AXIOME DER THEORIE ENDLICHER MENGEN

PETR VOPĚNKA, Praha

(Eingegangen am 10. Jänner 1963)

Diese Arbeit behandelt gewisse Abhängigkeiten der Axiome der Gödel-Bernaysschen Theorie endlicher Mengen.

Unter der axiomatischen Mengentheorie verstehen wir die Theorie Σ aus der Arbeit [1]. Primitive Begriffe sind die Begriffe **Cls** – Klasse, **M** – Menge, $\in$ – Relation des Angehörens. Das System Σ wird von den Axiomengruppen A, B, C, D gebildet. Das Axiom E ist das Auswahlaxiom. Das System Σ^* entsteht aus Σ durch Anschliessen des Axioms E.

Wir bezeichnen mit C_0 das Axiom $(\exists X)\,[\mathbf{M}(X)]$ und mit $\bar{C}_1$ das Axiom

$$\neg(\exists a)\,[a \neq 0\,\&\,(x)\,[x \in a \rightarrow (\exists y)\,[y \in a\,\&\,x \subset y]]]\,;$$

$\bar{C}_1$ ist also das Axiom non C_1.

Das Axiomensystem A, B, C_0, $\bar{C}_1$, C_2, C_3, C_4, D bezeichnen wir mit Σ_e und nennen es Theorie endlicher Mengen.

Es wird vorausgesetzt, dass der Leser dieser Arbeit mit den ersten vier Kapiteln der Arbeit [1] vertraut ist. Es sei bemerkt, dass das ganze Kapitel II davon auch für das System Σ_e gilt, denn darin niemals das Axiom C_1 verwendet ist.

Ist bei einer Behauptung „Beweis (C_i)“ geschrieben, so soll es bedeuten, dass man während des Beweises das Axiom C_i nicht verwendet.

In dieser Arbeit wird bewiesen:

Die Axiome E *und* C_3 *kann man aus den Axiomengruppen* A, B *und aus den Axiomen* $\bar{C}_1$, C_2, C_4, D *beweisen.*

Die Axiome E *und* C_2 *kann man aus den Axiomengruppen* A, B *und aus den Axiomen* $\bar{C}_1$, C_3, C_4, D *beweisen.*

Die Axiome C_2, C_3 *kann man nicht gleichzeitig aus den Axiomengruppen* A, B *und aus den Axiomen* $\bar{C}_1$, C_4, D, E *beweisen.*

1. ORDINALZAHLEN

Wie in der Arbeit [1] bezeichnen wir mit On die Klasse aller Ordinalzahlen, mit ω die Klasse aller natürlichen Zahlen und mit V die universelle Klasse. In diesen Definitionen benützt man keines der Axiome C_1, C_2, C_3.

1.1. $On = \omega$.

Beweis. Es ist $\omega \subseteq On$. Gilt [1], 8.41, so gilt nach $\bar{C}_1$ offenbar $\mathbf{Pr}(\omega)$ und mithin $\omega = On$ (s. [1], 8.5); die Behauptung [1], 8.41 müssen wir aber beweisen. Dazu genügt für jedes $x \in \omega$ $\mathbf{M}(x \dotplus 1)$ zu beweisen.

(C_3) $x \dotplus 1 = x \cup \{x\} = \mathbf{U}\{x, \{x\}\}$; $\mathbf{M}(\mathbf{U}\{x, \{x\}\})$.
(C_2) $x \dotplus 1 = x \cup \{x\} \subseteq \mathbf{P}(x)$; $\mathbf{M}(\mathbf{P}(x))$.

1.2. $(x)[x \subseteq On \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{U}x)]$.

Beweis (C_2). $\mathbf{U}x$ ist offenbar ein Ordinal. Ist $\mathbf{Pr}(\mathbf{U}x)$, so ist $\mathbf{U}x = On$. Wäre aber $\mathbf{U}x = \omega$, so wäre x mit ω konfinal im natürlichen Isomorphismus. Nach C_4 wäre also $\mathbf{M}(\omega)$, was ein Widerspruch wäre.

