Vítězslav Novák
O jedné vlastnosti ordinálního součtu

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 89 (1964), No. 1, 78--84

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117496

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 89 (1964), Praha

O JEDNÉ VLASTNOSTI ORDINÁLNÍHO SOUČTU

VÍTĚZSLAV NOVÁK, Brno

(Došlo dne 3. listopadu 1962)

V práci jsou podány nutné a postačující podmínky pro existenci a jednoznačnost řešení rovnic $A \oplus X = B$, $Y \oplus A = B$.

V celé této práci budeme pod uspořádanou množinou rozumět vždy, pokud nebude výslovně uvedeno jinak, neprázdnou uspořádanou množinu. Totožnost uspořádaných množin budeme značit symbolem $\equiv$, somorfismus symbolem $=$. Je-li G libovolná uspořádaná množina, pak $\breve{G}$ značí duálně uspořádanou množinu. Je-li G uspořádaná množina a $H \subset G$, pak $H < x$ $(H > x)$ značí, že platí $y < x$ $(y > x)$ pro každé $y \in H$.

Jsou-li M, N uspořádané množiny, pak zobrazení φ množiny M na N se nazývá **C**-homomorfismus ([4]), platí-li:

$$x < y \Rightarrow \varphi(x) \leqq \varphi(y)\,, \quad x \parallel y \Rightarrow \varphi(x) \parallel \varphi(y) \quad \text{nebo} \quad \varphi(x) = \varphi(y)\,.$$

Nechť N je uspořádaná množina a $\{M_\alpha \mid \alpha \in N\}$ systém disjunktních uspořádaných množin. Uspořádanou množinu G nazveme lexikografickým součtem množin M_α přes množinu N a označíme $\sum_{\alpha \in N} M_\alpha$, platí-li: $G \equiv \bigcup_{\alpha \in N} M_\alpha$; $x, y \in M_{\alpha_0} \Rightarrow x \varrho y$ v G, když a jen když $x \varrho y$ v M_{α_0}; $x \in M_{\alpha_1}$, $y \in M_{\alpha_2}$, $\alpha_1 \neq \alpha_2 \Rightarrow x \varrho y$ v G, když a jen když $\alpha_1 \varrho \alpha_2$ v N, kde ϱ značí kteroukoliv z relací $\leqq$, $\geqq$, $\parallel$. Uspořádaná množina G se nazývá nerozložitelná v ordinální součet, když z rovnice $G \equiv A \oplus B$ plyne $A \equiv 0$ nebo $B \equiv 0$. Nechť $G \equiv \sum_{\alpha \in N} M_\alpha$, kde N je řetězec. Systém $\{M_\alpha \mid \alpha \in N\}$ tvoří na G rozklad $\bar{G}$, který nazveme význačným rozkladem.

Lemma 1. *Buď G uspořádaná množina, $\bar{G}$ rozklad na G. Pak jsou ekvivalentní následující tvrzení:*

(A) *$\bar{G}$ je význačný,*

(B) *$\bar{G}$ je rozklad příslušný k **C**-homomorfnímu zobrazení G na jistý řetězec N,*

(C) *$\bar{g} \in \bar{G}$, $x \in G - \bar{g} \Rightarrow$ buď $\bar{g} < x$ nebo $x < \bar{g}$.*

Důkaz. 1. Nechť platí (A). Tedy $\bar{G} \equiv \{M_\alpha \mid \alpha \in N\}$, kde $G \equiv \sum_{\alpha \in N} M_\alpha$ a N je řetězec. Definujme zobrazení φ množiny G na N takto: $x \in G$, $x \in M_\alpha \Rightarrow \varphi(x) = \alpha$. Ukážeme, že φ je $\mathbf{C}$-homomorfní zobrazení G na N. Nechť $x, y \in G$, $x < y$. Pak buď $x \in M_{\alpha_1}$, $y \in M_{\alpha_2}$, kde $\alpha_1 < \alpha_2$ nebo $x \in M_{\alpha_0}$, $y \in M_{\alpha_0}$. V prvém případě platí $\varphi(x) = \alpha_1 < \alpha_2 = \varphi(y)$, ve druhém $\varphi(x) = \varphi(y)$. Nechť $x, y \in G$, $x \parallel y$. Pak nutně $x \in M_{\alpha_0}$, $y \in M_{\alpha_0}$, takže $\varphi(x) = \alpha_0 = \varphi(y)$. Dále je patrné, že $\bar{G}$ je totožný s rozkladem příslušným k φ a tedy platí (B).

