Časopis pro pěstování matematiky, roč. 89 (1964), Praha

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

ПАВЕЛ ДОКТОР (Pavel Doktor), Прага

(Поступило в редакцию 14/XI 1962 г.)

Следующая статья посвящена задачам Дирихле и Пуассона для двух переменных. Решение этих проблем понимается в слабом смысле. Точное определение дано в начальной части статьи, которая примыкает, по существу, к работе Й. НЕЧАСА. После этого доказываются теоремы, дающие приближенное решение задачи Дирихле.

Во всей работе я буду рассматривать лишь ограниченные области евклидовой плоскости E_2. Скажем, что такая область Ω принадлежит множеству $\mathfrak{N}$ (или, что Ω — область типа $\mathfrak{N}$), если существует m систем координат в E_2, положительные числа α и β и m функций a_r, $r = 1, 2, \ldots, m$ так, что:

1. Каждую точку границы $\Omega^{\cdot}$ можно записать хотя бы в одной из этих систем в виде $[x_r, a_r(x_r)]$, $|x_r| < \alpha$.

2. Точки с координатами $[x_r, y_r]$, $|x_r| < \alpha$, $a_r(x_r) - \beta < y_r < a_r(x_r)$ лежат внутри Ω, а точки, для которых $|x_r| < \alpha$, $a_r(x_r) < y_r < a_r(x_r) + \beta$, лежат вне $\overline{\Omega}$.

3. Все функции a_r удовлетворяют условию Липшица с одной и той же константой K на интервале $\langle -\alpha, \alpha \rangle$.

Если функции a_r дифференцируемы даже бесконечно на этом интервале, то скажем, что $\Omega \in \mathfrak{M}$ (или что Ω — область типа $\mathfrak{M}$). Очевидно, $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$.

Пусть теперь дана область $\Omega \in \mathfrak{N}$. Тогда я через U_r обозначу область, точки которой выражаются в виде $[x_r, y_r]$, где $|x_r| < \alpha$, $|a_r(x_r) - y_r| < \beta$ („криволинейный параллелограмм"). Существует област U_0, $\overline{U}_0 \subset \Omega$ и такая, что $\sum_{r=0}^{m} U_r \supset \overline{\Omega}$. Как доказывается в [1], можно теперь найти бесконечно дифференцируемые функции φ_r, $r = 0, 1, \ldots, m$, со следующими свойствами:

1. $0 \leqq \varphi_r \leqq 1$,
2. φ_r обращается в нуль вне некоторого компакта $K_r \subset U_r$,
3. $\sum_{r=0}^{m} \varphi_r = 1$ в Ω.

В дальнейшем я буду всегда предполагать, говоря об области Ω, что эта область принадлежит множеству $\mathfrak{N}$ и что вместе с ней заданы области U_r и функции φ_r.

Области типа $\mathfrak{N}$ допускают некоторую апроксимацию через области типа $\mathfrak{M}$, о чем говорит следующая

Теорема 1. *Пусть $\Omega \in \mathfrak{N}$; тогда существует последовательность областей $\Omega_k \in \mathfrak{M}$ такая, что:*

1. $\overline{\Omega}_k \subset \Omega_{k+1} \subset \overline{\Omega}_{k+1} \subset \Omega$.
2. $\lim\limits_{k\to\infty} \Omega_k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \Omega_k = \Omega$.
3. *Границы $\Omega_k^{\cdot}$ выражаются в координатных системах $[x_r, y_r]$ функциями $a_{r,k}$ $(r = 1, 2, \ldots, m)$, удовлетворяющими условию Липшица дла всех $|x_r| < \alpha$ с константой K (независимо от k), для которых справедливы следующие соотношения:*

a) $$\lim_{k\to\infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} \left(\frac{\mathrm{d}a_{r,k}}{\mathrm{d}x_r} - \frac{\mathrm{d}a_r}{\mathrm{d}x_r}\right)^2 \mathrm{d}x_r = 0\,,$$

b) $$\lim_{k\to\infty} \Big(\sup_{|x_r| < \alpha} |a_{r,k}(x_r) - a_r(x_r)|\Big) = 0.$$

Доказательство этой теоремы (в более силной форме) дается в работе [2].