1.3. $(x)[x \subseteq On \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{P}(x))]$.

Beweis (C_3). Bezeichnen wir $n = \mathbf{U}x \dotplus 1$; dann ist offenbar $x \subseteq n$, mithin $\mathbf{P}(x) \subseteq \mathbf{P}(n)$. Es genügt also für jede natürliche Zahl n $\mathbf{M}(\mathbf{P}(n))$ zu beweisen. Definieren wir $x \in A \equiv \mathbf{M}(\mathbf{P}(x))$. A existiert wie eine Klasse nach [1], M2. Es gilt $0 \in A$. Es sei $k \in \omega$, $k \in A$. Definieren wir $\langle yx \rangle \in B \equiv y = x \cup \{k\}$. Dann ist B eine Funktion (nach [1], M5) und es gilt $\mathbf{D}(B) = V$. Infolge dessen ist auch $B \mid \mathbf{P}(k)$ eine Funktion und es gilt

$$\mathbf{W}(B \mid \mathbf{P}(k)) = \mathbf{P}(k \dotplus 1) - \mathbf{P}(k).$$

Daraus ergibt sich aber nach C_4, dass $\mathbf{M}(\mathbf{P}(k \dotplus 1) - \mathbf{P}(k))$ gilt. Aus der Gleichung $\mathbf{P}(k \dotplus 1) = (\mathbf{P}(k \dotplus 1) - \mathbf{P}(k)) \cup \mathbf{P}(k)$ folgt $\mathbf{M}(\mathbf{P}(k \dotplus 1))$ und mithin $k \dotplus 1 \in A$. Nach [1], 8.44 gilt $\omega \subseteq A$.

1.4. Definition. Es gelte $x \subset On$, $y \subset On$. Wir definieren

$$x < y \equiv \mathbf{Max}[(x - y) \cup (y - x)] \in y - x.$$

1.5. Die Relation $<$ ist eine Ordnung der Klasse $\mathbf{P}(On)$ und diese Klasse ist durch diese Relation isomorph mit der Klasse ω geordnet (ω ist durch die Relation E geordnet).

Beweis. Siehe [2], 2.21. Es sei nur bemerkt, dass man im Beweis dieses Satzes C_2 und C_3 nur in der schwächeren Form benützt, und zwar als 1.2 und 1.3.

1.6. Definition. $I = \mathbf{Isom}_{E,<}(On, \mathbf{P}(On))$.

Leicht beweist man Folgendes (vgl. z. B. [2], 2.41):

1.7. $(n)[n \neq 0 \,\&\, n \neq 1 \,\&\, n \in On \rightarrow I'n \subset n]$.

2. ABBILDUNG VON On AUF V

2.1. Definition. Wir definieren die Funktion G auf der Klasse V folgenderweise: Ist $\neg \mathbf{Un}x \vee \neg \mathbf{D}(x) \in On$, so $G'x = 0$. Ist $\mathbf{Un}\, x \;\&\; \mathbf{D}(x) \in On$, so $G'x = \mathbf{W}(x \mid I' \mathbf{D}(x))$.

Ist $\mathbf{M}(x)$, so ist offenbar auch $\mathbf{M}(G'x)$ und die Funktion G existiert somit nach [1], M6; es gilt weiter $G'0 = 0$.

2.2. Nach [1], 7.5 existiert genau eine auf der Klasse On definierte Funktion F, für die $(n)\,[F'n = G'(F \mid n)]$ gilt. Es gilt $F'0 = 0$ und nach 1.7 ist

$$F'n = \mathbf{W}((F \mid n) \mid I'n) = \mathbf{W}(F \mid I'n)\,.$$

Dies kann man in einer knappen Form als $F'n = F''I'n$ ausdrücken.

Daraus und aus 1.7 beweist man auch leicht folgendes Lemma:

2.3. $x \in y \;\&\; x = F(n) \;\&\; y = F(m) \rightarrow n \in m$.

2.4. $\mathbf{Un}_2 F$.