2. Nechť platí (B). Pak $\bar{G} \equiv \{\varphi^{-1}(\alpha) \mid \alpha \in N\}$, kde N je řetězec a φ je $\mathbf{C}$-homomorfní zobrazení G na N. Buď $\bar{g} \in \bar{G}$, $x \in G - \bar{g}$. Pak existují $\alpha_1 \in N$, $\alpha_2 \in N$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$ tak, že $\bar{g} \equiv \varphi^{-1}(\alpha_1)$, $x \in \varphi^{-1}(\alpha_2)$. Ježto N je řetězec, platí $\alpha_1 < \alpha_2$ nebo $\alpha_2 < \alpha_1$; nechť nastane první případ. Je-li $y \in \bar{g}$ libovolný prvek, platí $\varphi(y) = \alpha_1 < \alpha_2 = \varphi(x)$ a odtud $y < x$ (kdyby platilo $y \parallel x$, pak $\varphi(y) = \varphi(x)$ a kdyby $y > x$, pak $\varphi(y) \geqq \varphi(x)$) a platí tedy $\bar{g} < x$. Podobně ve druhém případě se ukáže $x < \bar{g}$ a tedy platí (C).

3. Nechť platí (C). Lze pak psát: $\bar{G} \equiv \{M_\alpha \mid \alpha \in N\}$, při čemž množinu N lze uspořádat takto: $\alpha_1, \alpha_2 \in N$, $\alpha_1 \neq \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 < \alpha_2$, když a jen když $x < y$ pro nějaké prvky $x \in M_{\alpha_1}$, $y \in M_{\alpha_2}$. N je vzhledem k tomuto uspořádání řetězcem a dokážeme, že platí $G \equiv \sum_{\alpha \in N} M_\alpha$. Vskutku, je-li $x \in M_{\alpha_1}$, $y \in M_{\alpha_2}$, $\alpha_1 < \alpha_2$, pak nutně platí $x < y$, neboť $x > y$ by implikovalo $\alpha_1 > \alpha_2$ a $x \parallel y$ by implikovalo $\alpha_1 = \alpha_2$. Je tedy $\bar{G}$ význačný a platí (A).

Lemma 2. *Největší zjemnění libovolného systému význačných rozkladů je význačný rozklad.*

Důkaz. Buď $\{\bar{G}_i \mid i \in J\}$ systém význačných rozkladů na G, $\bar{G}$ jeho největší zjemnění, buď $\bar{g} \in \bar{G}$. Pak $\bar{g} \equiv \bigcap_{i \in J} \bar{g}_i$, kde $\bar{g} \subset \bar{g}_i$, $\bar{g}_i \in \bar{G}_i$. Buď $x \in G - \bar{g}$. Pak existuje takový prvek $i_0 \in J$, že $\bar{g} \subset \bar{g}_{i_0}$ a že $x \in G - \bar{g}_{i_0}$. Ježto rozklad $\bar{G}_{i_0}$ je význačný, platí $\bar{g}_{i_0} < x$ nebo $\bar{g}_{i_0} > x$. Odtud $\bar{g} < x$ nebo $\bar{g} > x$ a tedy podle lemmatu 1 je $\bar{G}$ význačný.