Пространство функций, имеющих все обобщенные производные до порядка k, интегрируемые вместе с их p-той степенью $(p \geqq 1)$, мы будем обозначать символом $W_p^{(k)}(\Omega)$. При этом обобщенная производная понимается здесь (и в дальнейшем) по Соболеву, т.е. мы скажем, что (локально интегрируемая) функция u является обобщенной производной по x от (локально интегрируемой) функции v, если для всех бесконечно дифференцируемых функций φ с компактным носителем в Ω справедливо равенство

$$\int_\Omega u\varphi \,\mathrm{d}\Omega = -\int_\Omega v \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,\mathrm{d}\Omega\,. \tag{1}$$

В случае $k = 0$ мы имеем $W_p^{(0)}(\Omega) = L_p(\Omega)$. Пространство $W_p^{(k)}(\Omega)$ нормируется следующии образом:

$$|u|^p_{W_p^{(k)}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|=0}^{k} |\mathrm{D}^\alpha u|^p_{L_p(\Omega)}\,, \tag{2}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$, $\mathrm{D}^\alpha = \partial^{|\alpha|}/\partial x^{\alpha_1}\,\partial y^{\alpha_2}$. Здесь, конечно,

$$|u|^p_{L_p(\Omega)} = \int_\Omega |u|^p \,\mathrm{d}\Omega\,. \tag{3}$$

Эти пространства являются полными и для $p = 2$ даже гильбертовыми.

Через $\mathscr{E}(\Omega)$ обозначается пространство функций, бесконечно непрерывно дифференцируемых в Ω и непрерывно продолжаемых вместе со всеми производными на $\overline{\Omega}$; $\mathscr{D}(\Omega) \subset \mathscr{E}(\Omega)$ будут функции с компактным носителем в Ω.

Для функций $u \in W_2^{(1)}(\Omega)$ можно говорить о „краевых значениях"; это является содержанием следующей теоремы:

Теорема 2. *Существует одно и только одно линейное отображение Z пространства $W_2^{(1)}(\Omega)$ в пространство $L_2(\Omega^\cdot)$ такое, что для $u \in \mathscr{E}(\Omega)$ будет $Z(u) = u$ на $\Omega^\cdot$.*

Доказательство смотри в [3].

Здесь, конечно, $L_2(\Omega^\cdot)$ означает пространство функций, для которых

$$\int_{\Omega^\cdot} g^2 \, \mathrm{d}s = \sum_{r=1}^{m} \int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi_r(x_r, a_r(x_r)) \, g^2(x_r, a_r(x_r)) \left[1 + (a_r'(x_r))^2\right]^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x_r < \infty \, .$$

Функция $Z(u)$ называется *следом* функции u и множество следов обозначается через $W(\Omega^\cdot)$.

Опять в работе [3] доказывается

Теорема 3. *Пусть $W_{2,0}^{(1)}(\Omega)$ — замыкание $\mathscr{D}(\Omega)$ в норме пространства $W_2^{(1)}(\Omega)$. Тогда $u \in W_{2,0}^{(1)}(\Omega) \Leftrightarrow Zu = 0$.*

Обозначим теперь для $u, v \in W_2^{(1)}(\Omega)$

$$(4) \qquad (u, v)_\Delta = \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \mathrm{d}\Omega$$

и

$$(5) \qquad |u|_\Delta = \{(u, v)_\Delta\}^{\frac{1}{2}} \, .$$

Это лишь псевдонорма, так как из $|u|_\Delta = 0$ не вытекает $u = 0$, но все-таки справедливо неравенство

$$(6) \qquad |(u, v)_\Delta| \leqq |u|_\Delta \, |v|_\Delta \, ,$$

и для $u \in W_{2,0}^{(1)}(\Omega)$ имеем даже

$$(7) \qquad |u|_{W_2^{(1)}(\Omega)} \leqq c|u|_\Delta \, ,$$

т.е. для $W_{2,0}^{(1)}(\Omega)$ является $|u|_\Delta$ нормой, которая эквивалентна норме из $W_2^{(1)}(\Omega)$. Это доказывается, например, в [4].

Теперь можно перейти к задачам Дирихле и Пуассона. Пусть Δ — известный оператор Лапласа $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$. В общем случае мы не будем придавать точного значения выражению Δu, но определим понятие решения задачи Дирихле и Пуассона.

Определение. Пусть $f \in L_2(\Omega)$, $g \in W(\Omega^\cdot)$. Скажем, что функция $u \in W_2^{(1)}(\Omega)$ есть (слабое) решение задачи

$$(8) \qquad -\Delta u = f \text{ в } \Omega \, , \quad u = g \text{ на } \Omega^\cdot \, ,$$

если имеют место следующие соотношения:

$$(9) \qquad (u, v)_\Delta = (f, v)_{L_2(\Omega)} \quad \text{для} \quad v \in W_{2,0}^{(1)}(\Omega), \; Z(u) = g \, .$$

В силу определения пространства $W_{2,0}^{(1)}(\Omega)$ и соотношений (7) и (6) достаточно взять в (9) $v \in \mathscr{D}(\Omega)$. Почти очевидна следующая

Теорема 4. *Существует одно и толко одно решение и проблемы* (8).