Beweis. Wir definieren $n \in A \equiv \neg(\exists n^*)\,[n^* \in n \;\&\; F'n = F'n^*]$. Offenbar $0 \in A$. Es sei $k \in A$ für alle $k \in n$, es sei weiter $0 \in n$. Wir beweisen $n \in A$. Es sei $n^* \in n$ derartig, dass $F'n^* = F'n$ gilt. Offenbar gilt $I'n^* < I'n$. Es existiert $m \in I'n$ derartig, dass $m \notin I'n^*$; daraus folgt $F'm \in F'n$. Es muss weiter ein $m^* \in I'n^*$ existieren, für das $F'm^* = F'm$ gilt, weil $F'n^* = F'n$ gilt. Es ist aber $m \in n$ und $m^* \in n$, was sich aus 1.7 ergibt. Nach der Induktionsannahme ist aber $F'm^* \neq F'm$, was ein Widerspruch ist.

2.5. Lemma. $(x)\,[x \subseteq A \rightarrow x \in A] \rightarrow A = V$.

Beweis. Wäre $V - A \neq 0$, so müsste nach dem Axiom D u mit der Eigenschaft $u \in V - A \;\&\; u \cap (V - A) = 0$ existieren; das bedeutet aber $u \subseteq A$, folglich $u \in A$, was ein Widerspruch ist.

2.6. Definition. Bis zum Ende dieses Absätzes bezeichne H die zu F inverse Funktion, d. h. $H = \mathbf{Conv}\, F$.

2.7. $\mathbf{W}(F) = V$.

Beweis. Es sei $x \subseteq \mathbf{W}(F)$, mithin $H''x \subseteq On$. Aus 2.4 ergibt sich also nach dem Axiom C_4 $\mathbf{M}(H''x)$. Es existiert also ein solches n^*, dass $I'n^* = H''x$, d. h. $x = F''I'n^*$ gilt. Daher $x = F'n^*$, somit $x \in \mathbf{W}(F)$. Nach 2.5 muss also $\mathbf{W}(F) = V$ sein.

3. BEWEISE DER AXIOME

3.1. (Auswahlaxiom.) $(\exists A)\,[\mathbf{Un}\, A \;\&\; (x)[x \neq 0 \rightarrow A'x \in x]]$.

Beweis (C_2 oder C_3). Es genügt offenbar $\mathbf{Rel}\, A$ und

$$\langle yx \rangle \in A \equiv y \in x \;\&\; (z)\,[H'z \in H'y \rightarrow z \in x]$$

zu definieren.

3.2. (Axiom C_2.) $(x)(\exists y)(u, v)[u \in v \,\&\, v \in x \rightarrow u \in y]$.

Beweis (C_2). Es existiert ein n, für das $x = F'n$ gilt. Es sei $m \in H''\mathbf{U}x$; dann existiert ein p, für das $F'm \in p$ und $p \in x$, somit $m \in H'p \in n$ gilt. Daher $H''\mathbf{U}x \subseteq n$, somit $\mathbf{M}(H''\mathbf{U}x)$, nach C_4 also $\mathbf{M}(\mathbf{U}x)$.

3.3. (Axiom C_3). $(x)(\exists y)(u)[u \subseteq x \rightarrow u \in y]$.

Beweis (C_3). Es existiert ein n, für das $x = F'n$ gilt. Es sei $m \in H''\,\mathbf{P}(x)$; dann existiert ein z, für das $z \subseteq x$ und $z = F'm$, somit $m \in n + 1$ gilt. Daher $H''\,\mathbf{P}(x) \subseteq$ $\subseteq n + 1$, somit $\mathbf{M}(H''\,\mathbf{P}(x))$, nach C_4 also $\mathbf{M}(\mathbf{P}(x))$.

4. MODELL

Innerhalb der Theorie Σ_e konstruieren wir jetzt ein Modell, das alle Axiome dieser Theorie mit Ausnahme von C_2 und C_3 erfüllt. Dadurch wird bewiesen werden, dass die beiden Axiome C_2, C_3 aus den übrigen nicht gleichzeitig bewiesen werden können.

