Ramón Rubio
Sobre los fundamentos de la geometria diferencial

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 89 (1964), No. 3, 278--295

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117506

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 89 (1964), Praha

SOBRE LOS FUNDAMENTOS DE LA GEOMETRIA DIFERENCIAL

I-estructuras locales y pseudogrupos

RAMÓN RUBIO, Habana (Cuba)

(Recibido 14 de augusto de 1962)

1. ESTRUCTURAS Y MORFISMOS

1.1. Este es un trabajo de caracter metodológico. Definiremos de manera semiformal la noción de *especie de estructura* y de estructura de una especie dada sobre *un* conjunto de base E. La definición de estructuras sobre varios conjuntos de base, no difiere esencialmente de la anterior, como el lector puede corroborar en [3]. Además, la definición a la manera de Ehresmann [4], (Definiciones 6 y 7) contiene como caso particular la de Bourbaki para uno o más conjuntos de base.

Sea E un conjunto que designaremos como „conjunto base" y $A_1, \ldots, A_n$ varios conjuntos que designaremos como „conjuntos auxiliares". Una *construcción escalonada* sobre E, de $n + 1$ términos, es una sucesión $C_1, \ldots, C_k$ de conjuntos que cumple las siguientes condiciones:

a) $C_1 = E$, $C_2 = A_1, \ldots, C_{n+1} = A_n$.

b) Para cada C_i, $2 \leqq i \leqq k$, o bien: 1) existen dos índices i_0, $i_1 < i$ tales que $C_i = C_{i_0} \times C_{i_1}$ (i_0 e i_1 pueden ser iguales), o bien: 2) existe algún $i_0 < i$ tal que $C_i = \mathfrak{P}C_{i_0}$.

Esto significa que cada conjunto C_i, es obtenido a partir de E y los A_s combinándolos de diversas maneras mediante la multiplicación cartesiana y la operación de tomar la potencia de uno de los conjuntos ya hallados. Es possible que una de estas operaciones falten, como también es posible que falten los conjuntos auxiliares A_s. Por ejemplo, la siguiente es una construcción escalonada con base en E y sin conjuntos auxiliares, en donde no se ha utilizado el producto cartesiano:

Ej. 1: E, $\mathfrak{P}E$, $\mathfrak{P}\mathfrak{P}E$.

El siguiente ejemplo es más típico; con un solo conjunto auxiliar A:

Ej. 2: E, A, $E \times E$, $(E \times E) \times E$, $\mathfrak{P}((E \times E) \times E)$, $A \times E$, $(A \times E) \times E$, $\mathfrak{P}((A \times E) \times E)$, $\mathfrak{P}((E \times E) \times E) \times \mathfrak{P}((A \times E) \times E)$.

1.2. La importancia de una construcción escalonada recaerá para nosotros, sobre el último término C_k de dicha construcción. En el case del Ej. 1, $C_k = C_3 = \mathfrak{P}\mathfrak{P}E$, en el Ej. 2, $C_k = C_9 = \mathfrak{P}((E \times E) \times E) \times \mathfrak{P}((A \times E) \times E)$. Una „estructura sobre“ E será un elemento de este último término, que en adelante designaremos por $\mathfrak{M}(E)$ en lugar de C_k. Es evidente que pueden haber varias construcciones escalonadas con base en E y el mismo término final $\mathfrak{M}(E)$, dichas construcciones se dicen „equivalentes“. Como ejemplo de lo que hemos dicho anteriormente, sea la construcción del Ej. 1, toda „estructura topologica“ sobre E, es un elemento t de $\mathfrak{M}(E) = \mathfrak{P}\mathfrak{P}E$: t es evidentemente el conjunto de todos los subconjuntos abiertos de E para esta topología (ver. N. BOURBAKI: Topologie Générale, Chap. 1, § 1). La construcción del Ej. 2 corresponde a la estructura de espacio vectorial sobre A, si A es un cuerpo, en una forma que el lector precisará.

Para definir una estructura sobre E, no es simplemente preciso determinar el conjunto $\mathfrak{M}(E)$ mediante una construcción escalonada cualquiera, sino que se da un conjunto de *axiomas* $\alpha_1 \dots, \alpha_m$ que nos dice cuando un elemento de $\mathfrak{M}(E)$ va a representar una estructura del tipo que definimos, sobre E. Los axiomas de la estructura topológica son:

α_1: $E \in t$ y $\emptyset \in t$ (el espacio E y el conjunto nulo, son abiertos).

α_2: Si $S \subset t$ entonces $\bigcup S \in t$ (la unión de conjuntos abiertos es un abierto).

α_3: Si $X_1, \dots, X_p \in t$ entonces $\bigcap_{i=1}^{p} X_i \in t$ (toda intersección finita de conjuntos abiertos es un abierto).

Cualquier conjunto de axiomas puede convertirse en un solo axioma mediante el uso de la conjunción „y“ o el signo lógico correspondiente $\wedge$. **Ej.**: los anteriores axiomas equivalen al axioma $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \equiv \mathrm{R}$.[1]) Finalmente, podemos concebir una estructura „sin axioma“, pero formalmente tal estructura corresponderia a una cuyo axioma sea simplemente $t \in \mathfrak{M}(E)$, es decir, „todo elemento de $\mathfrak{M}(E)$ es una estructura del tipo dado sobre E“.

Los axiomas, o más bien, el axioma R de una especie de estructura sobre E es una relación; pero dicha relación no puede ser cualquiera, sino una relación independiente de la naturaleza misma de los elementos de E y que sólo depende, desde un cierto punto de vista, del número cardinal de E. Para dar mayor formalidad a lo que venimos diciendo es necesario introducir dos conceptos: el de „esquema“ de construcción escalonada y el de „extensión canónica“ de una aplicación, para un esquema dado.

1.3. Un „esquema“ es la „ley“ que me permite encontrar, a partir de los conjuntos $E, A_1, \dots, A_n$, el conjunto $\mathfrak{M}(E)$: este esquema puede ser dado de muchas maneras; Bourbaki [3, Chap. 4, § 1] lo define a partir de una sucesión finita de pares de números naturales, $c_1, \dots, c_k$, poco más o menos de la siguiente manera: dados E y los A_s, a cada $c_i = (a_i, b_i)$ corresponde un C_i como sigue: a c_1 corresponde E, a c_i, $2 \leqq i \leqq n + 1$ corresponde A_{i-1}; por definición c_i será entonces el par $(0, i)$, para $1 \leqq i \leqq n + 1$. Si debe ser: $C_i = \mathfrak{P}C_{i_0}$, entonces el par c_i es por definición $(i_0, 0)$; si

[1]) Podemos pues hablar de „el axioma“ de una estructura.

debe ser $C_i = C_{i_0} \times C_{i_1}$ entonces c_i es el par (i_0, i_1). Así pues, la sucesión $c_1, \ldots, c_k$ es un criterio suficiente para que, dados los conjuntos $E, A_1, \ldots, A_n$, se pueda encontrar, en un número finito de pasos, el conjunto $\mathfrak{M}(E)$. De esta manera podemos definir:

Un „esquema $\mathfrak{M}$ de construcción escalonada sobre p términos" es una sucesión finita $c_1, \ldots, c_k$ de pares de números naturales con las siguientes condiciones:

a) $c_i = (0, i)$ si $1 \leqq i \leqq p$,
b) si $c_i = (a_i, 0)$, entonces $1 \leqq a_i < i$,
c) si $c_i = (a_i, b_i)$, $a_i \neq 0 \neq b_i$, entonces $1 \leqq a_i, b_i < i$.

Con la interpretación anterior vemos como podemos entonces construir, dado un conjunto base E y $p - 1$ conjuntos auxiliares $A_1, \ldots, A_{p-1}$, una construcción escalonada.

Ej. 3: Al Ej. 1 corresponde el esquema $\mathfrak{M} = ((0, 1), (1, 0), (2, 0))$. Al Ej. 2 corresponde el esquema: $((0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 3), (4, 0), (2, 1), (6, 1), (7, 0), (5, 8))$.

Dos esquemas que den construcciones equivalentes se dice que son equivalentes.

