Časopis pro pěstování matematiky

Oldřich Kowalski

Zum Begriff der Quasiteilbarkeit in ganzen l-Halbgruppen

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 89 (1964), No. 1, 53--77

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117495`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 89 (1964), Praha

ZUM BEGRIFF DER QUASITEILBARKEIT IN GANZEN l-HALBGRUPPEN

OLDŘICH KOWALSKI, Brno

(Eingegangen am 25. Oktober 1962)

In diesem Artikel werden bestimmte Äquivalenzrelationen zwischen den Elementen ganzer l-Halbgruppen studiert, welche die eindeutige Primfaktorzerlegung ihrer Elemente bis auf Äquivalenz gestatten.

EINLEITUNG

Diese Einleitung soll den Leser hauptsächlich mit jenen Begriffen und Ergebnissen bekannt machen, welche die vorliegende Arbeit in Zusammenhang mit der multiplikativen Idealtheorie und besonders mit der „Quasiteilbarkeitstheorie" von B. L. VAN DER WAERDEN stellen. Alle Begriffe und Resultate sind in meiner Arbeit [4] zu finden; außerdem wird an mehreren Stellen weitere Literatur zitiert.

0.1. Der Begriff einer *l-Halbgruppe* ist als bekannt vorausgesetzt. Wir bezeichnen mit *e das Einselement*, mit *0 das Nullelement* einer l-Halbgruppe $\mathbf{L}$ und wir benützen die Zeichen $<$, $\leqq$ für die Halbordnung des Verbands $\mathbf{L}$. (Vgl. [1], S. 279–280.) Sind alle Elemente von $\mathbf{L}$ ganz, d. h. $\leqq e$, so nennen wir auch die l-Halbgruppe $\mathbf{L}$ *ganz*; in anderem Falle nennen wir $\mathbf{L}$ *nichtganz*.

0.2. *Sind $a \leqq b$ Elemente einer l-Halbgruppe $\mathbf{L}$, dann gilt $ax \leqq bx$, $ya \leqq yb$ für beliebige Elemente $x, y \in \mathbf{L}$.*

0.3. *Sind $a, b \in \mathbf{L}$ ganze Elemente, so gilt $ab \leqq a \cap b$.* (Siehe [1], S. 280.)

0.4. *Die Menge $\mathbf{C}$ aller ganzen Elemente von einer l-Halbgruppe $\mathbf{L}$ ist eine ganze l-Halbgruppe.* (Wir nennen $\mathbf{C}$ *die ganze Komponente* der l-Halbgruppe $\mathbf{L}$.)

0.5. Es sei $\mathfrak{J}(a)$ die Menge aller Elemente $x \in \mathbf{L}$, für die $axa \leqq a$ gilt. Ist die Menge $\mathfrak{J}(a)$ nichtleer und gibt es in $\mathfrak{J}(a)$ das größte Element,[1]) so nennen wir dieses größte Element *das inverse Element* zu a und wir bezeichnen es mit dem Symbol a^{-1}.

[1]) Siehe [1], S. 24.

0.6. Im folgenden betrachten wir einige Ergänzungsbedingungen für eine l-Halbgruppe $\mathbf{L}$:

(I) Zu *jedem Element* $a \in \mathbf{L}$ *gibt es das Inverse* a^{-1}.

(II) *Ist* $ab \leqq a$ *bzw.* $ca \leqq a$, *so gilt* $b \leqq e$ *bzw.* $c \leqq e$.

(III) *In* $\mathbf{L}$ *gilt die Maximalbedingung: Jede Kette von der Form* $a_1 < a_2 < a_3 < < \ldots \leqq e$ *in* $\mathbf{L}$ *ist endlich.*

Im folgenden setzt man voraus, dass die l-Halbgruppe $\mathbf{L}$ (I) und (II) *erfüllt.*

0.7. Zwei Elemente $a, b \in \mathbf{L}$ heißen *quasigleich*, wenn $a^{-1} = b^{-1}$ gilt. Bezeichnung: $a \sim b$. Ein Element a nennen wir *Quasiteiler* von Element b, wenn $a^{-1} \leqq b^{-1}$ gilt. Bezeichnung: $a \gtrsim b$ oder $b \lesssim a$.

Die wichtigsten mit diesen Begriffen verknüpften Lehrsätze sind die folgenden:

0.8. *Die Quasigleichheit ist eine Äquivalenzrelation, die eine Klasseneinteilung* $\mathfrak{S}$ *der Menge* $\mathbf{L}$ *bestimmt und die Quasiteilbarkeit definiert auf* $\mathfrak{S}$ *eine Halbordnung.*

0.9. Ist $a \leqq b$, so gilt $a \lesssim b$.

0.10. *Das Element* $b^* = (b^{-1})^{-1}$ *ist quasigleich zu* b *und für jedes Element* $a \lesssim b$ *gilt* $a \leqq b^*$.

Wir nennen b^* das zu b zugehörige *ausgezeichnete Element.*

0.11. *Ist* $a \lesssim b$, *so gilt* $ca \lesssim cb$, $ac \lesssim bc$ *für beliebiges* $c \in \mathbf{L}$.

0.12. *Es gilt* $e^* = e^{-1} = e$.

Bezeichnen wir mit $\langle x \rangle$ die Äquivalenzklasse von beliebigem Element $x \in \mathbf{L}$.

0.13. *Mittels der Formel*

$$\langle a \rangle \langle b \rangle = \langle ab \rangle\,, \quad a, b \in \mathbf{L}\,,$$

ist auf der Menge $\mathfrak{S}$ *eine eindeutige Multiplikation definiert. Hinsichtlich dieser Multiplikation bildet* $\mathfrak{S}$ *eine Gruppe.*

0.14. *Ist die l-Halbgruppe* $\mathbf{L}$ *nichtganz, dann ist die Gruppe* $\mathfrak{S}$ *unendlich und die zugehörige Quasigleichheitrelation ist sicherlich nichttrivial.*

0.15. *Ist* $a \sim b$, *dann gibt es Elemente* $\varepsilon \sim e$, $\delta \sim e$, *so daß* $a\varepsilon = \delta b$ *gilt.*

0.16. *Ist* $a \lesssim b$, *dann gibt es Elemente* $\varepsilon \sim e$, $\delta \sim e$, *so daß* $\varepsilon a \leqq b$, $a\delta \leqq b$ *gilt.*

0.17. *Ist* $a \lesssim b$, *so gibt es ein Element* $c \leqq e$ *mit* $a \sim bc$, $bc \leqq a$.

0.18. *Ist* $a \lesssim b$, $c \lesssim d$, *so gilt* $a \cup c \lesssim b \cup d$.

0.19. Ein Element $p \prec e$ heißt *unzerlegbar*, wenn aus den Beziehungen $a \lesssim e$, $b \lesssim e$, $ab \sim p$ immer entweder $a \sim e$, oder $b \sim e$ folgt. Ein Element $p < e$ heißt ein *Primelement*, wenn aus den Beziehungen $a \leqq e$, $b \leqq e$, $ab \leqq p$ immer entweder $a \leqq p$, oder $b \leqq p$ folgt. Ein Element $g < e$ heisst *maximal*, wenn es kein Element r mit $g < r < e$ gibt.

0.20. *Jedes maximale Element ist ein Primelement.*

0.21. *Ist p ein unzerlegbares Element, so ist das zugehörige p^* ein Primelement.*

0.22. *Jedes Primelement $p \in \mathbf{L}$ ist entweder quasigleich e oder unzerlegbar und gleich dem zugehörigen p^*.*

Wenn die l-Halbgruppe $\mathbf{L}$ *die Bedingung* (III) *erfüllt, so gilt:*

0.23. *Die Gruppe $\mathfrak{G}$ ist kommutativ.*

0.24. *Jedes Element $a < e$ ist quasigleich einem endlichen Produkt $p_1^* p_2^* \dots p_k^*$ von unzerlegbaren Primelementen; jede solche Zerlegung ist bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig bestimmt.*

Wir betrachten noch zwei Ergänzungsbedingungen für die l-Halbgruppe $\mathbf{L}$:

(IV) *Zu jedem Element $a \in \mathbf{L}$ gibt es ein ausgezeichnetes Element b^*, so daß $b^* \leqq a$ gilt.*

(V) *Jedes Primelement in* $\mathbf{L}$ *ist maximal.*

0.25. *Gelten in* $\mathbf{L}$ *die Bedingungen* (I), (II), (IV), *so gibt es zu jedem Primelement $q \sim e$ ein unzerlegbares Primelement p^*, so daß $p^* < q$ gilt.*

0.26. *Wenn in* $\mathbf{L}$ *alle Bedingungen* (I–V) *erfüllt sind, so ist die l-Halbgruppe* $\mathbf{L}$ *eine kommutative Gruppe und jedes Element $a < e$ ist als Produkt von Primelementen eindeutig darstellbar.*

Daraus lassen sich verschiedene Folgerungen für die multiplikative Idealtheorie herleiten.

Es sei $\mathfrak{o}$ ein nichtkommutativer Ring und $\mathfrak{A}$ sein rechter Quotientenring. Setzen wir voraus, daß $\mathfrak{o}$ eine *maximale Ordnung* von $\mathfrak{A}$ ist. (Vgl. [3], § 6.) Dann bildet die Menge aller gebrochenen $\mathfrak{o}$-Ideale eine l-Halbgruppe $\mathbf{L}$, welche die Bedingungen (I), (II) erfüllt. Ist die Maximalbedingung (oder „der Teilerkettensatz“) für die ganzen $\mathfrak{o}$-Ideale erfüllt, so ist in $\mathbf{L}$ die Bedingung (III) erfüllt. Ist $\mathfrak{o} \neq \mathfrak{A}$ und ist die Ordnung $\mathfrak{o}$ *beschränkt* (d. h. jedes Links- oder Rechts-$\mathfrak{o}$-ideal enthält ein $\mathfrak{o}$-Ideal), so ist die l-Halbgruppe $\mathbf{L}$ sicherlich nichtganz. Bemerken wir noch, dass wenn die Ordnung $\mathfrak{o}$ beschränkt ist, so erfüllt die l-Halbgruppe $\mathbf{L}$ aller $\mathfrak{o}$-Ideale die Bedingung (IV).

Nach dieser Richtung lässt sich die Theorie der Quasiteilbarkeit der $\mathfrak{o}$-Ideale aufbauen und damit die klassische Theorie von Van der Waerden verallgemeinern. (Siehe [4].) Ist $\mathfrak{o}$ speziell ein kommutativer Integritätsbereich, welcher in seinem Quotientenkörper ganz abgeschlossen ist, so ist $\mathfrak{o}$ eine maximale und beschränkte Ordnung gemäß K. Asano (vgl. [3]). Wir bekommen dann unmittelbar die bekannte Theorie von Van der Waerden (siehe [6] oder [2]).

Es sei jetzt $\mathbf{L}$ eine nichtganze l-Halbgruppe, welche die Bedingungen (I), (II) erfüllt und $\mathbf{C}$ sei ihre ganze Komponente. Die in $\mathbf{L}$ bestimmte Quasiteilbarkeitrelation ist nichttrivial (siehe 0.14) und durch Beschränkung dieser Relation auf die l-Halbgruppe **C** bekommen wir wieder eine nichttriviale Relation, welche wir mit $(\mathbf{C} \leftarrow \mathbf{L})$ bezeichnen. Ist **L** eine ganze l-Halbgruppe, so sind darin die Bedingungen (I), (II) trivial erfüllt und die zugehörige Quasiteilbarkeitrelation ist auch trivial- alle Elemente von **L** sind miteinander quasigleich.

Es sei **L** eine ganze l-Halbgruppe und betrachten wir das System $\mathfrak{N}$ von allen nichtganzen abstrakten l-Halbgruppen, welche **L** als die ganze Komponente enthalten[2]) und dabei die Bedingungen (I), (II) erfüllen. (Das System $\mathfrak{N}$ kann natürlich auch leer sein.) Bezeichnen wir mit Σ das System aller Relationen der Form $(\mathbf{L} \leftarrow \mathbf{L}^*)$, $\mathbf{L}^* \in \mathfrak{N}$. Erfüllt die ganze l-Halbgruppe **L** die Maximalbedingung, so gestatten alle Relationen des Systems Σ eine eindeutige Quasifaktorzerlegung der Elemente in Primelemente, oder kurz *e. Q. P.* (vgl. 0.24).

Zwei Fragen bieten sich jetzt an:

1. Wie lassen sich alle Relationen des Systems Σ in einer l-Halbgruppe **L** von innen kennzeichnen?

2. Welche Relationen sind es überhaupt, die die e. Q.P. in **L** gestatten? (Unter Voraussetzung der Maximalbedingung.)

In unserer Arbeit wird nur ein „Zwischenproblem" gelöst: das komplizierte System Σ wird zu einem gewissen System Θ von einer einfacheren Struktur erweitert, wobei alle Relationen aus Θ noch die e. Q. P. Eigenschaft besitzen.

Das System Θ von sog. Waerdenischen Relationen bildet in einer l-Halbgruppe mit Maximalbedingung eine Boolsche Algebra. Mit Hilfe dieses Systems läßt sich die klasische Quasiteilbarkeitrelation von Van der Waerden auf eine neue Weise kennzeichnen.

1. NORMALE l-HALBGRUPPEN

Im folgenden werden wir einige Begriffe und Resultate aus der Arbeit [5] benützen.

1.1. Man sagt, dass in einer l-Halbgruppe **L** *die gute Arithmetik* gilt, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Jedes von e und O verschiedene Element von **L** ist eindeutig als endliches Produkt von Primelementen darstellbar.