4.1. Definition. $(\langle\alpha\beta\rangle \, Le \, \langle\gamma\delta\rangle \equiv \beta \in \delta \vee (\beta = \delta \,\&\, \alpha \in \gamma)) \,\&\, Le \subseteq (On^2)^2$,

$$(\langle\alpha\beta\rangle \in N \equiv \langle\alpha\beta\rangle \in On^2 \,\&\, \alpha \leqq \beta) \,\&\, N \subseteq On^2 \,.$$

(Siehe auch [1], 7.8.)

4.2. Definition. Weiter definieren wir ähnlich, wie in [1]:

$$I = \mathbf{Isom}_{\mathrm{Le,E}}(N, On)\,,$$
$$(\langle\alpha\gamma\rangle \in K_1 \equiv (\exists\beta)[\gamma = I'\langle\alpha\beta\rangle]) \,\&\, K_1 \subseteq N\,,$$
$$(\langle\alpha\gamma\rangle \in K_2 \equiv (\exists\alpha)[\gamma = I'\langle\alpha\beta\rangle]) \,\&\, K_2 \subseteq N\,.$$

4.3. Definition. Die unten definierte Funktion existiert nach [1], M5, 7.5.

$$F'0 = 0 \,\&\, F'1 = \{0\} \,\&\, (n)[n > 1 \rightarrow F'n = \{F'K_1'n, F'K_2'n\}] \,\&\, FFn\omega\,.$$

4.4. Lemma. α) $\mathbf{Un}_2 F$. β) $F'\alpha \in F'\beta \rightarrow \alpha \in \beta$.

Beweis. α) Es sei α die kleinste Zahl, für die ein $\beta \neq \alpha$ mit der Eigenschaft $F'\alpha =$ $= F'\beta$ existiert, es sei $\alpha > 1$. Es ist $F'\alpha = \{F'K_1\alpha, F'K_2'\alpha\}$, $F'\beta = \{F'K_1'\beta, F'K_2'\beta\}$; daher muss $F'K_1'\alpha = F'K_i'\beta$ ($i = 1$ oder 2), $F'K_2'\alpha = F'K_j'\beta$ ($j = 1$ oder 2, $j \neq i$) gelten. Es kann nicht gleichzeitig $K_1'\alpha = K_i'\beta$, $K_2'\alpha = K_j'\beta$ gelten; es sei z. B. $K_1'\alpha \neq$ $\neq K_i'\beta$. Es ist $K_1'\alpha < \alpha$, was aber ein Widerspruch ist. Die Fälle $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ sind trivial unmöglich.

β) Es sei $F'\alpha \in F\beta$, $\beta > 1$. Es ist also $\alpha = K_1'\beta$ oder $\alpha = K_2'\beta$, somit $\alpha \in \beta$. Die Fälle $\beta = 0,1$ sind trivial.

4.5. Definition. $L = \mathbf{W}(F)$.

4.6. Definition. Jetzt definieren wir die Klassen $\mathbf{Cls}^*$, Mengen $\mathbf{M}^*$ und die Relation des Angehörens $\in^*$ im Modell Γ.

$$\mathbf{Cls}^*(X) \equiv X \subseteq L, \quad \mathbf{M}^*(X) \equiv X \in L,$$

$$X \in^* Y \equiv \mathbf{M}^*(X) \,\&\, \mathbf{Cls}^*(Y) \,\&\, X \in Y.$$

4.7. Im Modell Γ gelten alle Axiome der Gruppen A, B, weiter die Axiome C_0, $\overline{C}_1$, C_4, D, E, aber nicht C_2, C_3.

Beweis. Die Axiome der Gruppe A sind trivial erfüllt. Es sei nur bemerkt, dass für beliebige Mengen x, y von Γ $\{xy\}$ das (ungeordnete) Paar der Mengen x, y im Sinne des Modells ist. Weiter gehört $\langle xy \rangle$ zu L und ist das geordnete Paar von x, y im Sinne des Modells.