Věta 1. *Libovolnou uspořádanou množinu G lze vyjádřit jediným způsobem ve tvaru $G \equiv \sum_{\alpha \in N} M_\alpha$, kde N je řetězec a M_α jsou nerozložitelné v ordinální součet.*[1])

Důkaz. Největší rozklad $\bar{G}_{\max}$ je význačný a tedy význačné rozklady existují. Buď $\{\bar{G}_i \mid i \in J\}$ systém všech význačných rozkladů na G, $\bar{G}$ největší zjemnění systému $\{\bar{G}_i\}$. Podle lemmatu 2 je $\bar{G}$ význačným rozkladem, tj. $\bar{G} \equiv \{M_\alpha \mid \alpha \in N\}$, kde N je řetězec a $G \equiv \sum_{\alpha \in N} M_\alpha$. Platí, že každé M_α je nerozložitelné v ordinální součet. Vskutku, kdyby existovalo $\alpha_0 \in N$ tak, že $M_{\alpha_0} \equiv Q_1 \oplus Q_2$, pak rozklad $\bar{G}_0 \equiv \{(M_\alpha \mid \alpha \in N - \alpha_0) \cup Q_1 \cup Q_2\}$ by byl význačný a byl by vlastním zjemněním $\bar{G}$, což je spor. Zbývá dokázat jednoznačnost uvedeného vyjádření. Předpokládejme, že existují taková vyjádření dvě, $G \equiv \sum_{\alpha \in N} M_\alpha$, $G \equiv \sum_{\beta \in Q} P_\beta$. Tedy oba rozklady $\bar{G} \equiv \{M_\alpha \mid \alpha \in N\}$, $\bar{G}' \equiv$

[1]) Jak upozorňuje C. C. Chang v [6], tuto větu lze též odvodit z výsledků A. Tarského v [7].

$\equiv \{P_\beta \mid \beta \in Q\}$ jsou význačné a jsou navzájem různé. Odtud plyne, že buď jeden z nich je vlastním zjemněním druhého nebo žádný není zjemněním druhého. Nechť nastane prvý případ a nechť např. $\bar{G}$ je vlastním zjemněním $\bar{G}'$. Tedy existuje $\beta_0 \in Q$ a $N_0 \subset N$ tak, že $P_{\beta_0} \equiv \sum_{\alpha \in N_0} M_\alpha$. To je však spor s předpokladem, že P_{β_0} je nerozložitelná v ordinální součet. Nastane-li druhý případ, pak společné zjemnění $\bar{G}''$ rozkladů $\bar{G}, \bar{G}'$ je podle lemmatu 2 význačným rozkladem. Je-li $\bar{G}'' \equiv \{R_\gamma \mid \gamma \in S\}$, existuje $\alpha_0 \in N$ a $S_0 \subset S$ tak, že $M_{\alpha_0} \equiv \sum_{\gamma \in S_0} R_\gamma$, což je spor s předpokladem, že M_{α_0} je nerozložitelná v ordinální součet. Tedy rozklady $\bar{G}, \bar{G}'$ jsou totožné a věta je dokázána.

Vyjádření $G \equiv \sum_{\alpha \in N} M_\alpha$ uvedené ve větě 1 budeme nazývat kanonickým vyjádřením množiny G a příslušný rozklad $\bar{G} \equiv \{M_\alpha \mid \alpha \in N\}$ kanonickým rozkladem.

Důsledek. *Nechť G, H jsou uspořádané množiny, $G \equiv \sum_{\alpha \in N} M_\alpha$, $H \equiv \sum_{\beta \in Q} P_\beta$ jejich kanonická vyjádření. Pak $G = H$ tehdy a jen tehdy, když existuje isomorfismus φ množiny N na Q takový, že $M_\alpha = P_{\varphi(\alpha)}$.*

Důkaz. Uvedená podmínka je zřejmě postačující. Ukážeme, že je i nutná Nechť tedy $G = H$; buď ψ libovolný isomorfismus G na H. Pak $\bar{H}' \equiv \{\psi(M_\alpha) \mid \alpha \in N\}$ je rozklad na H a to zřejmě kanonický. Odtud podle věty 1 plyne, že $\bar{H}'$ je totožný s rozkladem $\bar{H} \equiv \{P_\beta \mid \beta \in Q\}$, takže existuje prosté zobrazení φ množiny N na Q tak, že $\psi(M_\alpha) \equiv P_{\varphi(\alpha)}$. Jsou-li nyní $\alpha_1, \alpha_2 \in N$, $\alpha_1 < \alpha_2$, pak pro $x \in M_{\alpha_1}$, $y \in M_{\alpha_2}$ platí $x < y$, takže $\psi(x) < \psi(y)$ a tedy nutně $\varphi(\alpha_1) < \varphi(\alpha_2)$, takže φ je isomorfismus.