2. Zu beliebigen zwei Elementen $a \leqq b \in \mathbf{L}$ gibt es Elemente c, d, so dass $a = bc$, $a = db$ gilt.

1.2. Eine l-Halbgruppe **L** heißt *halbkommutativ*, wenn für je zwei maximalen Primelemente $p_1, p_2 \in \mathbf{L}$, $p_1 p_2 = p_2 p_1$ gilt. (Siehe 0.19 und 0.20.)

1.3. Satz. *In einer ganzen l-Halbgruppe* **L** *mit mindestens einem von e und O verschiedenen Element gilt dann und nur dann die gute Arithmetik, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

---

[2]) Im Sinne des Isomorphismus — vgl. 4.1.

1. *Die l-Halbgruppe* $\mathbf{L}$ *ist halbkommutativ.*

2. *In* $\mathbf{L}$ *ist die Maximalbedingung erfüllt.*

3. *Jedes Primelement von* $\mathbf{L}$ *ist maximal.*

4. *Alle Potenzen von jedem maximalen Primelement sind einander verschieden.*

5. *Zwischen n-ter und* $(n + 1)$*-ter Potenz von beliebigem maximalen Primelement kommt kein weiteres Element vor.*

Diese Behauptung ist im wesentlichen mit einem Satz von E. Г. Шулгейфер identisch. (Vgl. [5].)

Weiter werden wir uns nur mit diejenigen l-Halbgruppen befassen, die mindestens ein von O und e verschiedenes Element enthalten.

1.4. Eine Halbgruppe nennen wir *regulär*, wenn die folgende Kürzungsregel gilt: aus $ac = bc$ bzw. aus $da = db$ folgt $a = b$. Eine l-Halbgruppe heißt *normal*, wenn sie (als eine Halbgruppe betrachtet) regulär ist und die folgende Regel erfüllt: zu beliebigen zwei Elementen $a \leqq b$ gibt es Elemente c, d, so daß $a = bc$, $a = db$ gilt.

1.5. *Aus jeder Ungleichung von der Form* $ac \leqq bc$ *bzw.* $da \leqq db$ *in einer normalen l-Halbgruppe folgt die Ungleichung* $a \leqq b$.

Beweis. Die Behauptung folgt leicht aus der Regularität der Halbgruppe $\mathbf{L}$ und aus den distributiven Gesätzen $(a \cup b)\, c = ac \cup bc$, $c(a \cup b) = ca \cup cb$.

1.6. Satz. *Die gute Arithmetik gilt in einer ganzen l-Halbgruppe dann und nur dann, wenn die l-Halbgruppe normal ist und die Maximalbedingung erfüllt.*

Beweis. Die Notwendigkeit ist leicht einzusehen. Um die Hinlänglichkeit zu beweisen, genügt es nach Satz 1.3 zu zeigen, dass aus den obigen Forderungen die Bedingungen 1 bis 5 folgen.

1. Es seien p_1, p_2 die maximalen Primelemente und setzen wir $q = p_1 \cap p_2$. Dann gilt $q \leqq p_1$, $q \leqq p_2$ und nach der Normalität gibt es Elemente q_1, q_2 mit $q = p_1 q_1$, $q = p_2 q_2$. Nun haben wir $p_1 p_2 \leqq q$, $p_2 p_1 \leqq q$ und folglich $p_1 p_2 \leqq p_1 q_1$, $p_2 p_1 \leqq \leqq p_2 q_2$; nach 1.5 folgt $p_2 \leqq q_1$, $p_1 \leqq q_2$. Wegen der Maximaleigenschaft der Elemente p_1, p_2 genügt es nur zwei Fälle unterzuscheiden:

a) q_1 bzw. q_2 ist gleich e; dann gilt entweder $q = p_1$ oder $q = p_2$ und hinsichtlich $q = p_1 \cap p_2$ folgt sogleich $p_1 = p_2$; daraus $p_1 p_2 = p_1^2 = p_2 p_1$.

b) Es gilt $p_2 = q_1$, $p_1 = q_2$ und daraus $p_1 p_2 = q = p_2 p_1$.

2. Klar.

3. Es sei p ein Primelement und betrachten wir eine Ungleichung $p \leqq q \leqq e$. Dann gibt es ein Element r, so daß $p = qr$ und $p \leqq r \leqq e$ gilt. Da p prim ist, haben wir entweder $q \leqq p$ und also $q = p$, oder $r \leqq p$, also $r = p$, $p = qp$ und nach der Regularität $q = e$. Das Element p ist also maximal.

4. Ist p ein maximales Primelement, so ist $p < e$ und nach 0.2 und 1.5 gilt $p^{n+1} < < p^n$ für $n = 1, 2, \ldots$

5. Es sei p ein maximales Primelement und setze man voraus, daß $p^{n+1} \leqq q \leqq p^n$; dann gibt es ein Element r, so daß $q = p^n r$ gilt; daraus folgt $p^n p \lneqq p^n r \lneqq p^n$ und nach 1.5 $p \leqq r \leqq e$. Wegen der Maximaleigenschaft des p gilt entweder $r = p$ und $q = p^{n+1}$, oder $r = e$ und $q = p^n$.

1.7. Folgerung. *Jede ganze normale l-Halbgruppe mit Maximalbedingung ist kommutativ.*

2. DIE VON DER MAXIMALBEDINGUNG UNABHÄNGIGE EIGENSCHAFTEN DER RELATIONEN

Mit $\mathbf{L}$ werden wir in diesem Absatze eine *bestimmte ganze* l-Halbgruppe bezeichnen. Mit $\mathbf{L}^2$ bezeichnen wir die Produktmenge $\mathbf{L} \times \mathbf{L}$; jede Teilmenge von $\mathbf{L}^2$ nennen wir eine *Relation in* $\mathbf{L}$. Die Zugehörigkeit zu einer Relation $\mathscr{K} \subset \mathbf{L}^2$ drücken wir durch die Zeichen $(a, b) \in \mathscr{K}$, $a \lesssim b(\mathscr{K})$ aus. Gilt gleichzeitig $a \lesssim b(\mathscr{K})$, $b \lesssim a(\mathscr{K})$, so schreiben wir $a \sim b(\mathscr{K})$. Sind $\mathscr{K} \subseteq \mathscr{H}$ zwei Relationen in $\mathbf{L}$, so sagt man, daß $\mathscr{H}$ *eine Bedeckung von der Relation* $\mathscr{K}$ ist (oder daß $\mathscr{H}$ die Relation $\mathscr{K}$ *bedeckt*) und dass $\mathscr{K}$ *eine Verfeinerung von* $\mathscr{H}$ ist.

2.1. Es sei $\mathscr{K}$ eine Relation in $\mathbf{L}$. Unter einer $\mathscr{K}$*-Kette* verstehen wir beliebige Folge $a_1, a_2, \ldots$ der Elemente von $\mathbf{L}$, für welche die Beziehungen $(a_i, a_{i+1}) \in \mathscr{K}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ erfüllt sind.

2.2. Es sei $\mathscr{K}$ eine Relation in $\mathbf{L}$. Ordnen wir jeder endlichen $\mathscr{K}$-Kette $a = a_1, a_2, \ldots, a_n = b$ das Paar $(a, b) \in \mathbf{L}^2$ zu. Die neue durch diese Zuordnung erzeugte Relation $T\mathscr{K}$ nennen wir *die transitive Hülle von* $\mathscr{K}$. Eine Relation $\mathscr{K}$ heisst *transitiv,* wenn sie die Beziehung $T\mathscr{K} = \mathscr{K}$ erfüllt. *$\mathscr{K}$ ist offensichtlich dann und nur dann transitiv, wenn aus $(a, b) \in \mathscr{K}$, $(b, c) \in \mathscr{K}$ immer $(a, c) \in \mathscr{K}$* folgt.

2.3. Unter *der stabilen Hülle von einer Relation* $\mathscr{K} \subseteq \mathbf{L}^2$ versteht man die Relation $S\mathscr{K}$ aller Paare (axb, ayb) für $(x, y) \in \mathscr{K}$, $a, b \in \mathbf{L}$.

Eine Relation $\mathscr{K}$ heißt *stabil,* wenn sie die Beziehung $S\mathscr{K} = \mathscr{K}$ erfüllt. *$\mathscr{K}$ ist offenbar dann und nur dann stabil, wenn aus $(x, y) \in \mathscr{K}$, $a, b \in \mathbf{L}$ immer $(axb, ayb) \in \mathscr{K}$ folgt.*

2.4. Es sei $\mathscr{K}$ eine Relation in $\mathbf{L}$. Ordnen wir jedem endlichen Teilsysteme $\{(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)\}$ der Relation $\mathscr{K}$ das Paar $(a_1 \cup \ldots \cup a_n, b_1 \cup \ldots \cup b_n)$ zu! Die Menge $D\mathscr{K}$ aller solchen Paare nennen wir *die disjunktive Hülle von* $\mathscr{K}$.

Eine Relation $\mathscr{K}$ heißt *disjunktiv,* wenn sie die Beziehung $D\mathscr{K} = \mathscr{K}$ erfüllt. *$\mathscr{K}$ ist dann und nur dann disjunktiv, wenn aus $(a, b) \in \mathscr{K}$, $(c, d) \in \mathscr{K}$ immer $(a \cup c, b \cup d) \in \mathscr{K}$ folgt.*

2.5. Es sei $\mathscr{K} \subseteq \mathbf{L}^2$ und bezeichnen wir mit $R_{\mathscr{K}}(a, b)$ die Menge von allen Paaren $(x, y) \in \mathbf{L}^2$, für welche $(axb, ayb) \in \mathscr{K}$ gilt. Die Menge $R\mathscr{K} = \sum_{a,b \in \mathbf{L}} R_{\mathscr{K}}(a, b)$ nennen wir *die reguläre Hülle von* $\mathscr{K}$. Eine Relation $\mathscr{K}$ heißt *regulär,* wenn sie die Beziehung $R\mathscr{K} = \mathscr{K}$ erfüllt.

$\mathscr{K}$ *ist dann und nur dann regulär, wenn aus* $(axb, ayb) \in \mathscr{K}$, $a, b \in \mathbf{L}$ *immer* $(x, y) \in \mathscr{K}$ *folgt.*

2.6. *Alle eben definierten Operationen T, S, D, R erfüllen die Axiome einer Abschließung-operation* $(^{-})$ *in der Menge* $\mathbf{L}^2$:

$$\left.\begin{array}{l} \text{a) } \mathscr{H} \subseteq \overline{\mathscr{H}}. \\ \text{b) Ist } \mathscr{H} \subseteq \mathscr{K}, \text{ so gilt } \overline{\mathscr{H}} \subseteq \overline{\mathscr{K}}. \\ \text{c) } \overline{\overline{\mathscr{H}}} = \overline{\mathscr{H}}. \text{ (Siehe [1], S. 81.)} \end{array}\right\} \mathscr{H}, \mathscr{K} \in \mathbf{L}^2 .$$

Beweis. Wir werden diese Eigenschaften nur für die Operation R beweisen; in anderen Fällen ist alles klar:

a) Ist $\mathscr{K} \subseteq \mathbf{L}^2$, so gilt $\mathscr{K} = R_{\mathscr{K}}(e, e)$ und daraus bekommen wir $\mathscr{K} \subset R\mathscr{K}$.

b) Klar.

c) Ist $(axb, ayb) \in R\mathscr{K}$, so gibt es Elemente c, d, so daß $(axb, ayb) \in R_{\mathscr{K}}(c, d)$, also $(caxbd, caybd) \in \mathscr{K}$ und $(x, y) \in R_{\mathscr{K}}(ca, bd) \subset R\mathscr{K}$. $R\mathscr{K}$ ist also regulär und $RR\mathscr{K} = R\mathscr{K}$.

2.7. Eine Relation $\mathscr{K}$ heißt *reflexiv*, wenn sie alle Paare (x, x) für $x \in \mathbf{L}$ enthält.

Es ist klar, daß *jede Bedeckung von einer reflexiven Relation auch reflexiv ist.*

Weiter werden einige Beziehungen zwischen den soeben definierten Begriffen studiert.

2.8. *Ist* $\mathscr{K} \subseteq \mathbf{L}^2$ *stabil, dann ist auch* $T\mathscr{K}$ *stabil.*

Beweis. Nehmen wir an, daß $\mathscr{K}$ eine stabile Relation ist, und es sei $(x, y) \in T\mathscr{K}$, $a, b \in \mathbf{L}$. Dann entspricht dem Paare (x, y) eine endliche $\mathscr{K}$-Kette $x = x_1, x_2, \ldots, x_n = y$ und wegen $S\mathscr{K} = \mathscr{K}$ ist auch $ax_1b, ax_2b, \ldots, ax_nb$ eine $\mathscr{K}$-Kette. Es gilt also $(axb, ayb) \in T\mathscr{K}$.

2.9. *Ist* $\mathscr{K} \subseteq \mathbf{L}^2$ *stabil dann ist auch* $D\mathscr{K}$ *stabil.*

Beweis. Es sei $\mathscr{K} \subseteq \mathbf{L}^2$ eine stabile Relation und es seien $a, b \in \mathbf{L}$, $(x, y) \in D\mathscr{K}$. Dann haben wir $x = x_1 \cup x_2 \cup \ldots \cup x_n$, $y = y_1 \cup y_2 \cup \ldots \cup y_n$, wo $(x_i, y_i) \in \mathscr{K}$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ gilt, und daraus wegen der Stabilität folgt $(ax_ib, ay_ib) \in \mathscr{K}$ $(1 \leqq i \leqq n)$. Wir bekommen

$$(ax_1b \cup ax_2b \cup \ldots \cup ax_nb, ay_1b \cup ay_2b \cup \ldots \cup ay_nb) \in D\mathscr{K}$$

und nach den distributiven Gesätzen ergibt sich $(axb, ayb) \in D\mathscr{K}$.