1.4. Sea $\mathfrak{M}$ un esquema (de construcción escalonada) sobre $n + 1$ términos, sean E, E' dos conjuntos y $f\colon E \to E'$, vamos a definir una aplicación $\bar{f}\colon \mathfrak{M}(E) \to \mathfrak{M}(E')$, que se denominará, *extensión canónica* de f según el esquema $\mathfrak{M}$, $f_1 = f$ por definición, , $f_i = \mathrm{id}\colon A_{i-1} \to A_{i-1}$ si $2 \leqq i \leqq n + 1$. Si f_i ha sido defidida para $1 \leqq i < s$, entonces $f_s\colon C_s \to C'_s$, donde C_s y C'_s son los términos de las construcciones sobre E y E' respectivamente (y los A_i) correspondientes al esquema $\mathfrak{M}$: si $C_s = C_{s_0} \times C_{s_1}$ entonces $f_s(x, y) = (f_{s_0}(x), f_{s_1}(y)) \in C'_{s_0} \times C'_{s_1}$; si $C_s = \mathfrak{P}C_{s_0}$, f_s es la extensión de $f_{s_0}\colon C_{s_0} \to C'_{s_0}$ a los conjuntos potencia respectivos: $f_s\colon \mathfrak{P}C_{s_0} \to \mathfrak{P}C'_{s_0}$. Si el esquema $\mathfrak{M}$ tiene k términos, entonces, por definición será $\bar{f} = f_k$.

Si en lugar de la aplicación idéntica id: $A_{i-1} \to A_{i-1}$ tomamos una aplicación cualquiera $f_i\colon A_{i-1} \to A'_{i-1}$, donde $A'_1, \ldots, A'_n$ son otros conjuntos auxiliares cualesquiera, podemos determinar una aplicación $\langle f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}\rangle^{\mathfrak{M}}\colon \mathfrak{M}(E, A_1, \ldots, A_n) \to \mathfrak{M}(E', A'_1, \ldots, A'_n)$ que se dice la „extensión" de las aplicaciones f_i. Tenemos: $\bar{f} = \langle f, \mathrm{id}, \ldots, \mathrm{id}\rangle^{\mathfrak{M}}$.

1.5. De un modo intuitivo, un axioma $\mathfrak{R}$ para un esquema $\mathfrak{M}$ es sencillamente una „ley" permitiendo obtener, a partir de un conjunto cualquiera E, un subconjunto $\mathfrak{R}(E)$ de $\mathfrak{M}(E)$ y tal que, si $f\colon E \to E'$ es una biyección, $\bar{f}(\mathfrak{R}(E)) = \mathfrak{R}(E')$ y $\bar{f}\colon \mathfrak{R}(E) \to \mathfrak{R}(E')$ es una biyección.[2] Si $t \in \mathfrak{R}(E)$, entonces f se denomina un *isomorfismo* de t con $\bar{f}(t) \in \mathfrak{R}(E')$ y se representa por (f, t).

Desde un punto de vista formal, $\mathfrak{R}$ es una *relación* [3, chap. 1, § 1, No. 3] $\mathfrak{R}(x, u)$ (algo que se afirma respecto a x y u) tal que, si $f\colon E \to E'$ es una biyección, $s \in \mathfrak{M}(E)$, $s' = \bar{f}(s)$, entonces:

$$\mathfrak{R}(E, s) \Leftrightarrow \mathfrak{R}(E', s'),$$

se dice entonces que $\mathfrak{R}(x, u)$ es una relación transportable según el esquema $\mathfrak{M}$.

[2]) Esto vale tanto como decir que la asociación de $\mathfrak{R}(E)$ a E, no depende de la naturaleza misma de los elementos de E.

Definición 1. Una *especie de estructura* es un par $(\mathfrak{M}, \mathfrak{R})$ donde $\mathfrak{M}$ es un esquema de construcción escalonada y $\mathfrak{R}$ una relación transportable para $\mathfrak{M}$.

Se puede sustituir, cuando sea posible, el par $(\mathfrak{M}, \mathfrak{R})$ por la relación $\mathfrak{R}$ y hablar de estructuras de especie $\mathfrak{R}$. En lo adelante, la especie de estructura topológica se representará por $\mathfrak{T}$ (en lugar de $\mathfrak{R}$).

Si E es un conjunto, un elemento $t \in \mathfrak{R}(E)$ o el par (E, t), se denominará „una estructura sobre E de especie $\mathfrak{R}$".

En adelante utilizaremos a veces, en lugar de la frase „estructura de especie $\mathfrak{R}$", el término „$\mathfrak{R}$-estructura".

1.6. Subordinación. Sean $\mathfrak{R}$ a $\mathfrak{R}'$ dos especies de estructuras y $\mathfrak{R}_0$, $\mathfrak{R}_0'$ las clases de todas las estructuras de especie $\mathfrak{R}$ y $\mathfrak{R}'$ respectivamente. En muchos casos, se nos presenta la ocasión de considerar una aplicación T: $\mathfrak{R}_0 \to \mathfrak{R}_0'$ tal que: $T(\mathfrak{R}(E)) \subset \mathfrak{R}'(E)$ para todo E. Esto quiere decir que ambas, $t \in \mathfrak{R}_0$ y $T(t)$ son siempre estructuras sobre el mismo conjunto. Si se cumple lo siguiente: dada una biyección f: $E \to E'$, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{R}(E) \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\tilde{f}"'] & \mathfrak{R}'(E) \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ \mathfrak{R}(E') \arrow[r, "T"] & \mathfrak{R}'(E') \end{tikzcd}$$

entonces se dice que T es una subordinación de la especie $\mathfrak{R}$ a la especie $\mathfrak{R}'$.

Ej. 4: Todo grupo topológico es un espacio topológico llamado espacio „subyacente" al grupo. La aplicación T que aplica toda estructura (E, s) de grupo topológico sobre un conjunto E, en la estructura topológica subyacente sobre el mismo conjunto, es una subordinación.

El tipo de subordinación del presente ejemplo se puede considerar como una „proyección" de la manera que sigue. Si $\mathfrak{T}$ y $\mathfrak{G}$ son las especies de estructura anteriormente mencionadas, toda estructura de grupo topológico sobre un conjunto E, es un elemento de $\mathfrak{T}(E) \times \mathfrak{G}(E)$.

Luego si $\mathfrak{G}t$ designa la especie de estructura de grupo topológico, entonces $\mathfrak{G}\, t(E) \subset \subset \mathfrak{T}(E) \times \mathfrak{G}(E)$ para todo E. La anterior subordinación, restringida a $\mathfrak{G}t(E)$, no es mas que la proyección $\mathfrak{G}t(E) \to \mathfrak{T}(E)$. La otra proyección $\mathfrak{G}t(E) \to \mathfrak{G}(E)$, define una nueva subordinación $\mathfrak{G}t \to \mathfrak{G}$.

Si en general, dadas las especies de estructuras $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}^1, \ldots, \mathfrak{R}^n$, sucede:

$$\mathfrak{R}(E) \subset \mathfrak{R}^1(E) \times \ldots \times \mathfrak{R}^n(E),$$

para todo E, existen n subordinaciones canónicas $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}^i$, $1 \leqq i \leqq n$. Este es un caso frecuente en matemática: es el caso, por ejemplo, de las estructuras de ouerpo, álgebra, espacio vectorial, espacio vectorial topológico, cuerpo ordenado, etc. En general, de acuerdo con la definición de Bourbaki [Algebre, Chap. 1], toda estructura algebraica es del tipo anterior.

1.7. Dada una especie de estructura hemos visto como definir los isomorfismos entre dos estructuras de dicha especie. Sin embargo, el estudio de especies de estructuras con isomorfismos sólo, es insuficiente para la matemática, en donde ocupa un lugar principalísimo, el estudio de otras aplicaciones, entre conjuntos provistos de estructuras de una misma especie; estas son los *homomorfismos* o simplemente *morfismos* que generalizan el concepto de isomorfismo.

Es interesante que describamos primeramente algunos morfismos especiales:

Ej. 4: Si $\mathfrak{R}$ es la especie de estructura de grupo, anillo, cuerpo, espacio vectorial, álgebra, etc., y $t \in \mathfrak{R}(E)$, $s \in \mathfrak{R}(E')$, una aplicación $f\colon E \to E'$ será un morfismo de t en s, si es un homomorfismo de grupo, anillo, cuerpo, espacio vectorial, álgebra, etc., respectivamente.

Ej. 5: Si $\mathfrak{T}$ es la especie de estructura topológica, un morfismo puede ser una aplicación *contínua* $f\colon E \to E'$.

Ej. 6: Para $\mathfrak{T}$ puede también definirse un morfismo como una aplicación *abierta* $f\colon E \to E'$.