Věta 2. *Nechť A, B jsou uspořádané množiny, $A \equiv \sum_{\alpha \in N} M_\alpha$, $B \equiv \sum_{\beta \in Q} P_\beta$ jejich kanonická vyjádření. Pak platí: Rovnice $A \oplus X = B$ je řešitelná tehdy a jen tehdy, když existuje takový počáteční úsek Q_1 řetězce Q[2]) a takový isomorfismus φ řetězce N na Q_1, že platí $M_\alpha = P_{\varphi(\alpha)}$.*

Důkaz. 1. Nechť platí podmínka věty. Položme $X \equiv \sum_{\beta \in Q - Q_1} P_\beta$. Je vidět, že pak platí $A \oplus X = B$.

2. Nechť existuje X tak, že $A \oplus X = B$. Nechť $X \equiv \sum_{\alpha \in K} M_\alpha$ je kanonické vyjádření množiny X, při čemž $K \cap N \equiv 0$. Pak $\sum_{\alpha \in N \oplus K} M_\alpha$ je zřejmě kanonické vyjádření množiny $A \oplus X$. Podle důsledku k větě 1 existuje isomorfismus φ množiny $N \oplus K$ na Q takový, že $M_\alpha = P_{\varphi(\alpha)}$. Označme $Q_1 \equiv \varphi(N)$, $Q_2 \equiv Q - Q_1$. Pak zřejmě $Q \equiv Q_1 \oplus Q_2$ a $M_\alpha = P_{\varphi(\alpha)}$ pro $\alpha \in N$, tj. platí podmínka věty.

Analogicky se dokáže:

Věta 2*. *Nechť A, B jsou uspořádané množiny, $A \equiv \sum_{\alpha \in N} M_\alpha$, $B \equiv \sum_{\beta \in Q} P_\beta$ jejich kanonická vyjádření. Rovnice $Y \oplus A = B$ je řešitelná tehdy a jen tehdy, když existuje takový koncový úsek Q_2 řetězce Q^*[2]) a takový isomorfismus φ řetězce N na Q_2, že platí $M_\alpha = P_{\varphi(\alpha)}$.*

[2]) Je-li G řetězec a platí-li $G \equiv K \oplus H$, nazývá se K počáteční úsek, H koncový úsek řetězce G.

Nyní se obrátíme k otázce jednoznačnosti řešení rovnice $A \oplus X = B$. Nejdříve dokážeme následující:

Lemma 3. *Nechť N, P jsou disjunktní řetězce*[3]) *takové, že $N \oplus P = N$, nechť φ je libovolný isomorfismus $N \oplus P$ na N. Pak existuje takový systém vzájemně disjunktních podmnožin $\{P_i \mid P_i \subset N,\ i = 1, 2, \ldots\}$, že $P_i = P$ a $N \equiv N_\omega \oplus \sum_{i \in \widetilde{W(\omega)}} P_i$,*[4]) *kde $\varphi(N_\omega) \equiv N_\omega$.*

Důkaz. Položme $P_0 \equiv P$ a $P_{i+1} \equiv \varphi(P_i)$; $i = 0, 1, 2, \ldots$. Pak $P_i \subset N$ pro $i = 1, 2, \ldots$. Položme dále $N_0 \equiv N$, $N_{i+1} \equiv N_i - P_{i+1}$, $N_\omega \equiv \bigcap_{i=1}^{\infty} N_i$. Pak platí: $N \equiv \varphi(N \oplus P) \equiv \varphi(N) \oplus \varphi(P) \equiv \varphi(N) \oplus P_1$, z čehož $\varphi(N) \equiv N_1$. Indukcí pak snadno dokážeme, že platí $\varphi(N_i) \equiv N_{i+1}$ pro všechna $i = 0, 1, 2, \ldots$. Odtud $\varphi(N_\omega) \equiv \equiv \varphi(\bigcap_{i=1}^{\infty} N_i) \equiv \bigcap_{i=1}^{\infty} \varphi(N_i) \equiv \bigcap_{i=1}^{\infty} N_{i+1} \equiv N_\omega$. Dále ze vztahu $N \equiv N_1 \oplus P_1$ aplikací φ na obě strany plyne $N_1 \equiv N_2 \oplus P_2$ a obecně $N_i \equiv N_{i+1} \oplus P_{i+1}$, takže dostáváme $N \equiv N_{i+1} \oplus P_{i+1} \oplus P_i \oplus \ldots \oplus P_1$ pro každé $i = 1, 2, \ldots$. Odtud pak plyne $N \equiv \equiv N_\omega \oplus \sum_{i \in \widetilde{W(\omega)}} P_i$.