2.10. *Ist* $\mathscr{K} \subseteq \mathbf{L}^2$ *disjunktiv und reflexiv, so ist* $T\mathscr{K}$ *disjunktiv.*

Beweis. Es sei $\mathscr{K}$ eine disjunktive und reflexive Relation und $(x, y) \in T\mathscr{K}$ $(x', y') \in T\mathscr{K}$. Wegen der Reflexivität kann man voraussetzen, daß die Paare (x, y) (x', y') der Reihe nach der $\mathscr{K}$-Ketten $x = a_1, a_2, \ldots, a_n = y, x' = b_1, b_2, \ldots, b_n = y'$ von *gleicher Länge* entsprechen. (In diesen Ketten können natürlich einige Elemente sich wiederholen.) Nach der Disjunktivität der Relation $\mathscr{K}$ folgt, dass die Folge $a_1 \cup b_1, a_2 \cup b_2, \ldots, a_n \cup b_n$ eine $\mathscr{K}$-Kette ist und daraus $(x \cup x', y \cup y') \in T\mathscr{K}$.

2.11. *Ist $\mathscr{K}$ eine reflexive Relation, so ist $TDS\mathscr{K}$ eine transitive, disjunktive und stabile Relation* (oder kurz eine $T + D + S$-*Relation*).

Beweis folgt unmittelbar aus 2.6—2.10.

Beispiel. Die natürliche Halbordnung der l-Halbgruppe $\mathbf{L}$ ist eine $T + D + S$-Relation.

2.12. *Ist die l-Halbgruppe $\mathbf{L}$ kommutativ, so ist die reguläre Hülle von jeder $T + D + S$-Relation wieder eine $T + D + S$-Relation.*

Beweis. Setzen wir voraus, daß $\mathbf{L}$ kommutativ ist und es sei zuerst $\mathscr{K} \subseteq \mathbf{L}^2$ eine beliebige Relation. Dann gilt offenbar $R_{\mathscr{K}}(a\ b) = R_{\mathscr{K}}(ab, e) = R_{\mathscr{K}}(ba, e)$ für je $a, b \in \mathbf{L}$. Bezeichnet man kurz $R_{\mathscr{K}}(a, e) = R_{\mathscr{K}}(a)$, so kann man $R\mathscr{K} = \sum_{a \in \mathbf{L}} R_{\mathscr{K}}(a)$ schreiben.

Es sei $\mathscr{K}$ eine $T + D + S$-Relation. Ist $x \lesssim y(R\mathscr{K})$ $y \lesssim z(R\mathscr{K})$ so gibt es Elemente $a, b \in \mathbf{L}$ mit $(x, y) \in R_{\mathscr{K}}(a)$, $(y, z) \in R_{\mathscr{K}}(b)$, also $ax \lesssim ay(\mathscr{K})$, $by \lesssim bz(\mathscr{K})$. Nach der Stabilität der Relation $\mathscr{K}$ folgt $abx \lesssim aby(\mathscr{K})$, $aby \lesssim abz(\mathscr{K})$, und nach der Transitivität $abx \lesssim abz(\mathscr{K})$. Hiernach gilt $(x, z) \in R_{\mathscr{K}}(ab) \subset R\mathscr{K}$. Die Relation $R\mathscr{K}$ ist also transitiv.

Es sei $x \lesssim y(R\mathscr{K})$, $a \in \mathbf{L}$. Dann für ein passendes $b \in \mathbf{L}$ gilt $bx \lesssim by(\mathscr{K})$ und daraus $abx \lesssim aby(\mathscr{K})$, also $(ax, ay) \in R_{\mathscr{K}}(b) \subset R\mathscr{K}$. $R\mathscr{K}$ ist also stabil.

Es sei endlich $x \lesssim y(R\mathscr{K})$, $x' \lesssim y'(R\mathscr{K})$, so daß für passende $a, b \in \mathbf{L}$ die Beziehungen $ax \lesssim ay(\mathscr{K}), bx' \lesssim by'(\mathscr{K})$ gelten. Daraus folgt $abx \lesssim aby(\mathscr{K})$, $abx' \lesssim aby'(\mathscr{K})$ und nach der Disjunktivität ergibt sich $ab(x \cup x') \lesssim ab(y \cup y')\,(\mathscr{K})$ und $x \cup x' \lesssim y \cup y'(R\mathscr{K})$, $R\mathscr{K}$ ist also disjunktiv. Damit ist der Satz bewiesen.

Im folgenden werden wir die Halbordnungrelation in der l-Halbgruppe $\mathbf{L}$ mit $\mathscr{O}_{\mathbf{L}}$ bezeichnen. *Als „Relationen" werden immer nur diejenige Relationen bezeichnet werden, welche $\mathscr{O}_{\mathbf{L}}$ bedecken.* Deswegen werden wir *alle Relationen, welche in Betracht kommen, schweigend für reflexive halten.*

2.13. Man sagt, daß eine Relation $\mathscr{K}$ *subnormal* ist, wenn sie gleichzeitig transitiv, stabil, disjunktiv und regulär ist. Es läßt sich leicht das Folgende beweisen:

2.14. *Es sei $\mathscr{K} \subseteq \mathbf{L}^2$ eine beliebige Relation. Der Durchschnitt $U\mathscr{K}$ aller subnormalen Relationen, welche $\mathscr{K}$ bedecken, ist eine subnormale Relation.*

Die Relation $U\mathscr{K}$, wo U ersichtlich die Axiome einer Abschließung-operation erfüllt, werden wir *die subnormale Hülle von $\mathscr{K}$* nennen. Nach 2.11 und 2.12 folgt unmittelbar:

2.15. *Ist die l-Halbgruppe $\mathbf{L}$ kommutativ, so gilt $U\mathscr{K} = RTDS\mathscr{K}$ für jede Relation $\mathscr{K} \subseteq \mathbf{L}^2$.*

In einer nichtkommutativen l-Halbgruppe $\mathbf{L}$ lassen sich die subnormalen Hüllen von Relationen auf Grunde des folgenden Lemmas konstruiren:

2.16. *Lemma. Es sei $i_1, i_2, \ldots$ eine nur aus den Zahlen* 1, 2, 3, 4 *bestehende Folge, mit der jede dieser Zahlen konfinal ist.*

Es sei $\mathscr{K}$ eine beliebige Relation in $\mathbf{L}$. *Bezeichnen wir*

$$[\mathscr{H}]^1 = T\mathscr{H}\,, \quad [\mathscr{H}]^2 = S\mathscr{H}\,, \quad [\mathscr{H}]^3 = D\mathscr{H}\,,$$
$$[\mathscr{H}]^4 = R\mathscr{H} \quad \text{für beliebige} \quad \mathscr{H} \subseteq \mathbf{L}^2$$

und setzen wir $\mathscr{M}_0 = \mathscr{K}$, $\mathscr{M}_n = [\mathscr{M}_{n-1}]^{i_n}$ *für* $n = 1, 2, \dots$ *Dann gilt* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathscr{M}_n = U\mathscr{K}$.

Beweis. Setzen wir $\mathscr{M} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathscr{M}_n$. Mit Rücksicht auf die Wahl der Zahlen $i_1, i_2, \dots$ kann man passende Indizes $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ so auswählen, daß alle $\mathscr{M}_{n_k}$ $(k = 1, 2, \dots)$ transitiv (bzw. stabil oder disjunktiv oder regulär) erscheinen. Wegen der Beziehungen $\mathscr{M}_n \subseteq \mathscr{M}_{n+1}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ bekommen wir immer $\mathscr{M} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{M}_{n_k}$. Daraus folgt sofort, daß die Relation $\mathscr{M}$ transitiv (bzw. stabil oder disjunktiv oder regulär) ist. $\mathscr{M}$ ist damit eine subnormale Relation und demnach gilt $U\mathscr{K} \subseteq \mathscr{M}$.

Umgekehrt, $U\mathscr{K}$ ist eine subnormale Relation und für ihre beliebige Verfeinerung $\mathscr{H}$ gilt $[\mathscr{H}]^p \subseteq [U\mathscr{K}]^p = U\mathscr{K}$ $(p = 1, 2, 3, 4)$. Da $\mathscr{M}_0 \subseteq U\mathscr{K}$ gilt, kann man leicht nach der vollständigen Induktion zur Beziehung $\mathscr{M} \subseteq U\mathscr{K}$ gelangen. Wir haben deshalb $\mathscr{M} = U\mathscr{K}$, w. z. b. w.

2.17. Es seien $\mathscr{K} \subseteq \mathscr{H}$ zwei Relationen in $\mathbf{L}$. Man sagt, daß die Relation $\mathscr{K}$ *Quotienten in $\mathscr{H}$ hat*, wenn es zu jedem Paare $a \lesssim b(\mathscr{K})$ Elemente $c, d \in \mathbf{L}$ gibt, so daß $a \sim bc(\mathscr{H})$, $a \sim db(\mathscr{H})$ gilt. Ist besonders $\mathscr{H} = \mathscr{K}$, so sprechen wir über eine *Quotientenrelation* oder kurz über eine *Q-Relation.*

2.18. *Sind $\mathscr{K} \subseteq \mathscr{H}$ zwei Relationen und hat $\mathscr{K}$ Quotienten in $\mathscr{H}$, so haben die Relationen $T\mathscr{K}$, $S\mathscr{K}$ Quotienten in $TS\mathscr{H}$.*

Beweis. Nach 2.6 und 2.8 ist $TS\mathscr{H}$ eine transitive und stabile Relation.

a) Ist $x \lesssim y(T\mathscr{K})$, so entspricht dem Paare (x, y) eine $\mathscr{K}$-Kette $x = a_1, a_2, \dots, a_n = y$. Es gilt nach der Voraussetzung $a_1 \sim a_2c_1(\mathscr{H})$, $a_2 \sim a_3c_2(\mathscr{H}), \dots, a_{n-1} \sim a_nc_{n-1}(\mathscr{H})$ und wegen der Transitivität und Stabilität der Relation $TS\mathscr{H}$ bekommen wir $x \sim ys(TS\mathscr{H})$ für $s = c_{n-1} \dots c_2c_1$. Ganz analog wir haben $x \sim ry(TS\mathscr{H})$ für ein passendes $r \in \mathbf{L}$.

b) Es sei $a \lesssim b(S\mathscr{K})$; dann gilt $a = xa'y$, $b = xb'y$, wobei $a' \lesssim b'(\mathscr{K})$. Daraus folgt $a' \sim b'c(\mathscr{H})$ und $xa'y \sim xb'cy(S\mathscr{H})$. Wegen $cy \leqq y$ d. h. $cy \lesssim y(\mathscr{K})$ gibt es ein Element $d \in \mathbf{L}$ mit $cy \sim yd(\mathscr{H})$ und daraus $xb'cy \sim xb'yd(S\mathscr{H})$. Aus den letzten in der Relation $S\mathscr{H}$ gültigen Äquivalenzen folgt $xa'y \sim xb'yd(TS\mathscr{H})$, d. h. $a \sim bd(TS\mathscr{H})$. Ähnlich kann man eine symmetrische Beziehung $a \sim d'b(TS\mathscr{H})$ ableiten.

2.19. *Ist $\mathscr{K}$ eine transitive Q-Relation, so ist $D\mathscr{K}$ eine Q-Relation.*

Beweis. Es sei $x \lesssim y(D\mathscr{K})$. Dann haben wir $x = x_1 \cup x_2 \cup \dots \cup x_n$, $y = y_1 \cup y_2 \cup \dots \cup y_n$, wo $x_i \lesssim y_i(\mathscr{K})$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ gilt. Da $y_i \lesssim y(\mathscr{K})$ für alle Indizes i gilt, so bekommen wir wegen der Transitivität der Relation $\mathscr{K}$ $x_i \lesssim y(\mathscr{K})$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Daraus $x_i \sim ya_i(\mathscr{K})$ für $i = 1, 2, \dots, n$ und also $\bigcup_i x_i \sim \bigcup_i ya_i(D\mathscr{K})$, woraus endlich $x \sim y(\bigcup_i a_i)\,(D\mathscr{K})$ folgt. Eine symmetrische Äquivalenz folgt analogisch. $D\mathscr{K}$ ist also eine Q-Relation w. z. b. w.

2.20. *Ist $\mathscr{K}$ eine Q-Relation, so hat $R\mathscr{K}$ Quotienten in $RTS\mathscr{K}$.*

Beweis. Ist $x \leqq y(R\mathscr{K})$, so gilt $(x, y) \in R_{\mathscr{K}}(c, d)$ für passende $c, d \in \mathbf{L}$ und also $cxd \leqq cyd(\mathscr{K})$. Daraus folgt $cxd \sim cydr(\mathscr{K})$, $r \in \mathbf{L}$. Wegen der Ungleichung $dr \leqq d$ gilt $dr \sim sd(\mathscr{K})$ und also $cydr \sim cysd(S\mathscr{K})$, $cxd \sim cysd(TS\mathscr{K})$. Wir bekommen endlich $x \sim ys(RTS\mathscr{K})$.

Eine symetrische Beziehung folgt in ähnlicher Weise.