Доказательство. (См. тоже [3].) Если $g \in W(\Omega)$, то существует $h \in W_2^{(1)}(\Omega)$, $Z(h) = g$. Если теперь обозначить $u_1 = h - u$, то соотношения (9) будут эквивалентны условию

$$(u_1, v)_\Delta = (h, v)_\Delta - (f, v)_{L_2(\Omega)} \quad \text{для} \quad v \in W_{2,0}^{(1)}(\Omega) \tag{10}$$

где $u_1 \in W_{2,0}^{(1)}(\Omega)$. В силу неравенств (6) и (7) правая часть в (10) представляет собой линейный функционал F над $W_{2,0}^{(1)}(\Omega)$ такой, что

$$|F| \leqq |h|_\Delta + C|f|_{L_2(\Omega)} \,.$$

По известной теореме Рисса всякий линейный функционал на пространстве Гильберта можно представить в виде скалярного произведения; итак, существует u_1, удовлетворяющее условию (10) и такое, что

$$|u_1|_\Delta = |h - u|_\Delta \leqq |h|_\Delta + C|f|_{L_2(\Omega)} \,,$$

откуда

$$|u|_{W_2^{(1)}(\Omega)} \leqq C\left(|f|_{L_2(\Omega)} + |h|_{W_2^{(1)}(\Omega)}\right) . \tag{11}$$

Если бы существовало еще одно решение u^* задачи (8), то из (9) вытекало бы $u - u^* \in W_{2,0}^{(1)}(\Omega)$ и $u - u^* \perp W_{2,0}^{(1)}(\Omega)$, из чего $u - u^* = 0$, ч. и т.д.

Если в (8) $f = 0$, то говорят о задаче Дирихле, и в случае $g = 0$ о задаче Пуассона.

Если даже $\Omega \in \mathfrak{M}$, то справедлива следующая более сильная теорема, являющаяся следствием теоремы 24 из [5]:

Теорема 5. *Пусть* $\Omega \in \mathfrak{M}$ *и* $f \in L_p(\Omega)$, $p \geqq 2$; *тогда решение и проблемы* $\Delta u = f$ *в* Ω, $u = 0$ *на* $\Omega^\cdot$ *лежит даже в* $W_p^{(2)}(\Omega)$, *и справедливо неравенство*

$$|u|_{W_p^{(2)}(\Omega)} \leqq C|f|_{L_p(\Omega)} \,.$$

Отсюда легко вытекает следующая

Теорема 6. *Пусть* $\Omega \in \mathfrak{N}$, $f \in W(\Omega)$, u *— решение проблемы Дирихле* $\Delta u = 0$ *в* Ω, $u = f$ на $\Omega^\cdot$; *тогда* $u \in \mathscr{E}(\Omega_1)$ *для любой области* Ω_1, $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$.

Доказательство. Пусть Ω_1 — такая область; существует область $\Omega_2 \in \mathfrak{M}$, $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2 \subset \overline{\Omega}_2 \subset \Omega$ и функция $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega_2)$, $\varphi = 1$ на Ω_1. Функция $u_1 = u\varphi \in W_{2,0}^{(1)}(\Omega_2)$ является решением проблемы Пуассона

$$\Delta u_1 = u\,\Delta\varphi + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \in L_2(\Omega_2)\,, \quad u_1 = 0 \quad \text{на} \quad \Omega_2^\cdot \,.$$

По теореме 5 мы имеем $u_1 \in W_2^{(2)}(\Omega_2)$ и тем более $u \in W_2^{(2)}(\Omega_1)$. Ввиду произвольности Ω_1 имеет место $u \in W_2^{(2)}(\Omega_2)$, т.е. мы имеем

$$\Delta \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial x} \in W_2^{(1)}(\Omega_2),$$

из чего получаем $\partial u/\partial x \in W_2^{(2)}(\Omega_1)$. По индукции мы имеем $u \in W_2^{(k)}(\Omega_1)$ для любого k и по одной теореме Соболева о вложении (см. [6]) $u \in \mathscr{E}(\Omega_1)$, ч. и т.д.