En todo caso deben cumplirse las siguientes condiciones:

$\mathfrak{M}_1$: A cada par de conjuntos E, E' y estructuras $s \in \mathfrak{R}(E)$, $s' \in \mathfrak{R}(E')$, se encuentra asociado un conjunto $\tilde{\mathfrak{R}}(E, E', s, s')$ de aplicaciones de E en E', llamadas *morfismos* de la especie de estructura $\mathfrak{R}$, de tal modo que:

$\mathfrak{M}_2$: Si $s_i \in \mathfrak{R}(E_i)$, $1 \leqq i \leqq 3$ y $f \in \tilde{\mathfrak{R}}(E_1, E_2, s_1, s_2)$, $g \in \tilde{\mathfrak{R}}(E_2, E_3, s_2, s_3)$, entonces $g \circ f \in \tilde{\mathfrak{R}}(E_1, E_3, s_1, s_3)$. (o sea, la composición de dos homomorfismos es un homomorfismo.)

$\mathfrak{M}_3$: Para que $f\colon E \to E'$, f biyectiva, sea un isomorfismo, de $s \in \mathfrak{R}(E)$ con $s' \in \mathfrak{R}(E)$ es necesario y suficiente que $f \in \tilde{\mathfrak{R}}(E, E', s, s')$ y $f^{-1} \in \tilde{\mathfrak{R}}(E', E, s', s)$. (Todo isomorfismo es un homomorfismo y todo homomorfismo cuyo inverso exista y sea un homomorfismo es un isomorfismo.)

Si $f \in \tilde{\mathfrak{R}}(E, E', s, s')$, se dice simplemente que $f\colon s \to s'$.

El par $(\mathfrak{R}, \tilde{\mathfrak{R}})$, o si se quiere, el triplo $(\mathfrak{M}, \mathfrak{R}, \tilde{\mathfrak{R}})$, se denomina una „especie de estructura con homomorfismos".

Es evidente que, si consideramos $\tilde{\mathfrak{R}}(E, E', s, s')$ como el conjunto de todos los isomorfismos de la estructura s sobre la estructura s', tendremos una especie de estructura con homomorfismos, todos los cuales son isomorfismos.

Para toda especie de estructura con homomorfismos, podemos definir una relación de orden entre las estructuras de dicha especie como sigue:

Sean t, $t' \in \mathfrak{R}(E)$, se dice que t es una $\mathfrak{R}$-estructura *menos fina* que t' y se representa por $t \prec t'$, cuando la aplicación idéntica id: $(E, t') \to (E, t)$ sea un $\tilde{\mathfrak{R}}$-morfismo de t' en t.

2. CATEGORÍAS Y FUNTORES

2.1. Dada una especie de estructura con homomorfismos $(\mathfrak{R}, \tilde{\mathfrak{R}})$, sea $\mathfrak{R}_0$ la clase reunión de todos los conjuntos $\mathfrak{R}(E)$ y $\tilde{\mathfrak{R}}_1$ la de todos los homomorfismos de la especie dada: cada elemento de $\tilde{\mathfrak{R}}_1$ es un triplo (t', f, t), donde $f \in \tilde{\mathfrak{R}}(E, E', t, t')$. En adelante identificaremos $\tilde{\mathfrak{R}}$ al par $(\mathfrak{R}_0, \tilde{\mathfrak{R}}_1)$ cuando así convenga y a $\mathfrak{R}$ con el par $(\mathfrak{R}_0, \mathfrak{R}_1)$.

El par $(\mathfrak{R}_0, \tilde{\mathfrak{R}}_1)$ es un ejemplo de lo que llamamos „categoría con objetos" y la clase $\tilde{\mathfrak{R}}_1$ un ejemplo de categoría, lo mismo puede decirse de $(\mathfrak{R}_0, \mathfrak{R}_1)$ y $\mathfrak{R}_1$.

Definición 2. Una categoría es un par $(\mathfrak{C}_1, \Phi)$ donde Φ es una „multiplicación parcial" en $\mathfrak{C}_1$, es decir, Φ es una aplicación de un subconjunto $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_1$ en $\mathfrak{C}_1$ tal que (representaremos $\Phi(x, y)$ por xy; en el caso de ser $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{R}_1$, por ejemplo, es $x = (f, t)$, $y = (g, t')$, y $xy = (fg, t')$ cuando $t' = gt$):

CA$_1$: Si $(fg)h$ o $f(gh)$ están definidos, entonces ambos productos están definidos y son iguales: lo podemos representar simplemente por fgh.

CA$_2$: Si fg y gh están definidos entonces fgh lo está.

Llamemos *unidad* (aplicación idéntica, en el caso de que $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{R}_1$) a todo elemento $e \in \mathfrak{C}_1$ tal que si fe está definido $fe = f$ a si eg está definido, entonces $eg = g$, para f, $g \in \mathfrak{C}_1$ cualesquiera. Entonces la propiedad tercera se enuncia así:

CA$_3$: Para $f \in \mathfrak{C}_1$ cualquiera, existen dos unidades $\alpha(f)$ y $\beta(f)$ tales que $f\,\alpha(f)$ y $\beta(f) f$ estén definidos.

Corolario. Si e es una unidad y ef está definido, entonces $\beta(f) = e$. Si fe está definido, entonces $\alpha(f) = e$. Para que fg esté definido es necesario y suficiente que $\alpha(f) = \beta(g)$.

En efecto, si e = unidad, ef definido, entonces $ef = e(\beta(f) f) = (e\,\beta(f)) f = f$ y $e\,\beta(f)$ está definido, por lo tanto, $\beta(f) = e\,\beta(f) = e$. Lo mismo se demuestra que si e = unidad y fe está definido $e = \alpha(f)$.

Si ahora fg existe, $fg = (f\,\alpha(f))\,(\beta(g)\,g) = f(\alpha(f)\,\beta(g))\,g$ por lo que $\alpha(f)\,\beta(g)$ está definido y $\alpha(f) = \alpha(f)\,\beta(g) = \beta(g)$. Si por otra parte, $\alpha(f) = \beta(g)$, entonces $f\,\alpha(f)$ y $\alpha(f)\,g$ están definidos y por lo tanto, lo está $f\,\alpha(f)\,g = fg$.

En la demostración anterior se ha demostrado que si dos unidades tienen un producto definido, ambas son iguales a su producto.

Notación. Se pondrá $f : \alpha(f) \to \beta(f)$.

Definición 3. Una clase $\mathfrak{C}_0$ de *objetos* para la categoría $\mathfrak{C}_1$ es una clase en correspondencia biyectiva con la clase de las unidades de $\mathfrak{C}_1$. Una *categoría con objetos* es un par $(\mathfrak{C}_0, \mathfrak{C}_1) \equiv \mathfrak{C}$ donde $\mathfrak{C}_1$ es una categoría y $\mathfrak{C}_0$ es una clase de objetos para $\mathfrak{C}_1$. Si B está asociado a $\beta(f)$ y A a $\alpha(f)$, se pondrá $f\colon A \to B$.

Ej. 7: Se puede hablar pues de las categorías (con objetos) de las aplicaciones continuas, de las aplicaciones abiertas, de los homomorfismos du grupos, de las aplicaciones lineales (morfismos de la especie de estructura de espacio vectorial), etc.

Ej. 8: La categoría $\mathfrak{E}_1$ de las aplicaciones de un conjunto en otro.

Ej. 9: La catégoría $\mathfrak{E}_1$ de las aplicaciones biyectivas de un conjunto cualquiera en otro.

La clase $\mathfrak{E}_0$ de todos los conjuntos es una clase de objetos para las anteriores categorías: a toda unidad asociamos el conjunto del cual ella es la aplicación idéntica.

2.2. Definición 4. Dadas dos categorías $\mathfrak{C}_1$ y $\mathfrak{C}_1'$ llamamos *funtor* a toda aplicación:

$$T\colon \mathfrak{C}_1 \to \mathfrak{C}_1'$$

tal que:

a) Si e es una unidad de $\mathfrak{C}_1$, $T(e)$ es una unidad de $\mathfrak{C}_1'$, además, si $f\colon e \to e'$, entonces $T(f)\colon T(e) \to T(e')$.

b) Si fg existe, $T(f)\,T(g)$ también y

$$T(fg) = T(f)\,T(g)\,.$$

b′) En el mismo caso anterior:

$$T(gf) = T(f)\,T(g)\,.$$

En caso que se cumpla b) se dice que T es un funtor *covariante* y en caso de que se cumpla b′) *contravariante.*

Si $\mathfrak{C}_0$ y $\mathfrak{C}_0'$ son objetos para las categorías anteriores, el funtor T puede extenderse a estos objetos de la siguiente manera: si $A \in \mathfrak{C}_0$, e_A la unidad de $\mathfrak{C}_1$ asociada a A, $B \in \mathfrak{C}_0'$ es el objeto asociado a $T(e_A)$, entonces por definición $T(A) = B$.