2.21. *Ist $\mathscr{K}$ eine Q-Relation, so ist $RTDS\mathscr{K}$ auch eine Q-Relation.*

Beweis. Es sei $\mathscr{K}$ eine Q-Relation. Nach 2.18 hat die Relation $S\mathscr{K}$ Quotienten in $TS\mathscr{K}$ und nach derselben Lemma hat $TS\mathscr{K}$ Quotienten in $TSTS\mathscr{K}$. Die letzte Relation ist nach 2.6 und 2.8 mit $TS\mathscr{K}$ identisch, also $TS\mathscr{K}$ ist eine transitive Q-Relation. Dann ist nach 2.19 $DTS\mathscr{K}$ eine Q-Relation. Nach 2.18 hat die $TDTS\mathscr{K}$ Quotienten in $TSDTS\mathscr{K}$. Es gilt deutlich $TDS\mathscr{K} \subseteq TDTS\mathscr{K} \subseteq TSDTS\mathscr{K} \subseteq TDS\mathscr{K}$, denn $TDS\mathscr{K}$ nach 2.11 eine $T + D + S$-Relation ist; daraus folgt, daß $TDS\mathscr{K}$ eine Q-Relation ist. Nach 2.20 hat die Relation $RTDS\mathscr{K}$ Quotienten in $RTSTDS\mathscr{K} = RTDS\mathscr{K}$ und $RTDS\mathscr{K}$ ist also eine Q-Relation, w. z. b. w.

2.22. Satz. *Die subnormale Hülle von einer Q-Relation ist wieder eine Q-Relation.*

Beweis. Es sei $\mathscr{K}$ eine Q-Relation. Bezeichnen wir $\mathscr{N}_0 = \mathscr{K}$, $\mathscr{N}_i = RTDS\mathscr{N}_{i-1}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Nach Lemma 2.21 sind alle $\mathscr{N}_i$ Q-Relationen und es ist klar, daß auch die Relation $\mathscr{N} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathscr{N}_i$ eine Q-Relation ist. Nach Lemma 2.16 gilt offenbar $\mathscr{N} = U\mathscr{K}$. Damit ist der Satz bewiesen.

3. EIGENSCHAFTEN DER RELATIONEN UNTER VORAUSSETZUNG DER MAXIMALBEDINGUNG

Wir werden in diesem Absatz voraussetzen, daß die grundlegende l-Halbgruppe $\mathbf{L}$ die Maximalbedingung erfüllt.

3.1. Man sagt, daß eine Relation $\mathscr{K}$ *die Maximalbedingung erfüllt*, wenn in jeder unendlichen $\mathscr{K}$-Kette $a_1, a_2, \ldots$ alle Glieder von einem gewissen n ab äquivalent sind: $a_n \sim a_{n+1} \sim \ldots (\mathscr{K})$.

Bemerkung. Die Relation $\mathcal{O}_{\mathbf{L}}$ erfüllt deutlich die Maximalbedingung genau dann, wenn auch die l-Halbgruppe $\mathbf{L}$ die Maximalbedingung erfüllt.

3.2. *Es sei $\mathfrak{M}$ eine nichtleere Teilmenge von $\mathbf{L}$, welche mit je zwei Elementen x, y auch ihre Vereinigung $x \cup y$ enthält. Dann gibt es in der Menge $\mathfrak{M}$ das größte Element.*

Beweis. Da $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ ist und die Maximalbedingung in $\mathbf{L}$ gilt, so gibt es in $\mathfrak{M}$ ein Element z mit folgender Eigenschaft: ist $y \in \mathfrak{M}$, $y \geqq z$, so folgt $y = z$. Ist $x \in \mathfrak{M}$, dann gilt nach der Voraussetzung $x \cup z \in \mathfrak{M}$, $z \leqq x \cup z$ und daraus $z = x \cup z$, also $x \leqq z$.

3.3. Satz. *Es sei $\mathscr{H}$ eine transitive und disjunktive Relation. Dann gilt:*

1. *Zu jedem Element $a \in \mathbf{L}$ gibt es genau ein Element $a^{\mathscr{H}} \sim a(\mathscr{H})$, so daß $x \lesssim a(\mathscr{H})$ dann und nur dann gilt, wenn $x \leqq a^{\mathscr{H}}$ ist.*

2. *Die Relation $\mathscr{H}$ erfüllt die Maximalbedingung.*

Beweis. Es sei $a \in \mathbf{L}$; bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}(a)$ die Menge aller Elemente $x \in \mathbf{L}$, für welche $x \lesssim a(\mathscr{H})$ gilt. Wir haben $a \in \mathfrak{M}(a)$ und somit $\mathfrak{M}(a) \neq \emptyset$, weil $\mathscr{H}$ reflexiv ist. Ist $x, y \in \mathfrak{M}(a)$, so folgt nach der Disjunktivität der Relation $\mathscr{H}$ $x \cup y \in \mathfrak{M}(a)$. Nach 3.2 gibt es in $\mathfrak{M}(a)$ das größte Element $a^{\mathscr{H}}$. Es gilt $a^{\mathscr{H}} \lesssim a(\mathscr{H})$ und $a \leqq a^{\mathscr{H}}$; daraus folgt $a \sim a^{\mathscr{H}}(\mathscr{H})$.

Es sei $x \leqq a^{\mathscr{H}}$; dann $x \lesssim a^{\mathscr{H}}(\mathscr{H})$ und nach der Transitivität der Relation $\mathscr{H}$ folgt $x \lesssim a(\mathscr{H})$. Damit ist 1 bewiesen.

2. Es sei $a_1, a_2, a_3, \ldots$ eine unendliche $\mathscr{H}$-Kette. Nach 1 ist dann $a_1^{\mathscr{H}}, a_2^{\mathscr{H}}, a_3^{\mathscr{H}}, \ldots$ eine nicht abnehmende Kette von Elementen. Wegen der Maximalbedingung gilt die Gleichheit $a_i^{\mathscr{H}} = a_{i+1}^{\mathscr{H}}$ für alle Indizes $i \geqq m$, wo m eine genügend große Zahl ist; deshalb gelten die Äquivalenzen $a_i \sim a_{i+1}(\mathscr{H})$ für alle Indizes $i \geqq m$. Damit ist auch 2 bewiesen.

3.4. Es seien $a, b \in \mathbf{L}$ beliebige Elemente. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}_r(a, b)$ bzw. mit $\mathfrak{M}_l(a, b)$ die Menge aller Elemente $x \in \mathbf{L}$, bzw. $y \in \mathbf{L}$, welche die Ungleichung $bx \leqq a$ bzw. die Ungleichung $yb \leqq a$ erfüllen. Hat $\mathfrak{M}_r(a, b)$ bzw. $\mathfrak{M}_l(a, b)$ das größte Element, nennen wir dieses *das Rechtsquotient* bzw. *das Linksquotient der Elemente a, b*. Das Links- und das Rechtsquotient bezeichnen wir der Reihe nach mit Symbolen $(a : b)_l$, $(a : b)_r$.

3.5. *Zu jeden zwei Elementen $a, b \in \mathbf{L}$ gibt es in $\mathbf{L}$ das Rechtsquotient $(a : b)_r$ und das Linksquotient $(a : b)_l$.*

Beweis. Es gilt $ab \leqq a$, $ba \leqq a$, und damit $\mathfrak{M}_l(a, b) \neq \emptyset$, $\mathfrak{M}_r(a, b) \neq \emptyset$. Jede dieser Mengen enthält mit je zwei Elementen auch ihre Vereinigung. Nach 3.2 müssen die beide Quotienten existieren, w. z. b. w.

Bemerkung. Zur Definition des Rechts- und Linksquotients vgl. [1], S. 281. Es ist leicht einzusehen, daß:

3.6. *Ist $a \leqq b$, $c \geqq d$, dann gilt $(a : c)_r \leqq (b : d)_r$; $(a : c)_l \leqq (b : d)_l$.*

3.7. Satz. *Ordnen wir jedem Paare $(a, b) \in \mathcal{O}_{\mathbf{L}}$ die Paare $(a, (a : b)_l\, b), (a, b(a : b)_r)$ zu. Die Relation $P\mathcal{O}_{\mathbf{L}}$, die aus $\mathcal{O}_{\mathbf{L}}$ durch Hinzufügung aller zugeordneten Paare entsteht, ist eine Q-Relation.*

Beweis. Ist $a \lesssim b(P\mathcal{O}_{\mathbf{L}})$, so können nur zwei Fälle vorkommen:

a) $(a, b) \in \mathcal{O}_{\mathbf{L}}$; wegen der Ungleichungen $(a : b)_l\, b \leqq a$, $b(a : b)_r \leqq a$ gilt $a \sim (a : b)_l\, b(P\mathcal{O}_{\mathbf{L}})$, $a \sim b(a : b)_r\, (P\mathcal{O}_{\mathbf{L}})$.

b) Das Paar (a, b) kommt unter denen Paaren vor, mit denen $\mathcal{O}_{\mathbf{L}}$ zu $P\mathcal{O}_{\mathbf{L}}$ erweitert wurde. Dann existiert ein Element $c \in \mathbf{L}$, so daß $a \leqq c$, $b = (a : c)_l\, c$ bzw. $b = c(a : c)_r$ gilt. Es gilt also $b \leqq a$ und daraus $a \sim b(P\mathcal{O}_{\mathbf{L}})$.

3.8. Satz. *Es sei $\mathcal{H}$ eine subnormale Q-Relation. Dann sind die folgenden Bedingungen miteinander äquivalent:*

a) *$\mathcal{H}$ erfüllt die Bedingung* (W): *Zu jedem Paare $a \lesssim b(\mathcal{H})$ gibt es Elemente $\varepsilon \sim e(\mathcal{H})$, $\delta \sim e(\mathcal{H})$, so daß $a\varepsilon \leqq b$, $\delta a \leqq b$ gilt.*

b) *Es gilt $\mathcal{H} \supseteq P\mathcal{O}_{\mathbf{L}}$.*

c) *Die Beziehung $a \lesssim b(\mathcal{H})$ ist für je $a, b \in \mathbf{L}$ mit jeder der Beziehungen $(b : a)_r \sim e(\mathcal{H})$, $(b : a)_l \sim e(\mathcal{H})$ äquivalent.*

Beweis. Wir beweisen zuerst, daß b) aus a) folgt. Es sei $\mathcal{H}$ eine subnormale Q-Relation, die auch die Bedingung (W) erfüllt. Es sei $a \leqq b$; dann ist $a \lesssim b(\mathcal{H})$ und es gibt Elemente $c, d \in \mathbf{L}$, so daß $bc \sim a(\mathcal{H})$, $db \sim a(\mathcal{H})$ gilt. Nach der Voraussetzung existieren weiter Elemente $\varepsilon \sim e(\mathcal{H})$, $\delta \sim e(\mathcal{H})$ mit $bc\varepsilon \leqq a$, $\delta db \leqq a$. Daraus folgt $c\varepsilon \leqq (a : b)_r$, $\delta d \leqq (a : b)_l$ und wegen der evidenten Beziehungen $a \sim bc\varepsilon(\mathcal{H})$, $a \sim \delta db(\mathcal{H})$ gilt $a \lesssim b(a : b)_r\,(\mathcal{H})$, $a \lesssim (a : b)_l\, b(\mathcal{H})$. Damit bekommen wir $P\mathcal{O}_{\mathbf{L}} \subseteq \mathcal{H}$. Zeigen wir nun, wie c) aus b) folgt.

Es sei $\mathcal{H}$ eine subnormale Q-Relation, für die $\mathcal{H} \supseteq P\mathcal{O}_{\mathbf{L}}$ gilt. Zuerst folgt leicht, daß für jedes Element $d \in \mathbf{L}$ $(d : d^{\mathcal{H}})_r \sim e(\mathcal{H})$, $(d : d^{\mathcal{H}})_l \sim e(\mathcal{H})$ gilt. Wirklich, wir haben $d \leqq d^{\mathcal{H}}$ und wegen $P\mathcal{O}_{\mathbf{L}} \subseteq \mathcal{H}$ gelten die Beziehungen $d \sim (d : d^{\mathcal{H}})_l\, d^{\mathcal{H}}(\mathcal{H})$, $d \sim d^{\mathcal{H}}(d : d^{\mathcal{H}})_r\,(\mathcal{H})$. Nach $d \sim d^{\mathcal{H}}(\mathcal{H})$ folgen die gewünschten Äquivalenzen. Es sei $a \lesssim b(\mathcal{H})$; dann gilt auch $a \leqq b^{\mathcal{H}}$. Nach 3.6 ist $(b : b^{\mathcal{H}})_r \leqq (b : a)_r$, $(b : b^{\mathcal{H}})_l \leqq (b : a)_l$ und wegen $(b : b^{\mathcal{H}})_r \sim e(\mathcal{H})$, $(b : b^{\mathcal{H}})_l \sim e(\mathcal{H})$ bekommen wir $(b : a)_r \sim e(\mathcal{H})$, $(b : a)_l \sim e(\mathcal{H})$. Anderseits kann man aus jeder der Äquivalenzen $(b : a)_r \sim e(\mathcal{H})$, $(b : a)_l \sim e(\mathcal{H})$ die Beziehung $a \lesssim b(\mathcal{H})$ herleiten.

Setzen wir endlich c) voraus und es sei $a \lesssim b(\mathcal{H})$. Dann gilt offenbar $a(b : a)_r \leqq b$, $(b : a)_l\, a \leqq b$, und die Beziehungen $(b : a)_r \sim e(\mathcal{H})$, $(b : a)_l \sim e(\mathcal{H})$ zeigen, daß die Bedingung (W) erfüllt ist. Damit ist der Satz bewiesen.