Пусть теперь $f \in L_2(\Omega)$, $v \in W_2^{(1)}(\Omega)$, и v – решение проблемы $\Delta v = f$ в Ω, $v = 0$ на $\Omega^{\cdot}(\Omega \in \mathfrak{N})$. Тогда в [3] доказывается следующая теорема:

Теорема 7. *Существует функция $\partial v/\partial \nu \in L_2(\Omega^{\cdot})$, которая называется обобщенной производной по нормали от v, и обладает следующими свойствами:*

$$\left|\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|_{L_2(\Omega^{\cdot})} \leqq N|f|_{L_2(\Omega)}, \tag{12}$$

где N — некоторая постоянная (неравенство Реллиха), и

$$\int_{\Omega} uf \, \mathrm{d}\Omega = -\int_{\Omega^{\cdot}} g \frac{\partial v}{\partial \nu} \, \mathrm{d}s, \tag{13}$$

где $g \in W(\Omega)$, $u \in W_2^{(1)}(\Omega)$ и $\Delta u = 0$ в Ω, $u = g$ на $\Omega^{\cdot}$ (теорема Грина); при этом отображение $f \to \partial v/\partial \nu$ линейно.

Если писать $f = u$, то мы получаем

$$\int_{\Omega} u^2 \, \mathrm{d}\Omega \leqq \left(\int_{\Omega^{\cdot}} g^2 \, \mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega^{\cdot}} \left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)^2 \mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}} \leqq |g|_{L_2(\Omega^{\cdot})} N|u|_{L_2(\Omega)}$$

или

$$|u|_{L_2(\Omega)} \leqq N|g|_{L_2(\Omega^{\cdot})} \tag{14}$$

(неравенство Хеллингера-Теплитца для проблемы Дирихле). Если теперь учесть, что решение u проблемы (8) можно представить в виде $u = u_1 + u_2$, где u_1 (соответственно u_2) – решение соответствующей задачи Дирихле (соответственно Пуассона), то из (11) и (14) мы получим

$$|u|_{L_2(\Omega)} \leqq C(|f|_{L_2(\Omega)} + |g|_{L_2(\Omega^{\cdot})}). \tag{15}$$

Это позволяет ввести следующее определение:

Определение. Пусть $f \in L_2(\Omega)$, $g \in L_2(\Omega^{\cdot})$. Скажем, что u решит обобщенную проблему

$$-\Delta u = f \text{ в } \Omega, \quad u = g \text{ на } \Omega^{\cdot} \tag{16}$$

если всякая последовательность функций $u_l \in W_2^{(1)}(\Omega)$, решающих задачи

$$- \Delta u_l = f_l \text{ в } \Omega, \quad u_l = g_l \text{ на } \Omega^{\bullet}, \quad \text{где} \quad f_l \to f$$

(в норме $L_2(\Omega)$) и $g_l \to g$ (в норме $L_2(\Omega^{\bullet})$), сходится в норме $L_2(\Omega)$ к функции u.

Из (15) вытекает, что существует не более одного решения этой задачи. Но по теореме 2,6 из [3] $\overline{W(\Omega^{\bullet})} = L_2(\Omega^{\bullet})$ и мы имеем теорему:

Теорема 8. *Существует одно и только одно решение обобщенной проблемы* (16).

Доказательство. Для любой $g \in L_2(\Omega^{\bullet})$ существуют $g_l \in W(\Omega^{\bullet})$, $g_l \to g$; по теореме 4 существуют решения u_l задач

$$- \Delta u_l = f \text{ в } \Omega, \quad u_l = g_l \text{ на } \Omega^{\bullet}.$$

Но $u_l - u_k$ решит задачу

$$\Delta(u_k - u_l) = 0 \text{ в } \Omega, \quad u_l - u_k = g_l - g_k \text{ на } \Omega^{\bullet},$$

и ввиду (15) (или (14)) и полноты $L_2(\Omega)$ последовательность u_l сходится.

При переходе к решению обобщенной задачи (16), очевидно, сохраняется утверждение теоремы Грина (13) и тоже теоремы 6.

Пусть теперь Ω — односвязная область (типа $\mathfrak{N}$). Справедлива следующая

Теорема 9. *Обозначим через $H(\Omega) \subset W_2^{(1)}(\Omega)$ множество всех решений проблемы Дирихле с краевым условыем из $W(\Omega^{\bullet})$, и через $P(\Omega)$ — множество всех гармонических полиномов. Тогда $\overline{P(\Omega)} = H(\Omega)$ (замыкание берется в норме $W_2^{(1)}(\Omega)$).*

Доказательство. Легко видеть, что $H(\Omega)$ замкнуто и что $P(\Omega) \subset H(\Omega)$. Наоборот, пусть $f \in H(\Omega)$. По теореме 6 f является гармонической функцией (в классическом смысле) и существует функция g такая, что