Esquemáticamente, un funtor covariante para dos categorias $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}$ con objetos se representa por

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{C} \arrow[d] & A \arrow[r, "f"] & A' \arrow[r, "g"] & A'' \\
\mathfrak{C}' & T(A) \arrow[r, "T(f)"] & T(A') \arrow[r, "T(g)"] & T(A'')
\end{tikzcd}$$

y uno contravariante por:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{C} \arrow[d] & A \arrow[r, "f"] & A' \arrow[r, "g"] & A'' \\
\mathfrak{C}' & T(A) & T(A') \arrow[l, "T(f)"'] & T(A'') \arrow[l, "T(g)"']
\end{tikzcd}$$

Los objetos pueden a veces servirnos para definir un funtor, cuando tenemos ante nosotros una especie de estructura:

Ej. 10: Sea $\tilde{\mathfrak{G}} = (\mathfrak{G}_0, \tilde{\mathfrak{G}}_1)$ la categoría de todos los grupos y todos los homomorfismos de un grupo en otro. Para todo $(s', f, s) \in \tilde{\mathfrak{G}}_1$, f es una aplicación de un conjunto G en otro G': desde un punto de vista intuitivo (s', f, s) sería la aplicación f: $G \to G'$ considerada como homomorfismo de grupos y f la misma considerada como aplicación de conjuntos. La aplicación T: $\tilde{\mathfrak{G}}_1 \to \tilde{\mathfrak{E}}_1$ definida por $T(s', f, s) = f$ es un funtor.

Este ejemplo puede extenderse a cualquier especie de estructura con homomorfismos. Si $\tilde{\mathfrak{R}}$ es una especie de estructura con homomorfismos, el funtor T: $\tilde{\mathfrak{R}}_1 \to \tilde{\mathfrak{E}}_1$ construido de la manera anterior será denominado „funtor canónico" de la especie $\tilde{\mathfrak{R}}$. Denominaremos $\tilde{\mathfrak{R}}_c$ a la imagen del funtor canónico de $\tilde{\mathfrak{R}}$ y por $\tilde{\mathfrak{R}}_{c0} = \mathfrak{R}_{c0}$ la clase de los objetos de $\tilde{\mathfrak{R}}_c$: si f: $E \to E'$, entonces $E, E' \in \tilde{\mathfrak{R}}_{c0}$.

Los funtores canónicos anteriores son ejemplos triviales de funtores, ejemplos más importantes serán estudiados más adelante. Un funtor no trivial es por ejemplo cualquier funtor de homología, utilizado en la topología algebraica.

2.3. En muchas ocasiones se nos presenta el caso de considerar relaciones entre funtores que llamamos „transformaciones naturales" de un funtor en otro. La definición correspondiente es la que sigue:

Definición 5. Sean $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_1'$ dos categorías y T, S: $\mathfrak{C}_1 \to \mathfrak{C}_1'$ dos funtores de la misma denominación (ambos covariantes o ambos contravariantes): una aplicación natural τ: $T \to S$ de T en S, es una aplicación que a toda unidad $e \in \mathfrak{C}_1$ asocia un morfismo $\tau e \in \mathfrak{C}_1'$ tal que:

1. $\alpha(\tau e) = T(e)$ y $\beta(\tau e) = S(e)$.
2. Si $f \in \mathfrak{C}_1$ entonces:

$$S(f)\,\tau\,\alpha(f) = \tau\,\beta(f)\,T(f) \quad \text{o} \quad \tau\,\alpha(f)\,T(f) = S(f)\,\tau\,\beta(f)$$

según que S y T sean covariantes o contravariantes respectivamente. Mediante el uso de diagramas, podemos hacer más memorizable las anteriores condiciones, sobre todo la segunda: La primera quiere decir que

$$\tau e\colon\ T(e) \to S(e)$$

y la segunda, que uno de los siguientes diagramas es conmutativo, según que T sea covariante o contravariante respectivamente, cuando f: $e \to e'$:

$$\begin{tikzcd} T(e) \arrow[r, "T(f)"] \arrow[d, "\tau e"'] & T(e') \arrow[d, "\tau e'"] \\ S(e) \arrow[r, "S(f)"] & T(e') \end{tikzcd} \quad \text{o} \quad \begin{tikzcd} T(e) \arrow[d, "\tau e"'] & T(e') \arrow[l, "T(f)"'] \arrow[d, "\tau e'"] \\ S(e) \arrow[r, "S(f)"] & T(e') \end{tikzcd}$$

2.4. Terminemos este párrafo con algunas consideraciones respecto a elementos inversibles de una categoría:

a) Un elemento $f \in \mathfrak{C}_1$ de una categoría se llama inversible si existen $f', f'' \in \mathfrak{C}_1$ tales que ff' y $f''f$ existan y sean unidades. En ese caso $f''ff'$ existe y $f'' = f''(ff') = (f''f)f' = f'$, de donde también $ff' = f''f$. El elemento $f' = f''$ se denomina „inverso" de f y se representa por f^{-1}. También se dice que f es una *equivalencia*. Todas las unidades son equivalencias.

b) Si en una categoría todos los elementos son inversibles la categoría se denomina un *grupoide*. Ej. $\mathfrak{R}_1$ y $\mathfrak{R}_c$, donde $\mathfrak{R}$ es una especie de estrucura con isomorfismos solamente.

c) Se dice que una transformación natural $\tau: T \to S$ es una *equivalencia natural*, si para toda unidad $e \in \mathfrak{C}_1$, $\tau e \in \mathfrak{C}'_1$ es una equivalencia.

3. ESPECIES DE ESTRUCTURAS Y GRUPOIDES

3.1. CH. EHRESMANN [4] consideró por primera vez la definición de una especie de estructura a partir de un grupoide. Antes de hacer una definición general, puede considerarse el siguiente ejemplo:

Sea $\mathfrak{T}_c$ el grupoide definido en 2.2, donde $\mathfrak{T}$ es la especie de estructura topológica, para cada unidad $e \in \mathfrak{T}_c$, existe un conjunto E, tal que e: $E \to E$ es la identidad, la especie $\mathfrak{T}$ de estructura asocia a E, el conjunto $\mathfrak{T}(E)$; denotemos por $T(e)$ la aplicación idéntica de $\mathfrak{T}(E)$. Si f: $e \to e'$, entonces f: $E \to E'$ es biyectiva y $\bar{f}$: $\mathfrak{T}(E) \to \mathfrak{T}(E')$ también. Sea $T(f) = \bar{f}$. Por otra parte, es evidente que $\overline{f \circ g} = \bar{f} \circ \bar{g}$; luego $T: \mathfrak{T}_c \to \mathfrak{E}_1$ así definida es un funtor. Si al revés, nos damos la categoría $\mathfrak{T}_c$, y el funtor T, esto determinaría la especie de estructura $\mathfrak{T}$. Si consideramos T extendida a los objetos canónicos $T(E) = \mathfrak{T}(E)$.

Es claro que de esta manera podemos definir toda especie de estructura, como las definidas anteriormente, por medio de un grupoide $\mathfrak{C}_1$ y un funtor T: $\mathfrak{C}_1 \to \mathfrak{E}_1$.

Definición 6. Sea $\mathfrak{C}_1$ un grupoide: una especie de estructura sobre $\mathfrak{C}_1$ es un funtor covariante T: $\mathfrak{C}_1 \to \mathfrak{E}_1$, que satisface a la condición siguiente:

Si e, e' son unidades distintas de $\mathfrak{C}_1$, y A y B son los conjuntos asociados canónicamente a $T(e)$ y $T(e')$ respectivamente,

$$A \cap B = \emptyset .$$

En algunas ocasiones, representaremos la especie de estructura anterior por el par $(\mathfrak{C}_1, T)$.

Consideremos una clase de objetos $\mathfrak{C}_0$ para $\mathfrak{C}_1$ y $T: \mathfrak{C}_0 \to \mathfrak{E}_0$ la aplicación que extiende canónicamente al tensor anterior. Sea:

$$\mathscr{D}_0 = \bigcup_{a \in \mathfrak{C}_0} T(a) .$$

Definamos, para cada $f \in \mathfrak{C}_1$, $t \in T(a)$, $f\colon a \to b$, $ft = T(f)\,t \in T(b)$. Entonces cada $f \in \mathfrak{C}_1$ „opera" sobre una parte de $\mathscr{D}_0$. Cada par (f, t) tal que ft exista, se dice que es un *isomorfismo* de t sobre ft.