4. NORMALRELATIONEN UND WAERDENISCHE RELATIONEN

Es sei $\mathbf{L}$ wieder eine beliebige ganze l-Halbgruppe.

4.1. Unter einem *Homomorphismus* von der l-Halbgruppe $\mathbf{L}$ mit einer l-Halbgruppe $\mathbf{L}'$ versteht man eine solche Abbildung α von $\mathbf{L}$ auf $\mathbf{L}'$, die gleichzeitig ein Homomorphismus der Verbände $\mathbf{L}$, $\mathbf{L}'$ und ein Homomorphismus der Halbgruppen $\mathbf{L}$, $\mathbf{L}'$ ist. Ganz analog ist ein Isomorphismus von zwei l-Halbgruppen $\mathbf{L}$, $\mathbf{L}'$ definiert.

4.2. Eine in der l-Halbgruppe $\mathbf{L}$ definierte Relation $\mathscr{N}$ heißt *normal*, wenn es ein Homomorphismus α von l-Halbgruppe $\mathbf{L}$ mit einer ganzen normalen l-Halbgruppe $\mathbf{L}'$ gibt, so daß $a \lesssim b(\mathscr{N})$ genau dann gilt, wenn $\alpha(a) \leqq \alpha(b)$ ist.

4.3. Eine Normalrelation $\mathscr{N}$ nennen wir eine *Waerdenische Relation* oder kurz eine *W-Relation*, wenn sie die folgende Forderung erfüllt:

(W) *Zu jedem Paare $a \lesssim b(\mathscr{N})$ gibt es Elemente $\varepsilon \sim e(\mathscr{N})$, $\delta \sim e(\mathscr{N})$, so dass $a\varepsilon \leqq b$, $\delta a \leqq b$ gilt.* (Vgl. 3.8.)

4.4. Satz. *Eine Relation $\mathscr{H}$ in $\mathbf{L}$ ist genau dann normal, wenn sie eine subnormale Q-Relation ist, welche das folgende Axiom der Konjunktivität erfüllt:*

(K) *Aus $(a, b) \in \mathscr{H}$, $(c, d) \in \mathscr{H}$ folgt immer $(a \cap c, b \cap d) \in \mathscr{H}$.*

Beweis. Nach Definition 1.4 und 4.2 ist leicht einzusehen, daß eine Normalrelation alle ausgeschriebenen Eigenschaften besitzt. Es sei also $\mathscr{H}$ eine subnormale und konjunktive Q-Relation. Nach der Transitivität und Reflexivität folgt, daß $\mathscr{H}$ eine Äquivalenz ist, wodurch eine Klasseneinteilung $\mathbf{L}/\mathscr{H}$ der l-Halbgruppe $\mathbf{L}$ bestimmt ist. Wir werden die Äquivalenzklasse von einem Element $x \in \mathbf{L}$ mit $\langle x \rangle$ bezeichnen. Aus der Transitivität und Stabilität folgt unmittelbar: ist $a \sim b(\mathscr{H})$, $c \sim d(\mathscr{H})$, so ist $ac \sim$ $\sim bd(\mathscr{H})$. Mit Rücksicht auf dies läßt sich auf der Menge $\mathbf{L}/\mathscr{H}$ eine eindeutige Multiplikation definieren und zwar durch die Formel

$$\langle a \rangle \langle b \rangle = \langle ab \rangle . \tag{1}$$

Damit wird $\mathbf{L}/\mathscr{H}$ zu einer Halbgruppe mit Einselement $\langle e \rangle$. Führen wir in die Halbgruppe $\mathbf{L}/\mathscr{H}$ eine teilweise Anordnung folgendermaßen ein: $\langle a \rangle \leqq \langle b \rangle$ dann und nur dann, wenn $a \lesssim b(\mathscr{H})$ gilt. Mit Rücksicht auf die Disjunktivität und die Konjunktivität der Relation $\mathscr{H}$ wird $\mathbf{L}/\mathscr{H}$ zu einem Verband, wohin man nach den Formeln

$$\langle a \rangle \cup \langle b \rangle = \langle a \cup b \rangle , \quad \langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle a \cap b \rangle \tag{2}$$

operiert. Es ist leicht einzusehen, daß die Menge $\mathbf{L}/\mathscr{H}$ hinsichtlich der Multiplikation (1) und der Verbandsoperationen (2) eine ganze l-Halbgruppe ist. Nach der Regularität und der Q-Eigenschaft der Relation $\mathscr{H}$ folgt, dass die l-Halbgruppe $\mathbf{L}/\mathscr{H}$ normal ist. (Siehe 1.4.) Wegen des natürlichen Homomorphismus $x \to \langle x \rangle$ von $\mathbf{L}$ mit $\mathbf{L}/\mathscr{H}$ ist $\mathscr{H}$ eine Normalrelation, w. z. b. w.

4.5. Die oben konstruierte l-Halbgruppe $\mathbf{L}/\mathscr{H}$ nennen wir *die Faktor-l-Halbgruppe von* $\mathbf{L}$ *nach* $\mathscr{H}$.

4.6. Satz. *Eine Relation $\mathscr{H}$ in $\mathbf{L}$ ist dann und nur dann Waerdenisch, wenn sie eine subnormale Q-Relation ist, die das Axiom* (W) *erfüllt.*

Beweis. Nach Definition 4.3 und Satz 4.4 genügt es zu zeigen, daß jede subnormale das Axiom W erfüllende Relation $\mathscr{H}$ konjunktiv ist. Es sei also $a \lesssim b(\mathscr{H})$, $c \lesssim d(\mathscr{H})$; dann gilt $a\varepsilon \leqq b$, $c\varepsilon' \leqq d$, wo $\varepsilon \sim e(\mathscr{H})$, $\varepsilon' \sim e(\mathscr{H})$ ist. Daraus folgt $(a \cap c)\, \varepsilon\varepsilon' \leqq b$,

$(a \cap c)\, \varepsilon\varepsilon' \leqq d$, woraus $(a \cap c)\, \varepsilon\varepsilon' \leqq b \cap d$ folgt, und wegen $\varepsilon\varepsilon' \sim e(\mathscr{H})$ bekommen wir $a \cap c \precsim b \cap d(\mathscr{H})$. $\mathscr{H}$ ist also konjunktiv, w. z. b. w.

4.7. *Es sei $\mathscr{H}$ eine W-Relation in L. Ist $a \precsim b(\mathscr{H})$, dann gibt es ein Element $c \in \mathsf{L}$, so daß $a \sim bc(\mathscr{H})$, $bc \leqq a$ gilt.*

Beweis. Ist $a \precsim b(\mathscr{H})$, so gibt es ein Element $c \in \mathsf{L}$ mit $a \sim bc(\mathscr{H})$; daraus folgt $bc\varepsilon \leqq a$ für ein passendes $\varepsilon \sim e(\mathscr{H})$ und es gilt gleichzeitig $a \sim b(c\varepsilon)\,(\mathscr{H})$.

4.8. Satz. *Jede Relation von System Σ der l-Halbgruppe L ist eine W-Relation.*

Beweis. Es sei $\mathscr{J}$ eine Relation des Systems Σ. Dann ist $\mathscr{J}$ von der Form $\mathscr{J} = (\mathsf{L} \leftarrow \mathsf{L}^*)$, wo L^* eine nichtganze l-Halbgruppe ist, welche die Bedingungen (I), (II) aus 0.6 erfüllt und L als eine ganze Komponente enthält. (Vgl. Einleitung: 0.4 und die Definitionen zum Schluss.) Die Transitivität der Relation $\mathscr{J}$ ist klar. Benützen wir der Reihe nach die Lehrsätze 0.9, 0.11, 0.17, 0.16, 0.18 und 0.13, so sehen wir, daß die Relation $\mathscr{J}$ eine Bedeckung von $\mathcal{O}_{\mathsf{L}}$ ist, daß sie stabil und eine Q-Relation ist, daß sie das Axiom (W) erfüllt und endlich, daß sie disjunktiv und regulär ist. Nach Satz 4.6 ist sie eine W-Relation. Damit ist der Satz bewiesen.

Setzen wir im folgendem voraus, daß L die Maximalbedingung erfüllt. Ist $\mathscr{N}$ eine Normalrelation, so erfüllt sie nach Satz 3.3 die Maximalbedingung, und die zugehörige Faktor-l-Halbgruppe $\mathsf{L}/\mathscr{N}$ erfüllt damit auch die Maximalbedingung. $\mathsf{L}/\mathscr{N}$ ist nach Beweis von 4.4 ganz und normal, und nach 1.6 gilt in dieser die gute Arithmetik. Wir wissen auch, das jede ganze l-Halbgruppe, in welcher die gute Arithmetik gilt, normal ist (siehe 1.6). Daraus und nach Definition 4.2 ergibt sich der folgende Satz, wodurch dem Begriff einer Normalrelationen eine neue Erklärung geben ist.

4.9. Satz. *Die homomorphen Bilder von L, in denen die gute Arithmetik gilt, stimmen bis auf Isomorphismus mit den Faktor-l-Halbgruppen $\mathsf{L}/\mathscr{N}$ nach verschiedenen Normalrelationen überein.*

Nennen wir ein Element $q \in \mathsf{L}$ *unzerlegbar* in einer Normalrelation $\mathscr{N}$, wenn die zugehörige Klasse $\langle q \rangle$ ein Primelement von $\mathsf{L}/\mathscr{N}$ ist. Zwei Elemente $a \sim b(\mathscr{N})$ nennen wir *quasiqleich* in der Relation $\mathscr{N}$. Die Einheitsklasse $\langle e \rangle$ von $\mathsf{L}/\mathscr{N}$ werden wir mit Symbol $\varphi(\mathscr{N})$ bezeichnen. Dann bekommen wir noch das folgende Resultat:

4.10. Satz. *Es sei $\mathscr{N}$ eine Normalrelation in L. Dann ist jedes Element $a \in \mathsf{L} - \varphi(\mathscr{N})$ in der Form $a \sim p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}(\mathscr{N})$ darstellbar, wobei die Elemente $p_1, p_2, \dots, p_k$ in der Relation $\mathscr{N}$ unzerlegbar sind und zu verschiedenen Klassen von $\mathsf{L}/\mathscr{N}$ gehören; $e_1, e_2, \dots, e_k$ sind ganze positiven Zahlen. Diese Zerlegung ist bis auf die Reihenfolge der Faktoren und bis auf die Quasigleichheit eindeutig bestimmt.*

4.11. *Es sei $\mathscr{N}$ eine Normalrelation und $p \in \mathsf{L}$ ein in der Relation $\mathscr{N}$ unzerlegbares Element. Dann ist das zugehörige $p^{\mathscr{N}}$ ein Primelement.*

Beweis. Es sei p ein unzerlegbares Element und $ab \leqq p^{\mathcal{N}}$. Dann gilt $\langle a \rangle \langle b \rangle \leqq \leqq \langle p \rangle$ und da $\langle p \rangle$ ein Primelement von $\mathbf{L}/\mathcal{N}$ ist, so gilt mindestens eine der Beziehungen $\langle a \rangle \leqq \langle p \rangle$, $\langle b \rangle \leqq \langle p \rangle$. Daraus folgt mindestens eine der Beziehungen $a \leqq p^{\mathcal{N}}$, $b \leqq p^{\mathcal{N}}$, womit $p^{\mathcal{N}}$ ein Primelement ist, w. z. b. w.

4.12. *Es sei $\mathcal{W}$ eine W-Relation. Dann ist jedes Primelement $p \in \mathbf{L}$ entweder quasigleich e in der Relation $\mathcal{W}$, oder ist in $\mathcal{W}$ unzerlegbar und gleich dem zugehörigen Primelement $p^{\mathcal{W}}$.*

Beweis. Es sei $a \prec e(\mathcal{W})$ ein Primelement. Dann gibt es ein unzerlegbares Element p, so daß $a \leqq p^{\mathcal{W}}$ gilt. Nach 4.7 gibt es ein Element $c \leqq e$ mit $a \sim p^{\mathcal{W}}c(\mathcal{W})$ und $p^{\mathcal{W}}c \leqq a$. Nach der Definition eines Primelementes gilt entweder $c \leqq a$ oder $p^{\mathcal{W}} \leqq a$. Gälte aber die erste Ungleichung, so bekämen wir $p^{\mathcal{W}} \geqq e(\mathcal{W})$, was ein Widerspruch wäre. Hiernach gilt $p^{\mathcal{W}} \leqq a$ und daraus $a = p^{\mathcal{W}}$. Daraus und nach Satz 4.10 folgt

4.13. Satz. *Es sei $\mathcal{W}$ eine W-Relation und $\varphi(\mathcal{W})$ ihre Einheitsklasse. Dann ist jedes Element $a \in \mathbf{L} - \varphi(\mathcal{W})$ in der Form $a \sim p_1^{e_1}p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}(\mathcal{W})$ darstellbar, wobei $p_1, p_2, \dots, p_k$ miteinander verschiedene Primelemente aus $\mathbf{L} - \varphi(\mathcal{W})$ und $e_1, e_2, \dots, e_k$ ganze positiven Zahlen sind; diese Zerlegung ist bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig bestimmt.*

Der folgende Satz gehört zu den Grundergebnissen unserer Theorie:

4.14. Satz. *Die W-Relationen sind genau diejenige Normalrelationen, welche die Relation $P\mathcal{O}_{\mathbf{L}}$ bedecken.*

In dem System Θ aller W-Relationen der l-Halbgruppe $\mathbf{L}$ gibt es das kleinste Element; diese kleinste (oder *„feinste“*) *W-Relation ist durch die Formel $\mathcal{W}_{\mathbf{L}} = = UP\mathcal{O}_{\mathbf{L}}$ definiert.*

Beweis. Die erste Behauptung folgt nach den Sätzen 3.8, 4.4 und 4.6. Da jede W-Relation die $P\mathcal{O}_{\mathbf{L}}$ bedeckt, so bedeckt sie mit Rücksicht auf die Subnormalität auch $\mathcal{W}_{\mathbf{L}}$. Anderseits, die Relation $UP\mathcal{O}_{\mathbf{L}}$ ist subnormal und nach den Sätzen 2.22 und 3.7 ist sie eine Q-Relation, also nach Satz 3.8 erfüllt sie das Axiom (W) und nach 4.6 ist sie eine W-Relation. Damit ist auch die zweite Behauptung bewiesen.