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = - \frac{\partial g}{\partial x}. \tag{17}$$

Функция g локально интегрируема в Ω и имеет производные, интегрируемые вместе со второй степенью. По теоремам вложения (см. [6]) $g \in W_2^{(1)}(\Omega)$. Если теперь положить

$$F(z) = f(x, y) + ig(x, y) \quad (z = x + iy),$$

то F — очевидно, голоморфная функция и

$$\int_{\Omega} |F'|^2 \, d\Omega < \infty.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Как доказывается в [7], существует комплексный полином $p(z)$ такой, что

$$\int_\Omega |F'(z) - p(z)|^2 \, d\Omega < \varepsilon . \tag{18}$$

Существует полином $P(z)$, $P'(z) = p(z)$. Из (18) мы имеем $|f - \operatorname{Re} P|_\Delta \leqq \varepsilon$, и применением неравенства Пуанкаре

$$|h|^2_{L_2(\Omega)} \leqq B\left\{|h|^2_\Delta + \left(\int_\Omega h \, d\Omega\right)^2\right\}$$

(см. [6]) получаем $|f - (\operatorname{Re} P + c)|_{L_2(\Omega)} \leqq B^{\frac{1}{2}}\varepsilon$, где $c = (1/\mu(\Omega)) \int_\Omega (f - \operatorname{Re} P) \, d\Omega$. Это и есть утверждение теоремы.

Так как $\overline{W(\Omega)^\cdot} = L_2(\Omega^\cdot)$, мы получаем следующую теорему:

Теорема 10. *Следы гармонических полиномов плотны в* $L_2(\Omega^\cdot)$.

Если теперь использовать неравенство (14), мы получим теорему, позволяющую искать приближенное решение обобщенной проблемы Дирихле:

Теорема 11. *Пусть дана система конечномерных пространств $P_n(\Omega)$ гармонических полиномов ($n = 1, 2, \ldots$) такая, что*

$$P_n \subset P_{n+1} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\Omega) = P(\Omega)$$

(например, $P_n(\Omega) = [1, \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z, \ldots, \operatorname{Re} z^n, \operatorname{Im} z^n]$, где квадратные скобки обозначают линейную оболочку).

Пусть, далее, $g \in L_2(\Omega^\cdot)$. Тогда существуют функции $f_n \in P_n(\Omega)$, для которых квадратическая форма

$$F_2(p) = |g - p|^2_{L_2(\Omega^\cdot)} \tag{19}$$

достигает своего минимума на $P_n(\Omega)$, и $|f_n - f|_{L_2(\Omega)} \to 0$, где f — решение проблемы Дирихле $\Delta f = 0$ в Ω, $f = g$ на $\Omega^\cdot$. Еще раз я напоминаю, что область Ω односвязна.

Доказательство. Отыскание функции f_n сводится к решению системы линейных уравнений; а именно, если

$$P_n(\Omega) = [p_1, \ldots, p_m] \quad (p_i \text{ предполагаются линейно независимыми}),$$

то $f_n = \sum_{i=1}^m \alpha_i p_i$, где коэффициенты α_i удовлетворяют системе уравнений

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i (p_i, p_j)_{L_2(\Omega^\cdot)} = (g, p_j)_{L_2(\Omega^\cdot)}, \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

(здесь, конечно, $(u, v)_{L_2(\Omega^\cdot)} = \int_{\Omega^\cdot} uv \, ds$). В этом случае $(g - f_n) \perp P_n(\Omega)$ в пространстве $L_2(\Omega^\cdot)$.

Эту теорему можно обобщить при помощи теоремы Вейерштрасса:

Теорема 12. *Пусть* $g \in L_2(\Omega^\cdot)$, $f \in L_2(\Omega)$ *и пусть* u *— решение обобщенной проблемы* $-\Delta u = f$ *на* Ω, $u = g$ *в* $\Omega^\cdot$. *Пусть дано* $\varepsilon > 0$. *Существует полином* p *такой, что*

$$|p - g|_{L_2(\Omega^\cdot)} + |\Delta p - f|_{L_2(\Omega)} \leqq \varepsilon \,, \tag{20}$$

из чего вытекает $|p - u|_{L_2(\Omega)} \leqq C\varepsilon$, *где* C *— некоторая постоянная.*

Доказательство. Существует функция $\tilde{f} \in \mathscr{E}(\Omega)$ такая, что $|\tilde{f} - f|_{L_2(\Omega)} \leqq \varepsilon/2$ (доказательство смотри в [6]); по теореме Вейерштрасса можно эту функцию равномерно приблизить полиномом. Так как мера Ω конечна, вытекает из этого возможность приближения в метрике пространства $L_2(\Omega)$, и я могу предполагать, что $\tilde{f}$ — полином.

