky riešenia diofantickej rovnice (2) v prirodzených x, y, z dostaneme z tabulky

x	2	1	1
y	2	2	3
z	2	5	3

v ktorej ktorékoľvek dva zo znakov x, y, z možno navzájom vymeniť.

Za úpravu článku autor srdečne ďakuje s. doc. dr. TIBOROVI ŠALÁTOVI z Bratislavy a s. CSc. JIŘÍMU SEDLÁČKOVI z Prahy.