Nach der Bedeutung des Axioms (W) folgt:

4.15. *Zwei W-Relationen in der l-Halbgruppe $\mathbf{L}$ stimmen dann und nur dann überein, wenn sie gleiche Einheitsklassen haben.*

Ist $\mathcal{W}$ eine W-Relation, dann ist $\mathbf{L} - \varphi(\mathcal{W})$ gleich der Menge aller Elemente $x \in \mathbf{L}$, zu denen ein unzerlegbares Primelement p mit $p \geqq x$ existiert. Daraus und nach 4.15 folgt:

4.16. *Zwei W-Relationen sind dann und nur dann gleich, wenn sie gleiche Mengen von unzerlegbaren Primelementen haben.*

Der folgende Satz ist für eine praktische Verwendung nützlich:

4.17. Satz. *Es sei $\mathscr{W}$ eine W-Relation mit der folgenden Eigenschaft: zu jedem Primelement $q \sim e(\mathscr{W})$ gibt es ein in $\mathscr{W}$ unzerlegbares Primelement $p^{\mathscr{W}}$, so dass $p^{\mathscr{W}} < q$ gilt. Dann gilt $\mathscr{W} = \mathscr{W}_{\mathsf{L}}$.*

Beweis. Nach Satz 4.14 gilt $\mathscr{W} \supseteq \mathscr{W}_{\mathsf{L}}$; für die zugehörigen Einheitsklassen gilt also $\varphi(\mathscr{W}) \supseteq \varphi(\mathscr{W}_{\mathsf{L}})$. Daraus und nach 4.12 ergibt sich, dass jedes in der Relation $\mathscr{W}$ unzerlegbare Primelement auch in $\mathscr{W}_{\mathsf{L}}$ unzerlegbar ist. Es sei umgekehrt q ein in $\mathscr{W}_{\mathsf{L}}$ unzerlegbares Primelement. Wenn es $q \sim e(\mathscr{W})$ wäre, so hätten wir ein Primelement $p^{\mathscr{W}}$ mit $p^{\mathscr{W}} < q$, was mit 4.12 im Widerspruch wäre. q ist also auch in der Relation $\mathscr{W}$ unzerlegbar. Damit ist bewiesen, dass die Relationen $\mathscr{W}, \mathscr{W}_{\mathsf{L}}$ dieselbe Menge von unzerlegbaren Primelementen besitzen, und nach 4.16 gilt $\mathscr{W} = \mathscr{W}_{\mathsf{L}}$, w. z. b. w.

4.18. Folgerung. *Es sei L^* eine nichtganze l-Halbgruppe, welche alle Bedingungen* (**I**—**IV**) *aus der Einleitung erfüllt und welche L als die ganze Komponente enthält. Dann ist die Relation $\mathscr{J} = (\mathsf{L} \leftarrow \mathsf{L}^*)$ gleich der kleinsten W-Relation $\mathscr{W}_{\mathsf{L}}$.*

Beweis. Nach Satz 4.8 ist $\mathscr{J}$ eine $\mathscr{W}$-Relation in L, welche hinsichtlich 0.25 alle Forderungen des Satzes 4.17 erfüllt.

4.19. Anwendung. Die obige Folgerung findet eine unmittelbare Anwendung in der Idealtheorie. Es sei $\mathfrak{o}$ ein nichtkommutativer Ring. Setzen wir woraus, daß $\mathfrak{o}$ eine maximale Ordnung von seinem rechten Quotientenring ist, welche beschränkt ist und die Maximalbedingung für ganze $\mathfrak{o}$-Ideale erfüllt. Bezeichnen wir mit L die l-Halbgruppe aller ganzen $\mathfrak{o}$-Ideale. *Dann ist die gewöhnliche Quasiteilbarkeit der $\mathfrak{o}$-Ideale als eine Relation in L durch die Formel $\mathscr{J} = UP\mathcal{O}_{\mathsf{L}}$ rein idealtheoretisch* (d. h. im Bereich der ganzen Ideale) *gekennzeichnet.*

Wirklich, die l-Halbgruppe L^* aller gebrochenen $\mathfrak{o}$-Ideale erfüllt nach der Einleitung alle Bedingungen (**I**—**IV**) und man kann direkt 4.18 anwenden.

Ist besonders $\mathfrak{C}$ ein kommutativer Integritätsbereich, der in seinem Quotientenkörper ganz abgeschlossen ist, dann ist $\mathfrak{C}$ eine maximale und beschränkte Ordnung (vgl. Einleitung). Die ganzen $\mathfrak{C}$-Ideale sind in diesem Falle die gewöhnlichen nichtleeren Ideale des Integritätsbereiches $\mathfrak{C}$. (Vgl. [3], Kap. 6.) Betrachten wir also die l-Halbgruppe L von diesen Idealen. Ist auch die Maximalbedingung für Ideale erfüllt, *so läßt sich die „Quasiteilbarkeitrelation" zwischen den Idealen* (im ursprünglichen Sinne von V. d. Waerden) *durch die Formel $\mathscr{J} = RTDSP\mathcal{O}_{\mathsf{L}}$ rein idealtheoretisch kennzeichnen* (vgl. noch 2.15).

5. SYSTEME VON W-RELATIONEN IN GANZEN l-HALBGRUPPEN

5.1. Es sei L eine ganze l-Halbgruppe. Eine Teilmenge E von L heißt *ein l-Ideal*, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt:

a) E ist eine Unterhalbgruppe der Halbgruppe L.

b) E ist ein duales Ideal des Verbands L. (D. h. E enthält mit je zwei Elementen

a, b auch ihren Durchschnitt $a \cap b$ und mit jedem Element c auch die Menge aller Elemente $x \geqq c$.

Das folgende ist leicht einzusehen: *Bei beliebigem Homomorphismus von der l-Halbgruppe* $\mathbf{L}$ *mit einer ganzen l-Halbgruppe* $\mathbf{L}^*$ *ist das Urbild des Einselements* $e^* \in \mathbf{L}^*$ *ein l-Ideal von* $\mathbf{L}$.

5.2. Satz. *Es sei* $\mathbf{L}$ *eine normale kommutative ganze l-Halbgruppe. Die Abbildung* φ, *wodurch jeder W-Relation* $\mathscr{W} \subseteq \mathbf{L}^2$ *ihre Einheitsklasse* $\varphi(\mathscr{W})$ *zugeordnet ist, ist ein Isomorphismus zwischen der halbgeordneten Menge* Θ *aller W-Relationen und der halbgeordneten Menge* Φ *aller l-Ideale der l-Halbgruppe* $\mathbf{L}$.

Beweis. Ist $\mathscr{W}$ ein W-Relation in $\mathbf{L}$, so läßt sich $\mathbf{L}$ auf $\mathbf{L}/\mathscr{W}$ homomorph abbilden und nach der Bemerkung aus 5.1 ist $\varphi(\mathscr{W})$ ein l-Ideal in $\mathbf{L}$. Die Abbildung φ ist nach 4.15 schlicht und sie erhält, wie auch die inverse Abbildung φ^{-1}, die mengentheoretische Inklusion. Sie ist also ein Isomorphismus von Θ mit einer Teilmenge von Φ. Es bleibt zu beweisen, daß jedes l-Ideal $\mathbf{E} \subset \mathbf{L}$ als Einheitsklasse von einer W-Relation auftritt. Es sei $\mathbf{E}$ ein l-Ideal und bezeichnen wir mit $\mathscr{H}$ die Relation aller solchen Paare (a, b), dass für ein $\varepsilon \in \mathbf{E}$ $a\varepsilon \leqq b$ gilt. Wegen $e \in \mathbf{E}$ ist $\mathscr{H} \supset \mathscr{O}_{\mathbf{L}}$. Ist $a \precsim b(\mathscr{H})$, $b \precsim c(\mathscr{H})$, so gilt $a\varepsilon \leqq b$, $b\varepsilon' \leqq c$ für passende $\varepsilon, \varepsilon' \in \mathbf{E}$ und daraus $a\varepsilon\varepsilon' \leqq c$; wegen $\varepsilon\varepsilon' \in \mathbf{E}$ gilt $a \precsim c(\mathscr{H})$. Es sei $a \precsim b(\mathscr{H})$, $c \precsim d(\mathscr{H})$; dann gibt es $\varepsilon, \varepsilon' \in \mathbf{E}$ mit $a\varepsilon \leqq b$, $c\varepsilon' \leqq d$; es gilt also $(a \cup c)\, \varepsilon\varepsilon' \leqq a\varepsilon \cup c\varepsilon' \leqq b \cup d$ und folglich $a \cup c \precsim b \cup d(\mathscr{H})$. Damit ist gezeigt, daß $\mathscr{H}$ transitiv und disjunktiv ist. Die Stabilität ist klar und die Regularität der Relation $\mathscr{H}$ folgt aus der Regularität der l-Halbgruppe $\mathbf{L}$. Es sei endlich $a \precsim b(\mathscr{H})$; dann gilt $a\varepsilon \leqq b$ für ein passendes $\varepsilon \in \mathbf{E}$. Nach der bekannten Eigenschaft der normalen l-Halbgruppen gibt es ein Element $c \in \mathbf{L}$ mit $a\varepsilon = bc \leqq a$ und daraus folgt $a \sim bc(\mathscr{H})$. $\mathscr{H}$ ist also eine Q-Relation. Nach ihrer Definition erfüllt die Relation $\mathscr{H}$ auch das Axiom (W) und nach Satz 4.6 ist sie eine W-Relation, wobei offenbar $\varphi(\mathscr{H}) = \mathbf{E}$ gilt.

5.3. Satz. *Es sei* $\mathbf{L}$ *eine ganze l-Halbgruppe, in der die gute Arithmetik gilt* (vgl. 1.1) *und* $\mathfrak{P}$ *sei die Menge aller ihren Primelemente. Die Abbildung* ψ, *die jedem l-Ideal* $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{L}$ *die Menge* $\psi(\mathbf{E}) = \mathbf{E} \cap \mathfrak{P}$ *zuordnet, ist ein Isomorphismus zwischen der halbgeordneten Menge* Φ *von allen l-Idealen und dem halbgeordneten System* Π *von allen Teilmengen der Menge* $\mathfrak{P}$.

Beweis. Es sei $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{P}$ beliebige Menge von Primelementen der l-Halbgruppe $\mathbf{L}$. Bezeichnen wir mit $\sigma[\mathfrak{M}]$ die Menge aller Elemente $x \in \mathbf{L}$, in deren eindeutigen Primfaktorzerlegungen lauter die Elemente der Menge $\mathfrak{M}$ auftreten; zur $\sigma[\mathfrak{M}]$ zählen wir auch das Einselement zu. Wegen der Eigenschaften der guten Arithmetik folgt, dass $\sigma[\mathfrak{M}]$ ein l-Ideal ist, für das $\psi(\sigma[\mathfrak{M}]) = \mathfrak{M}$ gilt. ψ *bildet also die Menge* Φ *auf das ganze System* Π *ab.* Es sei $\mathbf{E}$ ein l-Ideal und setzen wir $\psi(\mathbf{E}) = \mathfrak{M}$. Da $\mathbf{E}$ eine Halbgruppe ist und $\mathfrak{M} \subset \mathbf{E}$ gilt, so gilt $\sigma[\mathfrak{M}] \subseteq \mathbf{E}$. Da $\mathbf{E}$ auch ein duales Ideal ist, so enthält $\mathfrak{M}$ alle Primelemente, die in den Zerlegungen der Elemente $x \in \mathbf{E}$ vorkommen. Daraus folgt die umgekehrte Inklusion $\mathbf{E} \subseteq \sigma[\mathfrak{M}]$ und folglich $\mathbf{E} = \sigma[\mathfrak{M}]$. Die Abbildungen ψ, σ sind also schlicht und es gilt für sie $\psi = \sigma^{-1}$, $\psi = \sigma^{-1}$; ψ und σ erhalten weiter die mengentheoretische Inklusion. ψ ist damit ein Isomorphismus zwischen den Systemen Φ und Π, w. z. b. w.

5.4. Satz. *Es sei* $\mathbf{L}$ *eine ganze l-Halbgruppe, in der die gute Arithmetik gilt, und* $\mathfrak{P}$ *sei die Menge aller ihren Primelemente. Dann bildet das System* Θ *aller W-Relationen in* $\mathbf{L}$ *bezüglich seiner Anordnung nach der Inklusion eine Boolsche Algebra, die mit dem System* Π *aller Teilmengen der Menge* $\mathfrak{P}$ *isomorph ist.*

Beweis. Nach 5.2 und 5.3 stellt die Abbildung $\psi\varphi$ einen Isomorphismus zwischen den halbgeordneten Mengen Θ, Π dar; da Π bekanntlich eine Boolsche Algebra ist, so handelt sich es um einen Verbands-Isomorphismus und folglich ist auch Θ eine Boolsche Algebra.