El conjunto de todos estos pares constituye una categoría $\mathscr{D}_1$ con la ley de composición:

$$(f, t)\,(g, s) = (fg, s)$$

si y sólo si $t = gs$. $\mathscr{D}_1$ es un grupoide, puesto que si f tiene inverso (f^{-1}, ft) es el inverso de (f, t) y $\mathfrak{C}_1$ es un grupoide. Para que (f, t) sea una unidad es necesario y suficiente que f sea una unidad de $\mathfrak{C}_1$ y ft esté definida. La aplicación que a toda unidad $(e, t) \in \mathscr{D}_1$ hace corresponder el elemento $t \in \mathscr{D}_0$ es biunívoca y por lo tanto, $\mathscr{D}_0$ es una clase de objetos para la categoría $\mathscr{D}_1$: en efecto, si (e, t) y (e', t) son unidades de $\mathscr{D}_1$, entonces $T(e)\,t = et = T(e')\,t = e't = t$ y $T(e) = T(e')$ lo que implica (Def. 6a)) $e = e'$.

Podemos por último, definir una „proyección" $p\colon \mathscr{D}_0 \to \mathfrak{C}_0$, dada por: $p(t) = \alpha(f)$ si ft está definida. Dicha proyección se extiende a un funtor $p\colon \mathscr{D}_1 \to \mathfrak{C}_1$ definido por $p(f, t) = f$: en efecto, si $e = \alpha(f)$, entonces $(e, t) = \alpha(f, t)$ y si $e = \beta(f)$, $(e, ft) = \beta(f, t)$. Si $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{R}_c$ donde $\mathfrak{R}$ es una especie de estructura definida como en 1.5, $\mathscr{D}_1 = \mathfrak{R}_1$ (ver 2.2).

Por otra parte, sea una clase $\mathscr{D}_0$ sobre la cual $\mathfrak{C}_1$ „opera", esto es, para ciertos pares (f, t), $f \in \mathfrak{C}_1$ y $t \in \mathscr{D}_0$, $ft \in \mathscr{D}_0$ está definido de manera que se cumpla:

a) Si un producto $g(ft)$ o $(gf)\,t$ está definido, ambos lo están y son iguales, pudiéndose entonces escribir gft en lugar de ambos $(f, g \in \mathfrak{C}_1,\ t \in \mathscr{D}_0)$.

b) Si gf y ft están definidos, también lo está gft.

c) Si e es una unidad de $\mathfrak{C}_1$ y et $(t \in \mathfrak{C}_0)$ está definido, $et = t$.

d) Para todo $f \in \mathfrak{C}_1$ existe un $t \in \mathscr{D}_0$ tal que ft está definido y para cada $t \in \mathscr{D}_0$, existe $f \in \mathfrak{C}_1$ tal que ft esté definido.

Si $\mathscr{D}_0$ es una tal clase, el conjunto de los $t \in \mathscr{D}_0$ para los cuales ft está definido se representará por $T(a)$, donde $a \in \mathfrak{C}_0$ = conjunto de objetos para $\mathfrak{C}_1$ y $f\colon a \to b$. De esta manera obtenemos una aplicación $T\colon \mathfrak{C}_0 \to \mathfrak{C}_0$. Construyamos la categoría $\mathscr{D}_1$ como anteriormente y obtendremos un funtor $T\colon \mathfrak{C}_1 \to \mathscr{D}_1$, definido por: $T(f)\,t = ft$, para todo $t \in T(a)$. Puesto que $\mathscr{D}_1 \subset \mathfrak{C}_1$, esto nos da un funtor $T\colon \mathfrak{C}_1 \to \mathfrak{C}_1$ que cumple las condiciones de la def. 6.

De aquí la siguiente definición:

Definición 7. Sea $\mathfrak{C}_1$ un grupoide de operadores sobre una clase $\mathscr{D}_0$, el par $(\mathfrak{C}_1, \mathscr{D}_0)$ se denomina una „especie de estructura sobre $\mathfrak{C}_1$".

Esta definición es más general que la que hemos dado anteriormente. Un tal punto de vista puede verse en los trabajos [2] y [4]. En este marco pueden definirse las especies de estructuras con homomorfismos como sigue: una categoría de homomorfismos para la especie de estructura $(\mathfrak{C}_1, \mathscr{D}_0)$, es una categoría $\mathscr{D}_1$ tal que $\mathfrak{C}_1$ tenga las mismas unidades que $\mathscr{D}_1$ y que $\mathfrak{C}_1$ sea el grupoide de los elementos inversibles de $\tilde{\mathscr{D}}_1$. Para una discusión más amplia de estos temas consultar las referencias mencionadas.

3.2. Una subordinación de una especie $(\mathfrak{C}_1, T)$ de estructura a una especie $(\mathfrak{C}_1, S)$ sobre el mismo grupoide no es más que una transformación natural τ: $T \to S$. Si $\mathscr{D}_0$ y $\mathscr{D}'_0$ son los conjuntos de todas las estructuras de tipo T y S sobre $\mathfrak{C}_1$, la subordinación τ asocia, a toda unidad $e \in \mathfrak{C}_1$ una aplicación τe: $T(e) \to S(e)$. El lector puede fácilmente identificar la definición anterior de subordinación como un caso especial de la que hemos hecho anteriormente.

4. ESPECIES DE ESTRUCTURAS LOCALES

4.1. Estructuras Inductivas. Para muchas especies de estructuras y en efecto, para las más importantes: estructuras de orden, estructuras algebraicas (grupos, anillos, cuerpos, módulos, álgebras, etc.) y estructuras topológicas, se pueden definir leyes de „inducción", esto equivale a definir „subestructuras" de una estructura dada.

Ej. 11: Dado E, $A \subset E$, un elemento $t \in \mathfrak{T}(E)$ determina un elemento $t_A \in \mathfrak{T}(A)$ de un modo conocido, el par (A, t_A) es un „subespacio topológico" del par (E, t): se dice que la estructura t_A está inducida por t sobre A. De esta manera se define una aplicación φ: $\mathfrak{T}(E) \to \mathfrak{T}(A)$, para todo par (A, E) donde $A \subset E$.

Ej. 12: En lugar de considerar todos los pares (A, E), podemos considerar la ley de inducción restringida al caso en que A sea un abierto de E para la topología t.

Ej. 13: Dado un elemento $g \in \mathfrak{G}(E)$ (conjunto de las estructuras de grupo sobre E), existen subconjuntos (subgrupos) de E sobre los cuales g determina una estructura de la misma especie. Si $A \subset E$ es un subconjunto tal y g_A es la estructura inducida, el par (A, g_A) se dice un „subgrupo" del par (E, t).

En lugar de las distintas aplicaciones $\mathfrak{K}(E) \to \mathfrak{K}(A)$ que definen una inducción para una especie de estructura $\mathfrak{K}$, consideremos el asunto desde otro punto de vista. Sea $\mathfrak{K}_0$, como anteriormente, el conjunto de todas las estructuras de especie $\mathfrak{K}$. Una ley de inducción determina, para cada $t \in \mathfrak{K}_0$ un subconjunto $\varphi(t)$ de todas las estructuras que se consideran inducidas por t, o sea, $\varphi(t)$ es el conjunto de las „subestructuras" de t. Esta ley de inducción debe cumplir ciertas leyes que se pueden deducir de ciertas consideraciones naturales:

a) La primera es que si f: $E \to E'$ es un isomorfismo de $t \in \mathfrak{K}(E)$ sobre $\tilde{f}t = t' \in \mathfrak{K}(E')$ y t_A está definida, donde $A \subset E$, entonces $t_{f(A)}$ está definida y $\tilde{f}t_A = t_{f(A)}$. Esto nos dice que en definitiva, la ley de inducción no depende de la naturaleza de los elementos de E y E'. Este podría denominarse „principio de invarianza".

b) Si $B \subset A \subset E$, $t \in \mathfrak{K}(E)$ y t_A está definida, entonces la razón necesaria y suficiente para que t_B esté definida es que $(t_A)_B$ lo esté y en ese caso: $(t_A)_B = t_B$. Este podría denominarse „principio de transitividad".

c) Si para dos estructuras $t, s \in \mathfrak{R}(E)$ y todo $A \subset E$ sucede que t_A y s_A existen o no simultáneamente y $t_A = s_A$ cuando existen, entonces debe ser $t = s$. Sea éste el „principio de unicidad".

d) Sea $\mathscr{A} \subset \mathfrak{P}E$ tal que, para algún $t \in \mathfrak{R}(E)$ y todo $A \in \mathscr{A}$, t_A existe, entonces existe $B \subset E$ tal que $\bigcup \mathscr{A} \subset B$, t_B existe, y si B' cumple las mismas condiciones, entonces $B \subset B'$. (Si llamamos $\mathscr{B}$ al conjunto de todos los B' posibles, entonces $B = \bigcap \mathscr{B}$; en algunos casos (Ej. 11 y 12) es $B = \bigcup \mathscr{A}$, pero esto no es necesario, como lo muestra el ejemplo 13.) Llamemos a éste el „principio de la agregación".