Теперь, существует полином p^* такой, что $\Delta p^* = \tilde{f}$. Действительно, если

$$\tilde{f} = \sum_{i=0}^{N} x^i f_i(y) \,,$$

то достаточно писать

$$p^* = \sum_{i=0}^{N} x^i p_i(y) \,,$$

где p_i удовлетворяют рекуррентным формулам

$$\frac{\mathrm{d}^2 p_N}{\mathrm{d}y^2} = f_N \,,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 p_{N-1}}{\mathrm{d}y^2} = f_{N-1} \,,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 p_{N-2}}{\mathrm{d}y^2} = f_{N-2} - N(N-1)\, p_N \,,$$

$$\vdots$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 p_0}{\mathrm{d}y^2} = f_0 - 2.1 p_2 \,.$$

По теореме 10 существует гармонический полином q такой, что $|p^* + q - g|_{L_2(\Omega^\cdot)} \leqq \varepsilon/2$; полином $p = p^* + q$ и удовлетворяет условию (20).

Эта теорема позволяет искать приближенное решение обобщенной проблеми (16) путем минимализации выражения (20) между всеми полиномами (и не только гармоническими) некоторой степени.

В далнейшем я буду рассматривать проблему Дирихле в случае, когда краевоеусловие более регулярно.

Нетрудно показать, что область $\Omega \in \mathfrak{N}$ является m-связной ($m < \infty$) и граница $\Omega^\cdot$ распадается на m непересекающихся дуг Жордана. Можно даже предполагать, что эти дуги имеют параметрическое выражение через функции, удовлетворяющие условию Липшица, которые я обозначу $\chi_i(s)$, $s \in \langle a_i, b_i \rangle$, $i = 1, 2, \ldots, m$ и для которых $|\chi_i'(s)| = 1$. Если теперь F – абсолютно непрерывная функция на $\Omega^\cdot$, то функция $G(s) = F(\chi(s))$ тоже абсолютно непрерывна на $\langle a, b \rangle$ (индекс i буду отпускать), и можно писать

$$\frac{\partial F}{\partial s}(z) = G'(\chi^{-1}(z)) . \tag{21}$$

Определение. Пусть $f \in L_2(\Omega^\cdot)$ и $\partial f/\partial s \in L_2(\Omega^\cdot)$. Тогда мы скажем, что $f \in W_2^{(1)}(\Omega^\cdot)$ и что

$$|f|^2_{W_2^{(1)}(\Omega^\cdot)} = |f|^2_{L_2(\Omega^\cdot)} + \left|\frac{\partial f}{\partial s}\right|^2_{L_2(\Omega^\cdot)} . \tag{22}$$

Нетрудно видеть, что для $z \in \Omega^\cdot \cap U_r$

$$\left[1 + \left(\frac{\mathrm{d}a_r(x_r)}{\mathrm{d}x_r}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \frac{\partial f}{\partial s}(x_r, a_r(x_r)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_r} f(x_r, a_r(x_r))$$

(если, в случае, писать $s_1 = -s$), и что

$$f \in W_2^{(1)}(\Omega^\cdot) \Leftrightarrow f(x_r, a_r(x_r)) \in W_2^{(1)}((\alpha, -\alpha)) .$$

Для $u \in W_2^{(2)}(\Omega)$ есть $Zu \in W_2^{(1)}(\Omega^\cdot)$ и

$$\frac{\partial}{\partial s} Zu = \varepsilon\left(-Z\frac{\partial u}{\partial x}\nu_2 + Z\frac{\partial u}{\partial y}\nu_1\right),$$

где $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ – вектор внешней нормали и $\varepsilon = \pm 1$. Имеет место соотношение $W_2^{(1)}(\Omega^\cdot) \subset W(\Omega)$: действительно, для $g \in W_2^{(1)}(\Omega^\cdot)$ мы имеем $G_r(x_r, y_r) = g(x_r, a_r(x_r))\,\varphi_r(x_r, y_r) \in W_2^{(1)}(\Omega)$ и $Z(\sum_{r=1}^{m} G_r) = g$.