5.5. Satz. *Gilt in einer ganzen l-Halbgruppe* $\mathbf{L}$ *die gute Arithmetik, so sind die Begriffe einer Normalrelation, einer W-Relation und einer Relation des Systems* Σ *in* $\mathbf{L}$ *miteinander äquivalent.*

Beweis. Es sei $\mathbf{L}$ eine ganze l-Halbgruppe mit der guten Arithmetik, $\mathcal{N} \subset \mathbf{L}^2$ eine Normalrelation und $\varphi(\mathcal{N})$ ihre Einheitsklasse. Dann ist $\varphi(\mathcal{N})$ ein l-Ideal und nach 5.2 gibt es eine W-Relation $\mathcal{W}$ mit $\varphi(\mathcal{W}) = \varphi(\mathcal{N})$. Es sei $a \precsim b(\mathcal{N})$; dann gilt $a \leqq b^{\mathcal{N}}, b \leqq b^{\mathcal{N}}, b \sim b^{\mathcal{N}}(\mathcal{N})$ und da $\mathcal{O}_{\mathbf{L}}$ eine Q-Relation ist, so gilt $b = b^{\mathcal{N}}c$ für ein passendes $c \in \varphi(\mathcal{N})$. Daraus folgt $ac \leqq b^{\mathcal{N}}c = b$, $c \in \varphi(\mathcal{W})$ und also $a \precsim b(\mathcal{W})$. Ist umgekehrt $a \precsim b(\mathcal{W})$, dann gilt $a\varepsilon \leqq b$ für ein passendes $\varepsilon \in \varphi(\mathcal{W}) = \varphi(\mathcal{N})$, und daraus $a \precsim b(\mathcal{N})$. Es gilt also $\mathcal{W} = \mathcal{N}$ und $\mathcal{N}$ ist eine W-Relation. Damit ist die Äquivalenz der Begriffe einer Normalrelation und einer W-Relation in $\mathbf{L}$ bewiessen. (Jede W-Relation ist natürlich nach Definition eine Normalrelation.)

Es sei jetzt $\mathcal{W} \subseteq \mathbf{L}^2$ eine W-Relation und $\mathfrak{A}$ die Menge aller Primelemente, welche zur $\varphi(\mathcal{W})$ gehören. Betrachten wir die Menge $\mathbf{A}$ aller Funktionen, welche auf der Menge $\mathfrak{A}$ definiert sind und nur die Werte $0, 1, 2, \ldots$ annehmen, und welche höchstens auf einer endlichen Teilmenge von $\mathfrak{A}$ nicht verschwinden. Weiter betrachten wir die Menge $\mathbf{B}$ aller Funktionen, welche auf der Menge $\mathfrak{P} - \mathfrak{A}$ definiert sind und nur die Werte $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ annehmen, und welche höchstens auf einer endlichen Teilmenge von $\mathfrak{P} - \mathfrak{A}$ nicht verschwinden. Endlich bezeichnen wir mit $\mathbf{B}_0$ die Menge aller nichtnegativen Funktionen von $\mathbf{B}$. Die Menge $\mathbf{A}$ wird zu einer ganzen l-Halbgruppe, wenn wir darin eine Multiplikation $\circ$ und Verbandsoperationen $\vee, \wedge$ folgendermaßen definieren:

$$(f \circ g)(p) = f(p) + g(p)\,, \quad (f \vee g)(p) = \min\{f(p), g(p)\}\,,$$
$$(f \wedge g)(p) = \max\{f(p), g(p)\}\,, \quad (p \in \mathfrak{A})\,.$$

Ganz ähnlich wird $\mathbf{B}$ zu einer nichtganzen l-Halbgruppe, in der $\mathbf{B}_0$ als die ganze Komponente auftritt.

Die grundlegende l-Halbgruppe $\mathbf{L}$ ist mit dem direkten Produkt $\mathbf{A} \times \mathbf{B}_0$ isomorph und sie kann mit diesem identifiziert werden. Es ist klar, daß $\mathbf{L}$ die ganze Komponente von der l-Halbgruppe $\mathbf{L}^* = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ ist und daß $\mathcal{W}$ mit der Relation $(\mathbf{L} \leftarrow \mathbf{L}^*)$ identisch ist. Die Relation $\mathscr{W}$ gehört also dem System Σ und damit ist die zweite gebrauchte Äquivalenz bewiesen (vgl. noch 4.8).

Setzen wir im folgenden voraus, daß $\mathbf{L}$ *eine allgemeine ganze l-Halbgruppe ist, welche die Maximalbedingung erfüllt.* Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

Es sei α ein Homomorphismus von der l-Halbgruppe $\mathbf{L}$ mit einer ganzen l-Halbgruppe $\mathbf{L}^*$. Ist $\mathfrak{M}$ eine Teilmenge von $\mathbf{L}$, so bezeichnen wir mit $\alpha(\mathfrak{M})$ die Menge aller Elemente $\alpha(x) \in \mathbf{L}^*$, wo $x \in \mathfrak{M}$ ist. Ist $\mathfrak{N}^*$ eine Teilmenge von $\mathbf{L}^*$, so bezeichnen wir mit $\alpha^{-1}(\mathfrak{N}^*)$ die Menge aller solchen Elemente $x \in \mathbf{L}$, daß $\alpha(x) \in \mathfrak{N}^*$ gilt. Ist $\mathscr{H}$ eine Relation in $\mathbf{L}$, so bezeichnen wir mit $\alpha(\mathscr{H})$ die Relation aller Paare $(\alpha(a), \alpha(b)) \in \mathbf{L}^{*2}$ für $(a, b) \in \mathscr{H}$. Ist $\mathscr{H}^*$ eine Relation in $\mathbf{L}^*$, so bezeichnen wir mit $\alpha^{-1}(\mathscr{H}^*)$ die Relation aller solchen Paare $(a, b) \in \mathbf{L}^2$, daß $(\alpha(a), \alpha(b)) \in \mathscr{H}^*$ ist. Wir sprechen dann von *einem Bild* oder von *einem Urbild* einer Teilmenge bzw. einer Relation *bei dem Homomorphismus* α.

5.6. *Bei jedem Homomorphismus* α *von der l-Halbgruppe* $\mathbf{L}$ *mit einer ganzen l-Halbgruppe* $\mathbf{L}^*$ *ist das Bild sowie das Urbild von jedem l-Ideal bzw. von jeder W-Relation wieder ein l-Ideal bzw. eine W-Relation.*

Beweis ist dem Leser überlassen.

5.7. *Es sei* $\mathscr{W}$ *eine W-Relation in* $\mathbf{L}$ *und* α *der natürliche Homomorphismus von* $\mathbf{L}$ *mit* $\mathbf{L}/\mathscr{W}$ (siehe Satz 4.4). *Dann gilt:*

a) *Ist* $\mathbf{E} \supseteq \varphi(\mathscr{W})$ *ein l-Ideal, so ist* $\alpha^{-1}(\alpha\mathbf{E}) = \mathbf{E}$.

b) *Ist* $\mathscr{W}_1 \supseteq \mathscr{W}$ *eine W-Relation, so ist* $\alpha^{-1}(\alpha\mathscr{W}_1) = \mathscr{W}_1$.

Beweis. Ad a): es sei $\mathbf{E} \supset \varphi(\mathscr{W})$ ein l-Ideal. Ist $a \in \mathbf{E}$ und $x \sim a(\mathscr{W})$, so gibt es ein Element $\varepsilon \in \varphi(\mathscr{W})$ mit $a\varepsilon \leqq x$. Da $a\varepsilon \in \mathbf{E}$ ist, so hat man auch $x \in \mathbf{E}$. Damit ist bewiesen, daß aus $a \in \mathbf{E}$ immer $\alpha^{-1}(\alpha a) \subseteq \mathbf{E}$ folgt. Das bedeutet, daß $\alpha^{-1}(\alpha\mathbf{E}) \subseteq \mathbf{E}$ gilt und wegen der trivialen Beziehung $\mathbf{E} \subseteq \alpha^{-1}(\alpha\mathbf{E})$ bekommen wir $\alpha^{-1}(\alpha\mathbf{E}) = \mathbf{E}$, w. z. b. w.

Ad b): es sei $\mathscr{W}_1 \supseteq \mathscr{W}$ eine W-Relation in $\mathbf{L}$. Nach 5.6 ist $\alpha^{-1}(\alpha\mathscr{W}_1)$ auch eine W-Relation, deren Einheitsklasse offenbar das l-Ideal $\alpha^{-1}(\alpha\varphi\mathscr{W}_1)$ ist. Nach a) gilt $\alpha^{-1}(\alpha\varphi\mathscr{W}_1) = \varphi\mathscr{W}_1$, denn $\varphi(\mathscr{W}_1) \supseteq \varphi(\mathscr{W})$. Nach 4.15 gilt also $\alpha^{-1}(\alpha\mathscr{W}_1) = \mathscr{W}_1$, w. z. b. w.

5.8. Hauptsatz. *Es sei* $\mathbf{L}$ *eine ganze l-Halbgruppe, welche die Maximalbedingung erfüllt. Bezeichnen wir mit* $\mathbf{E}_{\mathbf{L}}$ *die Einheitsklasse der Relation* $\mathscr{W}_{\mathbf{L}} = UP\mathscr{O}_{\mathbf{L}}$ *und mit* $\mathfrak{P}_{\mathbf{L}}$ *die Menge aller Primelemente, die zu* $\mathbf{L} - \mathbf{E}_{\mathbf{L}}$ *gehören. Dann gilt:*

1. *Das System* Θ *von allen W-Relationen der l-Halbgruppe* $\mathbf{L}$ *bildet hinsichtlich seiner Halbordnung nach Inklusion eine Boolsche Algebra, die mit dem System* $\Pi_{\mathbf{L}}$ *aller Teilmengen der Menge* $\mathfrak{P}_{\mathbf{L}}$ *isomorph ist.*

2. *Das System* Θ *ist isomorph auch mit dem halbgeordneten System* Φ *aller l-Ideale, welche das l-Ideal* $\mathbf{E}_{\mathbf{L}}$ *enthalten; dabei tritt jedes l-Ideal* $\mathbf{E} \supset \mathbf{E}_{\mathbf{L}}$ *als Einheitsklasse von genau einer W-Relation auf.*

3. *Das System Θ enthält die Relationen $\mathscr{W}_{\mathbf{L}}$ und $\mathbf{L}^2$ als das kleinste und das größte Element; die Verbands-operationen $\wedge$, $\vee$ sind darin durch die Formeln*

$$\mathscr{W}_1 \wedge \mathscr{W}_2 = \mathscr{W}_1 \cap \mathscr{W}_2, \quad \mathscr{W}_1 \vee \mathscr{W}_2 = U(\mathscr{W}_1 \cup \mathscr{W}_2)$$

gegeben, wobei die Zeichen $\cap$, $\cup$ die mengentheoretischen Operationen bedeuten.

Beweis. Bezeichnen wir mit α den natürlichen Homomorphismus von $\mathbf{L}$ mit $\mathbf{L}/\mathscr{W}_{\mathbf{L}}$. Bezeichnen wir weiter mit Φ^* die Menge aller l-Ideale und mit Θ^* die Menge aller W-Relationen der l-Halbgruppe $\mathbf{L}/\mathscr{W}_{\mathbf{L}}$. Nach Satz 4.14 bedeckt jede Relation $\mathscr{W} \in \Theta$ die Relation $\mathscr{W}_{\mathbf{L}}$. Nach Lemma 5.6 bildet α das System Θ in das System Θ^* ab und α^{-1} bildet das System Θ^* in das System Θ ab. Nach 5.7 gilt für jede Relation $\mathscr{W} \in \Theta$ die Beziehung $\alpha^{-1}(\alpha\mathscr{W}) = \mathscr{W}$ und für jede Relation $\mathscr{W}^* \in \Theta^*$ gilt offenbar die Beziehung $\alpha(\alpha^{-1}\mathscr{W}^*) = \mathscr{W}^*$. Daraus folgt, daß α eine schlichte Abbildung des Systems Θ *auf* das System Θ^* ist und daß α^{-1} ihre Inverse ist. Da die beiden Abbildungen α, α^{-1} monoton sind, so sind die halbgeordneten Systeme Θ, Θ^* isomorph. Ganz analog beweist man, daß die halbgeordneten Systeme Φ, Φ^* isomorph sind.

Wie wir schon gesehen haben, es gilt die gute Arithmetik in der l-Halbgruppe $\mathbf{L}/\mathscr{W}_{\mathbf{L}}$ (Satz 4.9). Nach Satz 5.4 ist Θ^* und folglich Θ eine Boolsche Algebra, welche mit dem System aller Teilmengen der Menge $\mathfrak{P}^*_{\mathbf{L}}$ von unzerlegbaren Klassen der Relation $\mathscr{W}_{\mathbf{L}}$ isomorph ist. Nach 4.11 und 4.12 ist die Menge $\mathfrak{P}^*_{\mathbf{L}}$ von derselben Mächtigkeit, wie $\mathfrak{P}_{\mathbf{L}}$. Damit ist 1 bewiesen.