Veamos lo que sucede con la categoría $\mathfrak{R}_1$ de todos los isomorfismos de $\mathfrak{R}$ (ver 2.2); representemos cada elemento de $\mathfrak{R}_1$ por un par (f, t) donde $f: E \to E'$ es una aplicación biyectiva y $t \in \mathfrak{R}(E)$, entonces f es un isomorfismo de t con $ft \in \mathfrak{R}(E')$.

A cada $(f, t) \in \mathfrak{R}_1$, hagamos corresponder el conjunto $\Psi(f, t)$ de todos los (f_A, t_A) donde $f \in \mathfrak{R}(E)$ y $A \subset E$ es tal que t_A existe; entonces:

a′) Si $(e, s) \in \mathfrak{R}_1$ es una unidad, entonces $\Psi(e, s)$ está compuesto por unidades.

b′) Si $(f, t)(f', t')$ existe, es decir $t = f't'$, entonces $\Psi(f, t)(f', t')) = \Psi(f, t) \,.\, \Psi(f', t')$, donde la última expresión designa el conjunto de todos los productos ab, donde $a \in \Psi(f, t)$ y $b \in \Psi(f', t')$ tales que ab exista.

En $\mathfrak{R}_c$ tenemos: representemos por $\Phi(f)$ el conjunto de todas las restricciones f_A donde t_A exista para algún $t \in \mathfrak{R}(E)$, $A \subset E$ y $f: E \to E'$. Entonces:

a″) Si $e \in \mathfrak{R}_c$ es una unidad, $\Phi(e)$ está compuesto por unidades.

b″) Si fg existe, $f, g \in \mathfrak{R}_c$, entonces $\Phi(fg) = \Phi(f)\,\Phi(g)$, donde $\Phi(f)\,\Phi(g)$ se define de una manera enteramente similar a la definición en b′).

En general, tenemos la siguiente:

Definición 8. Sean $\mathfrak{C}_1$ y $\mathfrak{C}_1'$ dos categorías: un „funtor generalizado" $\Omega: \mathfrak{C}_1 \to \mathfrak{P}\mathfrak{C}_1'$ es una aplicación de $\mathfrak{C}_1$ en $\mathfrak{P}\mathfrak{C}_1'$ tal que:

1) Si $e \in \mathfrak{C}_1$ es una unidad, $\Omega(e) \subset \mathfrak{C}_1'$ es un conjunto (o clase) de unidades.

2) Si $f, g \in \mathfrak{C}_1$ y fg existe, $\Omega(fg) = \Omega(f)\,\Omega(g)$.

De acuerdo con esto, las aplicaciones Ψ y Φ son funtores generalizados. Dichos funtores están relacionados entre sí, de una manera que explicaremos.

Primeramento observamos que ambos funtores son funtores „inductivos", en el sentido de la siguiente:

Definición 9. Sea $\Omega : \mathfrak{C}_1 \to \mathfrak{C}_1$ un funtor generalizado, se dice que Ω es *inductivo*, si se cumplen las siguientes condiciones:

i_1) Para todo $f \in \mathfrak{C}_1$ es

$$\Omega(\alpha(f)) = \alpha(\Omega(f)),$$

es decir $\Omega(\alpha(f))$ es el conjunto de las unidades derechas de los elementos de $\Omega(f)$.

i_2) Para cada $e \in \Omega(\alpha(f))$ existe un único $g \in \Omega(f)$ tal que $e = \alpha(g)$: se dico que g es el elemento *inducido* por f sobre e.

i_3) Si $g \in \Omega(f)$ entonces $\Omega(g) \subset \Omega(f)$ (transición).

i_4) Si $\Omega(f) \doteq \Omega(g)$ entonces $f = g$ (unicidad).

i_5) Si $\mathscr{A} \subset \Omega(f)$, existe un $g \in \mathfrak{C}_1$ tal que: $\mathscr{A} \subset \Omega(g)$, si $\mathscr{A} \subset \Omega(g')$, entonces $g \in \Omega(g')$.

Por i_4, el elemento g postulado en i_5 es único y se denominará el *agregado* de $\mathscr{A}$ y se representará por $\bigcup\mathscr{A}$: designaremos por $f \cup g \cup \ldots$ el agregado de $\{f, g, \ldots\}$ cuando éste esté definido. Es consecuencia de los anteriores axiomas que $\alpha(\bigcup\mathscr{A}) = \bigcup\alpha(\mathscr{A})$, $\beta(\bigcup\mathscr{A}) = \bigcup\beta(\mathscr{A})$ y $\bigcup\Omega(f) = f$. El agregado de $\Omega(f) \cap \Omega(g)$ se representará por $f \cap g$; para que $f \cap g$ exista siempre, convenimos en agregar a $\mathfrak{C}_1$, si necesario, un elemento o distinguido, tal que $o = f \cap g$ si $\Omega(f) \cap \Omega(g) = \emptyset$.

En lugar del funtor generalizado Ω podemos considerar la relación de orden en $\mathfrak{C}_1$ definida por:

$$g \prec f \Leftrightarrow g \in \Omega(f)\,.$$

Pondremos además $o \prec f$ para todo $f \in \mathfrak{C}_1$: esto equivale a agrandar los $\Omega(f)$, poniendo $o \in \Omega(f)$ para todo $f \in \mathfrak{C}_1$ y $\Omega(o) = o$. Los axiomas i_3 e i_4 nos dicen que la anterior es una verdadera relación de orden; i_5 nos dice que si $\mathscr{A} \subset \mathfrak{C}_1$ está acotado superiormente, existe entonces una cota superior mínima. El axioma i_1 nos dice que $g \prec f \Rightarrow \alpha(g) \prec \alpha(f)$.

Un par $(\mathfrak{C}_1, \Omega)$ donde $\mathfrak{C}_1$ es una categoría y Ω un funtor de inducción se denominará una „categoría inductiva“.

4.2. Si $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{T}_1$, entonces se cumple además para Ψ y para Φ el siguiente axioma (Ejs. 11 y 12):

i_6) Si e, e' son unidades de $\mathfrak{C}_1$ y $\mathscr{A} \subset \Omega(e)$, es $(\bigcup\mathscr{A}) \cap e' = \bigcup\limits_{e \in \mathscr{A}} (e \cap e')$ (axioma de distributividad).

Nota. En general este axioma se cumple siempre que se tenga una especie de estructura $\mathfrak{R}$ y una subordinación τ: $\mathfrak{R} \to \mathfrak{T}$ tal que: si $t \in \mathfrak{R}(E)$, t_A existe para todo elemento $A \in \tau t \in \mathfrak{T}(E)$: éste fué el caso considerado en la primera definición de estructura local [6] (consúltese también [1]).

Si el axioma i_6 se cumple, decimos que Ω es un funtor „local“ y que $(\mathfrak{C}_1, \Omega)$ es una categoría local.

Las relaciones entre los funtores Ψ y Φ que señalamos anteriormente, son las siguientes: Sea $p : \mathfrak{R}_1 \to \mathfrak{R}_c$ la proyección canónica $(p(f, t) = f)$, sabemos que puede extenderse a $\mathfrak{R}_0$, siendo $p(t)$ igual a la unidad $e \in \mathfrak{R}_c$ tal que et esté definida, es decir: $e = \mathrm{id}\colon E \to E$ si $t \in \mathfrak{R}(E)$; entonces:

1) p aplica $\Psi(f, t)$ $((f, t) \in \mathfrak{R}_1)$ biunívocamente sobre un subconjunto de $\Phi(f)$.

2) Si (e, t) es una unidad de $\mathfrak{R}_1$, $s, s' \in \Psi(e, t)$, entonces $p(s \cap s') = p(s) \cap p(s')$.