Итак, пусть $g \in W_2^{(1)}(\Omega^\cdot)$ и пусть $u \in W_2^{(1)}(\Omega)$ – решение задачи Дирихле $\Delta u = 0$ в Ω, $u = g$ на $\Omega^\cdot$. В работе [8] показано, что такой функции u можно поставить в соответствие обобщенную производную по внешней нормали $\partial u/\partial \nu$; отображение $g \to \partial u/\partial \nu$ линейно и непрерывно, т.е.

$$\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{L_2(\Omega^\cdot)} \leqq C|g|_{W_2^{(1)}(\Omega^\cdot)} . \tag{23}$$

Аналогично доказательству соотношения (13) можно доказать

$$\int_{\Omega^\cdot} f\frac{\partial v}{\partial \nu}\,\mathrm{d}s = \int_{\Omega^\cdot} g\frac{\partial u}{\partial \nu}\,\partial s , \tag{24}$$

где $f, g \in W_2^{(1)}(\Omega^{\cdot})$ и u — решение задачи Дирихле $\Delta u = 0$ в Ω $u = f$ на $\Omega^{\cdot}$, v — решение задачи $\Delta v = 0$ в Ω, $v = g$ на $\Omega^{\cdot}$. Если отыскать эту производную, нетрудно найти и решение задачи Дирихле. Справедлива

Теорема 13. *Пусть* $g \in W_2^{(1)}(\Omega^{\cdot})$, $\Delta u = 0$ *в* Ω, $u = g$ *на* $\Omega^{\cdot}$. *Тогда для всех точек* $\Xi = [\xi, \eta]$ *справедливо*

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^{\cdot}} \left\{ u(X) \frac{\partial \lg |\Xi - X|}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial v} u(X) \lg |\Xi - X| \right\} \mathrm{d}s . \tag{25}$$

Доказательство. Пусть $\Xi \in \Omega$; положим $K = E(X; |X - \Xi| < \varrho)$, где $\varrho > 0$ достаточно малое, так что $\overline{K} \subset \Omega$, и область $\Omega' = \Omega - \overline{K} \in \mathfrak{N}$. Если писать $w(X) = \frac{1}{2}\pi \lg |X - \Xi|$, то w — гармоническая функция на Ω' и мы имеем по (24)

$$\int_{(\Omega')^{\cdot}} w \frac{\partial u}{\partial v} \mathrm{d}s - \int_{(\Omega')^{\cdot}} u \frac{\partial w}{\partial v} \mathrm{d}s = 0 . \tag{26}$$

Но всегда мы имеем

$$\int_{(\Omega')^{\cdot}} f \,\mathrm{d}s = \int_{\Omega^{\cdot}} f \,\mathrm{d}s + \int_{K^{\cdot}} f \,\mathrm{d}s .$$

Обозначим теперь $I = \int_{K^{\cdot}} (w(\partial u/\partial v) - u(\partial w/\partial v)) \,\mathrm{d}s$. Но на $K^{\cdot}$ можно писать в виде $w = (\frac{1}{2}\pi) \lg \varrho$, $\partial w/\partial v = -\frac{1}{2}\pi\varrho$, откуда вытекает

$$I = \frac{1}{2\pi} \lg \varrho \int_{K^{\cdot}} \frac{\partial u}{\partial v} \mathrm{d}s + \int_{K^{\cdot}} u \,\mathrm{d}s .$$

Первый интеграл равен нулю по (24) и второй равен значению $u(\Xi)$ по теореме о среднем, откуда тоерема уже следует.

Теорема 14. *Пусть* $P_n(\Omega) = [p_1, p_2, \ldots, p_m]$ *имеет тот же смысл, как и в теореме* 11. *Пусть* $g \in W_2^{(1)}(\Omega^{\cdot})$, $u \in W_2^{(1)}(\Omega)$, $\Delta u = 0$ *в* Ω, $u = g$ *на* Ω. *Пусть* $\alpha_1, \ldots, \ldots, \alpha_m$ *— решение системы уравнений*

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \int_{\Omega^{\cdot}} p_i p_j \,\mathrm{d}s = \int_{\Omega^{\cdot}} g \frac{\partial p_j}{\partial v} \mathrm{d}s , \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

и

$$f_n = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i .$$

Пусть, далее,

$$2\pi u_n(\Xi) = \int_{\Omega^{\cdot}} \left\{ g \frac{\partial \lg |X - \Xi|}{\partial v} - f_n \lg |X - \Xi| \right\} \mathrm{d}s .$$

Тогда $|u_n - u|_{L_2(\Omega)} \to 0$

Доказательство. Если учесть, что

$$\int_{\Omega'} g \frac{\partial p_j}{\partial \nu} \, \mathrm{d}s = \int_{\Omega'} p_j \frac{\partial u}{\partial \nu} \, \mathrm{d}s \, ,$$