Leicht beweisen wir auch die Axiome der Gruppe B. Zum Beweis von B_1 genügt es $E^* = E \cap L$ zu nehmen; die Klasse L ist die universelle Klasse von Γ. Der Durchschnitt und die Differenz von Klassen haben in Γ dieselbe Bedeutung, wie in der Ausgangstheorie. Es kann nicht C_1 gelten, denn jede Menge des Modells hat höchstens zwei Elemente. Es gilt also $\overline{C}_1$.

Wir beweisen C_4. Es sei $x \in L$, $x \neq 0$, $\mathbf{Un}\, A$, $A \subseteq L$. Dann $x = \{yz\}$. Bezeichnen wir $y^* = A'y$, $z^* = A'z$. Es gilt offenbar $A''x = \{y^*z^*\}$. Weil $A \subseteq L$, so $\langle y^*y \rangle \in L$, somit $y^* \in L$. Analogisch $z^* \in L$ und dahes $\{y^*z^*\} \in L$, d. h. $\mathbf{M}^*(A''x)$.

Das Axiom D ergibt sich trivialerwelse daraus, dass wenn $A \neq 0$, $A \subseteq L$ gilt, so muss das kleinste $\alpha \in \omega$ bestehen, für das ein $x \in A$ mit der Eigenschaft $\langle x\alpha \rangle \in F$ existiert. Nach 4.4β $x \cap A = 0$.

Die mit der Äquivalenz

$$\langle xy \rangle \in A \equiv x = F'K_1'F^{-1\prime}y$$

definierte Klasse A ist die Auswahlsfunktion von Γ. Sollte ein der Axiome C_2, C_3 gelten, so müsste auch das andere gelten. In diesem Fall wäre das Modell Γ ein Modell der ganzen Theorie Σ_e. Das ist aber unmöglich, denn jede Menge von Γ hat höchstens zwei Elemente, so dass z. B. die Zahl $3 = \{0, \{0\}, \{0, \{0\}\}\}$ keine Menge des Models ist.

Literatur

[1] *Kurt Gödel*: The Consistency of the Continuum Hypothesis. Princeton Univ. Press 1940 Annals of Math. Stud. No 3.

[2] *Petr Hájek, Petr Vopěnka*: Über die Gültigkeit des Fundierungsaxioms in speziellen Systemen der Mengentheorie. Zeitschr. f. Math. Logik und Grundlagen der Math., Berlin. *9* (1963) 235 f.

Výtah

AXIOMY TEORIE KONEČNÝCH MNOŽIN

PETR VOPĚNKA, Praha

Axiomatickou teorií konečných množin rozumíme teorii Gödel-Bernaysovu, v níž axiom C_1 nahradíme jeho negací. V této práci je dokázáno:

1. Axiomy E a C_3 je možno dokázat z axiomů skupiny A, B a z axiomů $\neg C_1, C_2, C_4$, D.

2. Axiomy E a C_2 je možno dokázat z axiomů skupiny A, B a z axiomů $\neg C_1$, C_3, C_4, D.

3. Axiomy C_2, C_3 nelze současně dokázat z axiomů skupiny A, B a z axiomů $\neg C_1$, C_4, D, E.

Резюме

АКСИОМЫ ТЕОРИИ КОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ

ПЕТР ВОПЕНКА (Petr Vopěnka), Прага

Под аксиоматической теорией конечных множеств мы подразумеваем теорию Гэделя-Бернайса, в которой аксиома C_1 заменена ее негацией. В этой работе доказано:

1. Аксиомы E и C_3 можно доказать из аксиом групп A, B и из аксиом $\neg C_1$, C_2, C_4, D.

2. Аксиомы E и C_2 можно доказать из аксиом групп A, B и из аксиом $\neg C_1$, C_3, C_4, D.

3. Аксиомы C_2, C_3 нельзя одновременно доказать из аксиом групп A, B и из аксиом $\neg C_1$, C_4, D, E.