3) Sea (e, t) una unidad, entonces: $\mathscr{A} \subset \Psi(e, t)$ implica que existe $u \in \Psi(e, t)$ tal que $p(u) = \bigcup p(\mathscr{A})$. De donde $u = \bigcup\mathscr{A}$ y $p(\bigcup\mathscr{A}) = \bigcup p(\mathscr{A})$.

Definición 10. Una „especie de estructura local“ está dada por: una especie de estructura $(\mathfrak{C}_1, \mathscr{D}_0, p)$ y dos funtores locales Φ: $\mathfrak{C}_1 \to \mathfrak{P}\mathfrak{C}_1$ y Ψ: $\mathscr{D}_1 \to \mathfrak{P}\mathscr{D}_1$ que cumplen con las condiciones 1), 2) y 3) anteriores.

Las estructuras locales son aquellas de tipo más general, donde pueden definirse propiedades de las llamadas „locales“. Para una discusión más completa de las mismas puede verse el trabajo de CH. EHRESMANN [4] y también el de P. DEDECKER [2].

Nosotros dejamos el punto de vista más general, para estudiar los casos más sencillos, que nos serán suficientes. La anterior exposición ha tenido como objeto servir de introducción al trabajo fundamental [4].

Volvamos a las estructuras definidas en el § 1. Sea $\mathfrak{R}$ una especie de estructura local, dado un conjunto E, y $t \in \mathfrak{R}(E)$, el conjunto $\Phi(t)$ definido anteriormente determina un conjunto de partes de E, que denominamos $\Phi(E)$, cada $A \in \Phi(E)$ es un subconjunto de E tal que t_A existe. Es fácil ver que se cumplen las siguientes propiedades:

1) $E \in \Phi(E)$. Podemos además agregar $\emptyset$ a $\Phi(E)$ sin que la discusión anterior pierda sentido; $\emptyset$ ocuparía el lugar del elemento o definido en 4.1.

2) Si $\mathscr{A} \subset \Phi(E)$, entonces $\bigcup \mathscr{A} \in \Phi(E)$, según el principio de agregación (definimos por $\bigcup \mathscr{A}$ el conjunto que es dominio del agregado de las t_{A}, $A \in \mathscr{A}$).

3) Si $A, B \in \Phi(E)$, entonces, el conjunto $A \cap B$ que es el dominio de $t_A \cap t_B$ es un elemento de $\Phi(E)$.

Podemos ver la analogía entre estas propiedades y las de los conjuntos abiertos de una topología sobre E; existe no obstante la diferencia que ni $A \cap B$ es la „intersección“ en el sentido conjuntista, ni $\bigcup \mathscr{A}$ es la „unión“ en el mismo sentido. Por ejemplo, si $\mathfrak{R}$ es la especie de estructura de grupo, $A, B \in \Phi(E)$, sabemos que $A \cup B$ no es más que $A \oplus B \neq A \cup B$, en general.

Definición 11. Sea $\mathfrak{R}$ una especie de estructura local y $\mathfrak{D} \subset \Phi(E)$ tal que las anteriores propiedades se cumplan para $\mathfrak{D}$ en lugar de $\Phi(E)$, diremos que $\mathfrak{D}$ es una *paratopología* definida sobre E, respecto a la especie $\mathfrak{R}$.

El conjunto de todas las paratopologías sobre E respecto a $\mathfrak{R}$, es una parte de $\mathfrak{P}\, \Phi(E)$ que representaremos por $\mathfrak{R}^\tau(E)$. $\mathfrak{R}^\tau$ será considerado como un funtor que define una especie de estructura que llamamos „especie de estructura paratopológica con respecto a $\mathfrak{R}$“.

Nótese que existe una subordinación τ: $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}^\tau$ determinada por: a cada $t \in \mathfrak{R}(E)$ corresponde $\tau t \in \mathfrak{R}^\tau(E)$ determinada por τt = conjunto de todos los $A \subset E$ para los cuales t_A existe.

Nosotros consideraremos de manera especial aquellos casos en que $\Phi(E)$ es una verdadera topología sobre E: el caso más evidente es el del Ej. 12. Llamaremos a una tal estructura local „estructura local restringida“: éstas fueron las primeras consideradas [5] históricamente. Supondremos en adelante que todas las estructuras locales consideradas satisfacen al siguiente axioma:

Axioma de Totalización $(fr.\ recollement)$: *Sea E un conjunto, $(A_i)_{i\in I}$ una familia de partes de E, $s_i \in \dot{\mathfrak{R}}(A_i)$, donde $\mathfrak{R}$ es una especie de estructura local, supongamos que $A_i \cap A_j \in \Phi(A_i)$, $\Phi(A_j)$ y sea $s_{ij} = (s_i)_{A_j}$; la condición se expresa de la siguiente manera:*

Si $s_{ij} = s_{ji}$ para todo par $(i, j) \in I \times I$, entonces existe $A \subset E$ tal que $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ (lo que implica $A_i \in \Phi(A)$ para todo $i \in I$) y un único $s \in \Phi(A)$ *tal que $s_{A_i} = s_i$. Indudablemente, entonces $s = \bigcup_{i\in I} s_i$.*

La condición $s_{ij} = s_{ji}$ se expresa diciendo que la familia $(s_i)_{i\in I}$ es „compatible“.

El axioma de totalización se cumple sin duda en el ej. 12, los A_i son entonces abiertos para la topologías sobre A y A es la reunión de los A_i.

5. PSEUDOGRUPOS

5.1. Sea E un conjunto cualquiera, Γ un conjunto de aplicaciones tales que:

$\mathbf{p_1}$: Toda $f \in \Gamma$ es una aplicación biunívoca de un subconjunto de E sobre otro subconjunto de E.

$\mathbf{p_2}$: Si $f \in \Gamma$, entonces $f^{-1} \in \Gamma$.

$\mathbf{p_3}$: Si $f, g \in \Gamma$ entonces $g \circ f \in \Gamma$, se considera $g \circ f$ definida si $\mathrm{Im}\,(f) \cap \cap \mathrm{Dom}\,(g) \neq \emptyset$.

$\mathbf{p_4}$: La aplicación idéntica id_E: $E \to E$ es elemento de Γ.

Se dice que un conjunto de aplicaciones biunívocas $\mathscr{A}$ de partes de E sobre partes de E, admite una reunión, denotada por $\bigcup\mathscr{A}$, si existe una aplicación biyectiva f: $D \to D'$, tal que $D = \bigcup_{g\in\mathscr{A}} \mathrm{Dom}\,(g)$ y $f \mid \mathrm{Dom}\,(g) = g$ para todo $g \in \mathscr{A}$. Pondremos $f = \bigcup\mathscr{A}$. Indudablemente f es única. La quinta propiedad de Γ es la siguiente:

$\mathbf{p_5}$: Si $\mathscr{A} \subset \Gamma$ y $\bigcup\mathscr{A}$ existe, $\bigcup\mathscr{A} \in \Gamma$.

Definición 12. Un conjunto Γ de aplicaciones que cumple las propiedades p_1 a p_5 se denomina un *pseudogrupo* de transformaciones de E.

En todos los ejemplos que consideraremos se cumplirá además lo siguiente:

$\mathbf{p_6}$: Si $\mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) = f \cap g \neq \emptyset$ entonces $f \mid f \cap g \in \Gamma$ (y de aquí, por simetría, también $g \mid f \cap g \in \Gamma$). Si $f \cap g = \emptyset$, podemos agregar a Γ un elemento 0 llamado la „aplicación nula“ tal que $f \mid \emptyset = 0$ para todo $f \in \Gamma$, y tal que 0: $\emptyset \to \emptyset$.

De aquí se deduce que el conjunto γ de todos los dominios de aplicaciones de Γ constituye una topología en E: en efecto, por p_6 y p_4: $\emptyset, E \in \gamma$; además, p_6 nos dice que $\mathrm{Dom}\,(f) \cap \mathrm{Dom}\,(g) \in \gamma$ siempre; por otra parte, si $f \in \Gamma$, f: $A \to B$, entonces por p_2, $f^{-1} \in \Gamma$ y por p_3, $f_0^{-1}f = \mathrm{id}_A \in \Gamma$, luego $\mathscr{A} \subset \gamma \Rightarrow \bigcup\mathscr{A} \in \gamma$, puesto que cualquier conjunto de identidades tiene una reunión.

Si ahora $\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Dom}\,(g) = \emptyset$, se define $gf = 0$; además, si $\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Dom}\,(g) = = \mathrm{Dom}\,(f^{-1}) \cap \mathrm{Dom}\,(g) \neq 0$, se puede definir $gf = g \circ f \mid f^{-1}(f^{-1} \cap g)$. De esta manera, en Γ puede definirse una multiplicación generalizada que siempre existe por p_6 y p_3.