Rozklad $N \equiv N_\omega \oplus \sum_{i \in \widetilde{W(\omega)}} P_i$ řetězce N popsaný v lemmatu 3 nazveme rozkladem způsobeným isomorfismem φ. Buď G uspořádaná množina, $G \equiv \sum_{\alpha \in N} M_\alpha$ její kanonické vyjádření. Řekneme, že G má vlastnost (α), platí-li: Existuje-li řetězec P tak, že $N \oplus \oplus P = N$, pak ke každému isomorfismu φ množiny $N \oplus P$ na N existuje v rozkladu N způsobeném φ takový index i_0, že pro $i < i_0$ platí $\sum_{\alpha \in P_{i-1}} M_\alpha = \sum_{\alpha \in P_i} M_\alpha$, kdežto $\sum_{\alpha \in P_{i_0}} M_\alpha \neq \sum_{\alpha \in P_{i_0 - 1}} M_\alpha$.

Věta 3. *Buď A uspořádaná množina. Pak jsou ekvivalentní tyto výroky:*

(A) *Rovnice $A \oplus X = A$ má pouze triviální řešení $X \equiv 0$.*

(B) *$A \oplus X = A \oplus Y$ implikuje $X = Y$ pro každé X, Y.*

(C) *Množina A má vlastnost (α).*

Důkaz. 1. Nechť platí (A) a předpokládejme, že existují X, Y, $X \neq Y$ tak, že $A \oplus X = A \oplus Y$. Nechť φ je příslušný isomorfismus. Kdyby $\varphi(A) \equiv A$, pak $\varphi(X) \equiv \equiv Y$ a tedy $X = Y$. Tedy $\varphi(A) \not\equiv A$, tj. buďto $\varphi(A) \equiv A \oplus Y_1$, kde $Y \equiv Y_1 \oplus Y_2$ nebo $\varphi(A) \equiv A_1$, kde $A \equiv A_1 \oplus A_2$. V prvém případě máme $A \oplus Y_1 = A$, $Y_1 \not\equiv 0$; ve druhém $A_1 = A = A \oplus A_2$, kde $A_2 \not\equiv 0$. V obou případech dostáváme spor a tedy platí (B).

[3]) $N \not\equiv 0$, $P \not\equiv 0$ podle předpokladu učiněného v úvodu.

[4]) Je-li α ordinální číslo, pak $W(\alpha)$ značí podle Hausdorffa množinu všech ordinálních čísel menších než α uspořádanou přirozeným způsobem. $\widetilde{W(\omega)}$ je tedy množina typu ω^*.

2. Nechť platí (B) a předpokládejme, že množina A nemá vlastnost (α). Je-li $A \equiv \equiv \sum_{\alpha \in N} M_\alpha$ kanonické vyjádření A, existuje tedy takový řetězec P a takový isomorfismus φ množiny $N \oplus P$ na N, že pro rozklad N způsobený φ platí $\sum_{\alpha \in P_i} M_\alpha = \sum_{\alpha \in P_{i+1}} M_\alpha$ pro každé $i = 1, 2, \ldots$. Položme $X \equiv \sum_{\alpha \in P} M_{\varphi(\alpha)}$. Snadno se nahlédne, že pak platí $A \oplus X = A = A \oplus 0$ a $X \neq 0$. To je spor a tedy platí (C).