то мы имеем

$$\left| f_n - \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{L_2(\Omega')} = \min_{f \in P_n(\Omega)} \left| f - \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{L_2(\Omega')},$$

и по теореме 10

$$\left| f_n - \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{L_2(\Omega)} \to 0 \, .$$

Обозначим $f = \partial u / \partial \nu$; тогда

$$4\pi^2 (u - u_n)^2 \leqq \left(\int_{\Omega'} |f - f_n|^2 \, \mathrm{d}s \right) \left(\int_{\Omega'} \lg^2 |X - \Xi| \, \mathrm{d}s \right),$$

и

$$\int_{\Omega} (u - u_n)^2 \leqq K \int_{\Omega} \mathrm{d}\Omega_Y \left(\int_{\Omega'} \lg^2 |X - Y| \, \mathrm{d}s_X \right) \left(\int_{\Omega'} |f - f_n|^2 \, \mathrm{d}s \right);$$

но

$$\int_{\Omega} \mathrm{d}\Omega_Y \int_{\Omega'} \lg^2 |X - Y| \, \mathrm{d}s_X =$$

$$= \int_{\Omega'} \mathrm{d}s_X \int_{\Omega} \lg^2 |X - Y| \, \mathrm{d}\Omega_X \leqq \int_{\Omega'} \mathrm{d}s \int_{|X| \leqq R} \lg^2 |X| \, \mathrm{d}X < \infty$$

(R — диаметр Ω), откуда вытекает утверждение теоремы.

Литература

[1] *И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов:* Обобщенные функции и действия над ними. Москва 1961.

[2] *Й. Нечас:* Об областях типа $\mathfrak{N}$. Чех. мат. журнал *12* (*87*), 1962, 274—287.

[3] *Й. Нечас:* О решениях эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных с неограниченным интегралом Дирихле. Чех. мат. журнал *10* (*85*), 1960, 283—298.

[4] *С. Г. Михлин:* Проблема минимума квадратичного функционала. Москва-Ленинград 1952.

[5] *А. И. Кошелев:* Априорные оценки в L_p и обобщенные решения эллиптических уравнений и систем. Успехи мат. наук, *XIII*, вып. 4., 1958, 29—86.

[6] *В. И. Смирнов:* Курс высшей математики, т. 5. Москва 1960.

[7] *А. И. Маркушевич:* Теория аналитических функций. Москва-Ленинград, 1950.

[8] *J. Nečas:* Sur le problème de Dirichlet pour l'équation aux dérivées partielles du quatrième ordre du type elliptique. Rendiconti del Seminario Matematico di Padova, *XXXI*, 1961, 198—231.

Výtah

PŘIBLIŽNÉ ŘEŠENÍ DIRICHLETOVY ÚLOHY

PAVEL DOKTOR, Praha

Práce se zabývá možností přiblížení řešení Dirichletova a Poissonova problému pomocí polynomů. Základním výsledkem je věta 10: *Stopy harmonických polynomů tvoří množinu hustou v prostoru* $L_2(\Omega^{\cdot})$.

Z této věty pomocí Hellinger-Töplitzovy nerovnosti snadno plyne věta 11 o aproximaci řešení Dirichletova problému pomocí harmonických polynomů. Věta 12 je zobecněním těchto vět pro nenulovou pravou stranu a libovolné polynomy.

Věty 13 a 14 se zabývají nalezením přibližného řešení pomocí aproximace derivace podle normály mezi polynomy.

Všechny tyto výsledky platí pro jednoduše souvislou rovinnou oblast.

Zusammenfassung

EINE APPROXIMATIVE LÖSUNG DES DIRICHLETS PROBLEMS

PAVEL DOKTOR, Praha

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Möglichkeit der Approximation der Lösung des Dirichletschen und Poissonschen Problems durch Polynome. Das Hauptresultat ist der Satz 10:

Die Spuren der harmonischen Polynome bilden eine dichte Untermenge in $L_2(\Omega^{\cdot})$.

Aus diesem Satz folgt mit Hilfe der Hellinger-Töplitzschen Ungleichung leicht der Satz 11 über die Aproximation der Lösung des Dirichletschen Problems durch harmonische Polynome. Der Satz 12 ist eine Verallgemeinerung beider diesen Sätze für den Fall der von Null verschieden rechten Seite und allgemeinen Polynomen.

Die Sätze 13 und 14 beschäftigen sich mit der Auffindung der approximativen Lösung mit Hilfe der Approximation der Normalableitung durch Polynome. Alle diese Resultate gelten für einfach zusammenhängende Gebiete in der Ebene.