Definición 13. Sea M otro conjunto cualquiera: una *carta local* es una aplicación φ; $U \to M$ de un abierto U de E en M. Se dice que dos cartas locales φ_1 y φ_2 son „compatibles" con respecto a Γ si, o bien $\operatorname{Im}(\varphi_1) \cap \operatorname{Im}(\varphi_2) = K = \emptyset$, o bien $K \neq \emptyset$ y $\psi = (\varphi_2^{-1} \mid K) \circ (\varphi_1 \mid \varphi_1^{-1}(K)) \equiv \varphi_2^{-1}\varphi_1 \in \Gamma$: esta última aplicación se denomina „el cambio de cartas de φ_1 a φ_2". (Ver figura 1.)

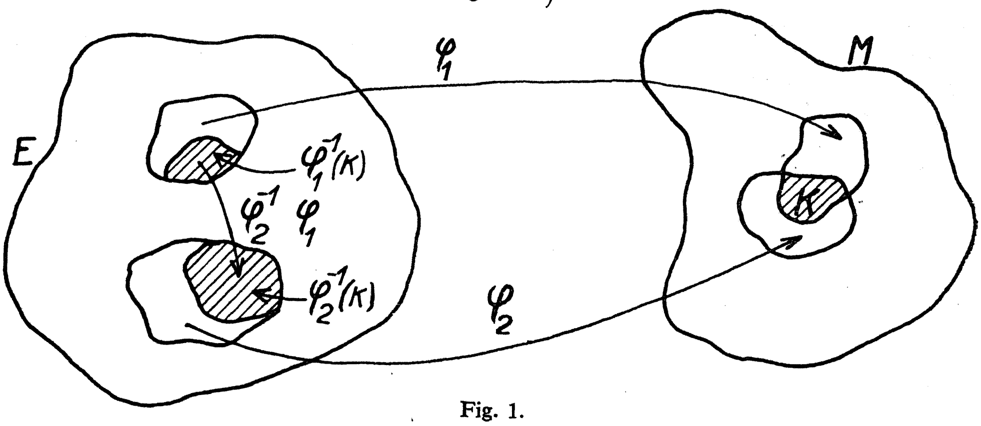

Fig. 1.

Se pueden definir las cartas locales de otra forma, como aplicaciones φ: $U' \to E$ de un subconjunto U' de M sobre un abierto $\varphi(U') = U$ de E: todos los conceptos definidos con ayuda de las cartas locales anteriores, pueden introducirse con esta nueva definición; φ es una carta local, en el nuevo sentido cuando φ^{-1} lo es según la anterior definición y viceversa. Nosotros preferimos seguir con la primera denominación y llamar al inverso de una carta local „sistema local de coordenadas": la razón de esta denominación se hará evidente más tarde.

Definición 14. Un atlas de M „con respecto a E", o „compatible con Γ", es un conjunto (también puede emplearse una familia) de cartas locales $\mathfrak{A}$, tal que: a) si $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{A}$, φ_1 y φ_2 son compatibles con respecto a Γ, b) M es la unión de todas las imágenes de los elementos de $\mathfrak{A}$.

Se puede establecer una relación de orden entre los atlas sobre M (compatibles con Γ) de la siguiente manera: $\mathfrak{A}' \prec \mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}'$ es *menos fino* que $\mathfrak{A}$) si $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$. La razón necesaria y suficiente para que exista un atlas $\mathfrak{A}''$ más fino que dos cualesquiera $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{A}'$ es que dados $\varphi \in \mathfrak{A}$ y $\varphi' \in \mathfrak{A}'$ cualesquiera φ y φ' sean compatibles: en este caso $\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{A}'$ es un atlas compatible con Γ. Si dados $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{A}'$, existe $\mathfrak{A}''$ con la anterior propiedad, pondremos $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{A}'$: en cada clase de equivalencia de atlas así determinada existe un elemento distinguido, que es el atlas maximal para la relación de orden que definimos y que es más fino que todos los elementos de dicha clase de equivalencia. Si $\mathfrak{A}$ es un atlas, el atlas maximal que contiene a $\mathfrak{A}$ se denotará por $\overline{\mathfrak{A}}$. Los atlas maximales para la anterior relación de orden se denominan „atlas completos": Sea $\Pi(M)$ el conjunto de todos los atlas completos de M con respecto a Γ, es fácil ver que $\Pi(M) \subset \mathfrak{P}\mathfrak{P}(E \times M) = \mathfrak{M}(M)$ (existe un conjunto auxiliar E):

Definición 15. Una Γ-estructura sobre M es un elemento de $\Pi(M)$.

Hablaremos de la „especie de estructura Π" (Π puede considerarse como un funtor).

5.2. Sea $\mathfrak{A} \in \Pi(M)$ y sea $\gamma_{\mathfrak{A}}$ el conjunto de todas las imágenes de los elementos de $\mathfrak{A}$; dicho conjunto es una base para una topología $\tilde{\gamma}(\mathfrak{A})$ sobre M: pues $K = \mathrm{Im}\,(f) \cap \cap \mathrm{Im}\,(g) = \mathrm{Im}\,(f \mid f^{-1}(K))$ además $\mathrm{Dom}\,(f \mid f^{-1}(K)) \in \gamma$ y $f \mid f^{-1}(K)$ es compatible con todo elemento de $\mathfrak{A}$, de donte $f \mid f^{-1}(K) \in \mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}$ es maximal). La aplicación $\tilde{\gamma}$: $\Pi(M) \to \mathfrak{T}(M)$ así definida es una subordinación de la especie de estructura Π, a la especie $\mathfrak{T}$.

La topología $\tilde{\gamma}(\mathfrak{A})$ es la menos fina para la cual, las aplicaciones de $\mathfrak{A}$ son abiertas.

Si $A \in \tilde{\gamma}(\mathfrak{A})$ es un abierto de M para la Γ-estructura $\mathfrak{A}$, y $\mathscr{A} \subset \mathfrak{A}$ una parte de $\mathfrak{A}$, tal que las imágenes de los elementos de $\mathscr{A}$ tienen a A como reunión, entonces $\mathscr{A}$ es un atlas sobre A y $\overline{\mathscr{A}} \in \Gamma(A)$ es una Π-estructura sobre A, „inducida" por $\mathfrak{A}$. Con esta ley de inducción, la especie de estructura Π es una especie de estructura local, lo que no es defícil de verificar.

Bibliografia

[1] *P. Dedecker*: Quelques aspects de la théorie des structures locales. Bull. Soc. Math. Belg., *5* (1952), 26–43.

[2] *P. Dedecker*: Introduction aux structures locales. Coll. de Géom. Diff. Globale, Bruxelles, 1958, 103–135.

[3] *N. Bourbaki*: Theorie des Ensembles. (Éléments de Mathématiques, Livre 1.) Paris.

[4] *Ch. Ehresmann*: Gattungen von lokalen Strukturen. Sonderdruck aus Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Verein. Bd. 60, Heft 2.

[5] *Ch. Ehresmann*: Sur la Théorie des Espaces fibrés. Coll. Int. de Topol. Alg. Paris, 1947.

[6] *Ch. Ehresmann*: Structures locales et structures infinitésimales. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris *234* (1952), 487–489.

Výtah

LOKÁLNÍ STRUKTURY A PSEUDOGRUPY

RAMÓN RUBIO, Habana (Cuba)

V prvních dvou paragrafech jsou vyloženy některé základní pojmy teorie struktur na množinách (ve smyslu N. Bourbakiho) a teorie kategorií. V dalších paragrafech, které tvoří hlavní obsah článku, jsou zejména vybudovány základy teorie lokálních struktur (v Ehresmannově smyslu). Mimo jiné, jsou zavedeny pojmy zobecněného funktoru, induktivního zobecněného funktoru, paratopologie vzhledem k danému druhu lokálních struktur.

Резюме

ЛОКАЛЬНЫЕ СТРУКТУРЫ И ПСЕВДОГРУППЫ

РАМОН РУБИО, Гавана (Куба)

В первых двух параграфах излагаются некоторые основные понятия теории структур (в смысле Н. Бурбаки) и теории категорий. Дальнейшие параграфы, составляющие основное содержание статьи, посвящены, главным образом, построению основ теории локальных структур (в смысле Эресмана). В частности, вводятся понятия обобщенного функтора, индуктивного обобщенного функтора, паратопологии относительно заданного вида локальных структур.