3. Nechť platí (C). Buď neexistuje žádný řetězec P takový, že $N \oplus P = N$ nebo takový řetězec existuje. V prvém případě zřejmě platí (A). Nechť tedy nastane druhý případ a předpokládejme, že existuje $X \not\equiv 0$ tak, že $A \oplus X = A$. Nechť $X \equiv \sum_{\alpha \in P} M_\alpha$ je kanonické vyjádření X. Pak $A \oplus X \equiv \sum_{\alpha \in N \oplus P} M_\alpha$ je kanonické vyjádření množiny $A \oplus \oplus X$ a tedy podle důsledku k větě 1 existuje isomorfismus φ množiny $N \oplus P$ na N takový, že $M_\alpha = M_{\varphi(\alpha)}$ pro všechna $\alpha \in N \oplus P$. Je-li $N \equiv N_\omega \oplus \sum_{i \in \widetilde{W(\omega)}} P_i$ rozklad N způsobený φ, plyne odtud $P_{i+1} \equiv \varphi(P_i)$ a tedy $\sum_{\alpha \in P_i} M_\alpha = \sum_{\alpha \in P_{i+1}} M_\alpha$ pro všechna i a to je spor. Platí tedy (A).

Stejnou úvahu lze provést pro součet zleva. Jsou-li N, P disjunktní řetězce takové, že $P \oplus N = N$, φ libovolný isomorfismus $P \oplus N$ na N, pak existuje takový systém vzájemně disjunktních podmnožin $\{P_i \mid P_i \subset N,\ i = 1, 2, \ldots\}$, že $P_i = P$ a $N \equiv \equiv \sum_{i \in \widetilde{W(\omega)}} P_i \oplus N_\omega$, kde $\varphi(N_\omega) \equiv N_\omega$. O uspořádané množině G s kanonickým vyjádřením $G \equiv \sum_{\alpha \in N} M_\alpha$ řekneme, že má vlastnost (β), platí-li: Existuje-li řetězec P tak, že $P \oplus \oplus N = N$, pak ke každému isomorfismu φ množiny $P \oplus N$ na N existuje v rozkladu N způsobeném φ takový index i_0, že pro $i < i_0$ platí $\sum_{\alpha \in P_{i-1}} M_\alpha = \sum_{\alpha \in P_i} M_\alpha$, kdežto $\sum_{\alpha \in P_{i_0 - 1}} M_\alpha \neq \sum_{\alpha \in P_{i_0}} M_\alpha$.

Věta 3*. *Buď A uspořádaná množina. Pak jsou ekvivalentní tyto výroky:*

(A) *Rovnice $Y \oplus A = A$ má pouze triviální řešení $Y \equiv 0$.*

(B) *$X \oplus A = Y \oplus A$ implikuje $X = Y$ pro každé X, Y.*

(C) *Množina A má vlastnost (β).*

Poznámka. Nechť A je uspořádaná množina, $A \equiv \sum_{\alpha \in N} M_\alpha$ kanonické vyjádření množiny A. Množina A má jistě vlastnost (α), jestliže neexistuje řetězec P takový, že $N \oplus P = N$. To platí zejména tehdy, když N je dobře uspořádána a tedy tím spíše tehdy, když A splňuje podmínku konečnosti klesajících řetězců. Zahrnuje tedy věta 3 jako speciální případ větu G. Birkhoffa ([2], Theorem 16). Analogicky pro větu 3*.

Příklad. *Pro každé $x \in [0, 1]$ buď R_x libovolná množina nerozložitelná v ordinální součet. Položme $M \equiv \sum_{x \in [0,1]} R_x$. Nechť dále $M_\alpha = M$ pro každé $\alpha \in \widetilde{W(\omega)}$ a nechť M_α jsou navzájem disjunktní. Položme $G \equiv \sum_{\alpha \in \widetilde{W(\omega)}} M_\alpha$. Pak G nemá vlastnost (α).*

Důkaz. Kanonické vyjádření G jest $G \equiv \sum_{\beta \in N} R_\beta$, kde $N \equiv \sum_{\alpha \in \widetilde{W(\omega)}} Q_\alpha$, kde $\widetilde{\{Q_\alpha\}}$ je systém vzájemně disjunktních množin takových, že $Q_\alpha = [0, 1]$. Pro každé $\alpha \in W(\omega)$ zvolme isomorfismus ψ_α intervalu $[0, 1]$ na Q_α takový, že platí: $\beta_1, \beta_2 \in N$; $\beta_1 \in Q_{\alpha_1}, \beta_2 \in Q_{\alpha_2}$; $\beta_1 = \psi_{\alpha_1}(t)$, $\beta_2 = \psi_{\alpha_2}(t)$ pro vhodné $t \in [0, 1] \Rightarrow R_{\beta_1} = R_{\beta_2}$. Položme nyní $P \equiv \equiv [0, 1] \equiv Q_{-1}$ a definujme $x \in N \oplus P$, $x \in Q_\alpha$, $x = \psi_\alpha(t)$⁵) $\Rightarrow \varphi(x) = \psi_{\alpha+1}(t)$. φ je isomorfismem $N \oplus P$ na N a pro rozklad $N \equiv N_\omega \oplus \sum_{i \in \widetilde{W(\omega)}} P_i$ řetězce N způsobený φ platí $\sum_{\alpha \in P_i} M_\alpha = \sum_{\alpha \in P_{i+1}} M_\alpha$ pro všechna i. Položíme-li však $M_\alpha = M$ pro $\alpha \in W(i_0)$, $M_{i_0} \neq M$, $M_\alpha = M$ pro $\alpha > i_0$, $G \equiv \sum_{\alpha \in \widetilde{W(\omega)}} M_\alpha$, má G vlastnost (α).

Literatura

[1] *G. Birkhoff*: Lattice theory. New York 1948.

[2] *G. Birkhoff*: Generalized arithmetic. Duke Mathematical Journal *9* (1942), 283–302.

[3] *M. M. Day*: Arithmetic of ordered systems. Transactions of the American mathematical society *58* (1945), 1–43.

[4] *K. Čulík*: Über die Homomorphismen der teilweise geordnete Mengen und Verbände. Чех. мат. журнал *9* (1959), 496–518.

[5] *M. Novotný*: Über gewisse Eigenschaften von Kardinaloperationen. Spisy vydávané přírodov. fakultou UJEP v Brně *418* (1960), 465–484.

[6] *C. C. Chang*: Ordinal factorization of finite relations. Transactions of the American mathematical society *101* (1961), 259–293.

[7] *A. Tarski*: Ordinal algebras. Amsterdam, North-Holland Publishing Co., 1956.

Резюме

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ОРДИНАЛЬНОЙ СУММЫ

ВИТЕЗСЛАВ НОВАК (Vítězslav Novák), Брно

В этой статье пользуемся символом $\equiv$ для равенства, $=$ для изоморфизма упорядоченных множеств. Упорядоченное множество G называется неразложимым в ординальную сумму, если из $G \equiv A \oplus B$ следует $A \equiv 0$ или $B \equiv 0$.

Доказывается теорема: *Всякое упорядоченное множество G можно представить единственным способом в форме: $G \equiv \sum_{\alpha \in N} M_\alpha$, где N — цепь и M_α — неразложимые в ординальную сумму* (эту теорему можно также вывести из результатов Тарского в [7]).

В теореме 2 доказываются необходимые и достаточные условия для существования решения уравнения $A \oplus X = B$ и в Теореме 3 необходимые и достаточные условия для единственности решения этого уравнения.

⁵) ψ_{-1} je identita.

Summary

ON A CERTAIN PROPERTY OF THE ORDINAL SUM

VÍTĚZSLAV NOVÁK, Brno

In this paper $\equiv$ denotes identity and $=$ isomorphism of ordered sets. An ordered set G is called indecomposable into an ordinal sum if $G \equiv A \oplus B$ implies $A \equiv 0$ or $B \equiv 0$.

The following theorem is proved: *Any ordered set G can be expressed in the form $G \equiv \sum_{\alpha \in N} M_\alpha$ where N is a chain and M_α are indecomposable into ordinal sums, and such an expression is unique* (this theorem can be also deduced from Tarski's results in [7]).

Theorem 2 gives necessary and sufficient conditions for the existence of solution of the equation $A \oplus X = B$, and Theorem 3 gives necessary and sufficient conditions for unicity of solution of this equation.