Nach Satz 5.2 sind Θ^* und Φ^* miteinander isomorph und folglich sind auch die Systeme Θ und Φ miteinander isomorph. Der zugehörige Isomorphismus führt offenbar jede W-Relation $\mathscr{W}$ in ihre Einheitsklasse $\varphi(\mathscr{W})$ über. Damit ist auch 2 bewiesen.

3. Es genügt offensichtlich nur die Formeln für die Verbands-Operationen ableiten. Es seien $\mathscr{W}_1, \mathscr{W}_2 \in \Theta$. Dann ist $\mathscr{W}_1 \cup \mathscr{W}_2$ eine Q-Relation, welche $\mathscr{W}_{\mathbf{L}}$ bedeckt; nach Satz 2.22 ist $U(\mathscr{W}_1 \cup \mathscr{W}_2)$ eine subnormale Q-Relation und nach 3.8 und 4.6 ist sie eine W-Relation. Es ist klar, daß $U(\mathscr{W}_1 \cup \mathscr{W}_2)$ das gesuchte Supremum für $\mathscr{W}_1$ und $\mathscr{W}_2$ ist. Setzen wir weiter $\mathbf{E} = \varphi(\mathscr{W}_1) \cap \varphi(\mathscr{W}_2)$. Dann ist $\mathbf{E}$ ein l-Ideal, für welches $\mathbf{E} \supset \mathbf{E}_{\mathbf{L}}$ gilt und es gibt also eine W-Relation $\mathscr{W}_3$, so daß $\varphi(\mathscr{W}_3) = \mathbf{E}$. Wir haben offenbar $\mathscr{W}_3 \subseteq \mathscr{W}_1 \cap \mathscr{W}_2$. Es sei umgekehrt $a \leqq b(\mathscr{W}_1 \cap \mathscr{W}_2)$; dann gibt es Elemente $\varepsilon \in \varphi(\mathscr{W}_1)$, $\varepsilon' \in \varphi(\mathscr{W}_2)$, so daß $a\varepsilon \leqq b$, $a\varepsilon' \leqq b$ gilt. Daraus folgt $a(\varepsilon \cup \varepsilon') \leqq b$, wobei offenbar $\varepsilon \cup \varepsilon' \in \mathbf{E}$. Ähnlich erweise, es gibt ein Element $\delta \in \mathbf{E}$ mit $\delta a \leqq b$. Es folgt also $a \leqq b(\mathscr{W}_3)$ und wir bekommen $\mathscr{W}_1 \cap \mathscr{W}_2 \subseteq \mathscr{W}_3$. Damit ist bewiesen, daß $\mathscr{W}_1 \cap \mathscr{W}_2$ das gesuchte Infimum für $\mathscr{W}_1$ und $\mathscr{W}_2$ ist.

6. BEISPIELE

Im Satze 5.5 wurde gezeigt, daß in einer l-Halbgruppe mit der guten Arithmetik die Begriffe einer Normalrelation, einer W-Relation und einer Relation des Systems Σ äquivalent sind. Die folgenden Beispiele sollen zeigen, außer anderem, daß sich diese Äquivalenzen im allgemeinen verletzen können.

Beispiel 1. Betrachten wir die Menge $\mathbf{L}$ aller Paare (X, Y) von ganzen nichtnegativen Zahlen. Auf dieser Menge definieren wir eine Multiplikation durch die Formel

(a) $$(X_1, Y_1)(X_2, Y_2) = (X_1 + X_2, Y_1 + Y_2)$$

und eine Halbordnung wie folgt:

(b) $$(X_1, Y_1) \leqq (X_2, Y_2)$$

dann und nur dann, wenn gleichzeitig $X_1 + 2Y_1 \geqq X_2 + 2Y_2$, $X_1 + Y_1 \geqq X_2 + Y_2$ gilt.

Durch die Halbordnung (b) wird $\mathbf{L}$ zu einem Verband. Bezeichnen wir nämlich $A = \min\{X_1 + Y_1, X_2 + Y_2\}$, $B = \min\{X_1 + 2Y_1, X_2 + 2Y_2\}$, $C = \max\{X_1 + Y_1, X_2 + Y_2\}$, $D = \max\{X_1 + 2Y_1, X_2 + 2Y_2\}$, so haben die Paare (X_1, Y_1), (X_2, Y_2) das Supremum $(2A - B, B - A)$ und das Infimum $(2C - D, D - C)$. Hinsichtlich der eben definierten Multiplikation (a) und Verbandsanordnung (b) ist $\mathbf{L}$ eine ganze kommutative und reguläre l-Halbgruppe mit Einselement $(0, 0)$, in welcher die Maximalbedingung erfüllt ist. (Die zugehörigen Distributivgesätze lassen sich leicht verifizieren.) Die l-Halbgruppe $\mathbf{L}$ ist nicht normal: Es gilt $(0, 2) \leqq (1, 1)$, aber es gibt kein Element (X, Y) mit $(0, 2) = (1, 1)(X, Y)$.

Definieren wir die Relationen $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$ durch die Formeln:

$(X_1, Y_1) \leqq (X_2, Y_2)(\mathcal{N}_1)$ dann und nur dann, wenn $X_1 + Y_1 \geqq X_2 + Y_2$ gilt,

$(X_1, Y_1) \leqq (X_2, Y_2)(\mathcal{N}_2)$ dann und nur dann, wenn $X_1 + 2Y_1 \geqq X_2 + 2Y_2$ gilt.

Beide Relationen $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$ sind, wie leicht einzusehen ist, normal. (Es gilt selbstverständlich $\mathcal{N}_1 \supset \mathcal{O}_{\mathbf{L}}$, $\mathcal{N}_2 \supset \mathcal{O}_{\mathbf{L}}$). Die Einheitsklasse jeder von diesen Relationen enthält nur das Element $(0, 0)$. Nach der Definition ist keine der Relationen $\mathcal{N}_1$,$\mathcal{N}_2$ Waerdenisch, denn anders gälte die Gleichung $\mathcal{N}_1 = \mathcal{O}_{\mathbf{L}}$ bzw. $\mathcal{N}_2 = \mathcal{O}_{\mathbf{L}}$. Die Relation $\mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2 = \mathcal{O}_{\mathbf{L}}$ ist nicht normal, also das System Λ von allen Normalrelationen in $\mathbf{L}$ ist kein Verband.

Beispiel 2. Bezeichnen wir mit $\mathbf{L}$ die Menge aller Tripel (X, Y, Z) von ganzen nichtnegativen Zahlen, in der eine einfache Anordnung folgendermaßen definiert ist: man setzt $(X_1, Y_1, Z_1) < (X_2, Y_2, Z_2)$ dann und nur dann, wenn entweder $X_1 + Y_1 > X_2 + Y_2$, oder $X_1 + Y_1 = X_2 + Y_2$, $Z_1 > Z_2$, oder $X_1 + Y_1 = X_2 + Y_2$, $Z_1 = Z_2$, $Y_1 > Y_2$ gilt. Die Multiplikation in $\mathbf{L}$ sei wieder durch Addieren der zugehörigen Komponenten gegeben. Dann ist $\mathbf{L}$ eine einfach angeordnete, kommutative und reguläre ganze l-Halbgruppe mit Einselement $(0, 0, 0)$. In $\mathbf{L}$ gilt die Maximalbedingung.

Betrachten wir eine Relation $\mathcal{W}$, welche folgendermaßen definiert ist: $(X_1, Y_1, Z_1) \leqq (X_2, Y_2, Z_2)(\mathcal{W})$ dann und nur dann, wenn $X_1 + Y_1 \geqq X_2 + Y_2$ gilt. $\mathcal{W}$ ist offenbar eine W-Relation, deren Einheitsklasse aus allen Tripeln von der Form $(0, 0, Z)$, $Z \geqq 0$ besteht. Diese W-Relation kann aber zu dem System Σ nicht gehören. Wirklich, im anderen Fall gäbe es nach 0.15 zu je zwei Elementen $\alpha \sim \beta(\mathcal{W})$, $\alpha, \beta \in \mathbf{L}$ solche

Elemente $\varepsilon, \delta \in \varphi(\mathscr{W})$, daß $\alpha\varepsilon = \delta\beta$ gälte. Das ist aber z. B. für die Elemente $(1,0,0) \sim \sim (0, 1, 0)$ $(\mathscr{W})$ unmöglich.

Einige Probleme. 1. Geben Sie notwendige und hinreichende Bedingungen für eine ganze l-Halbgruppe **L**, damit darin eine von den in 5.5 erwähnten Äquivalenzen eintrete.

2. Geben Sie notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, damit die Menge Λ aller Normalrelationen der l-Halbgruppe **L** einen Verband oder mindestens einen Halbverband bilde.

3. Wie läßt sich in dem System Θ das Teilsystem Σ charakterisieren? Welche ist die algebraische Struktur des Systems Σ? (Alles unter der Voraussetzung der Maximalbedingung in der l-Halbgruppe **L**.)

Literatur

[1] *Г. Биркгоф:* Теория структур. ИЛ, Москва, 1952.
[2] *В. Ходж* и *Д. Пидо*: Методы алгебраической геометрии. Том 3, ИЛ, Москва, 1955.
[3] *N. Jacobson*: The theory of rings. Amer. math. soc., 1943.
[4] *O. Kowalski*: K teorii $\mathfrak{a}$-ideálů v nekomutativních okruzích. Časopis pro pěst. matem., *87* (1962), Praha.
[5] *Е. Г. Шулгейфер:* Разложение на простые множители в структурах с умножением. Украинский математический журнал, том *II*, №, 3, 1950, 100—114.
[6] *B. L. Van der Waerden*: Moderne Algebra, II. Teil. Berlin 1931.

Výtah

K POJMU KVAZIDĚLITELNOSTI V CELÝCH l-POLOGRUPÁCH

OLDŘICH KOWALSKI, Brno

Buď $\mathbf{L}^*$ necelá l-pologrupa, v níž (I): ke každému prvku a existuje inversní prvek a^{-1}, tj. největší z prvků $x \in \mathbf{L}^*$, pro něž $axa \leqq a$; (II): z každého vztahu tvaru $ab \leqq a$ resp. $ca \leqq a$ plyne $b \leqq e$ resp. $c \leqq e$. (e značí jednotkový prvek l-pologrupy.) Potom *relace kvazidělitelnosti* $\precsim$ na l-pologrupě $\mathbf{L}^*$ je definována takto: $a \precsim b$ právě tehdy, když $b^{-1} \leqq a^{-1}$. Je-li **L** celistvá část l-pologrupy $\mathbf{L}^*$, pak relaci kvazidělitelnosti $\precsim$ uvažovanou pouze na množině **L** označujeme symbolem $(\mathbf{L} \to \mathbf{L}^*)$.

Je-li **L** celá l-pologrupa, pak označme písmenem $\mathfrak{N}$ množinu všech necelých l-pologrup $\mathbf{L}^*$ splňujících podmínky (I), (II), pro něž je **L** celistvou částí (v abstraktním smyslu). Systém všech relací tvaru $(\mathbf{L} \to \mathbf{L}^*)$, $\mathbf{L}^* \in \mathfrak{N}$ definovaných v l-pologrupě **L** označujeme Σ.

Kromě systému Σ uvažujeme v **L** systém Λ tzv. *normálních relací* a systém Θ tzv. *Waerdenovských relací.* Waerdenovské relace (v dalším „W-relace“) jsou mezi všemi normálními relacemi charakterisovány vlastností, že $a \precsim b(\mathscr{W})$ právě tehdy, když existují prvky ε, δ ekvivalentní s jednotkovým prvkem v relaci $\mathscr{W}$ takové, že $a\varepsilon \leqq b$, $\delta a \leqq b$.

V práci se dokazují tyto hlavní výsledky:

V libovolné celé l-pologrupě **L** *platí pro základní systémy relací vztah* $\Lambda \supseteqq \Theta \supseteqq \Sigma$ (4.8). *Může však platit* $\Lambda \neq \Theta$, *resp.* $\Theta \neq \Sigma$ (§ 6). *V l-pologrupě s dobrou aritmetikou platí vždy* $\Lambda = \Theta = \Sigma$ (5.5).

Nechť **L** *je celá l-pologrupa, v níž platí maximální podmínka pro řetězce: Potom: Homomorfní obrazy l-pologrupy* **L**, *ve kterých platí dobrá aritmetika, jsou právě všechny faktorové l-pologrupy* $\mathbf{L}/\mathcal{N}$ *podle různých normálních relací* $\mathcal{N} \in \Lambda$ (4.9).

Je-li $\mathcal{W}$ *libovolná W-relace a* $\varphi(\mathcal{W})$ *její jednotková třída, pak každý prvek* $a \in \in \mathbf{L} - \varphi(\mathcal{W})$ *lze psát až na pořadí právě jedním způsobem ve tvaru* $a \sim p_1^{e_1} p_2^{e_2} \ldots \ldots p_k^{e_k}(\mathcal{W})$, *kde* $p_1, p_2, \ldots, p_k$ *jsou navzájem různé prvoelementy z množiny* $\mathbf{L} - - \varphi(\mathcal{W})$ *a* $e_1, e_2, \ldots, e_k$ *jsou kladná čísla* (4.13).

V systému Θ *všech W-relací l-pologrupy* **L** *částečně uspořádaném podle inkluse existuje nejmenší prvek* $\mathcal{W}_{\mathbf{L}}$. (Je popsána konstrukce této „nejmenší" nebo „nejjemnější" W-relace.)

Celková struktura systému Θ je popsána větou: *Označme* $\mathbf{E}_{\mathbf{L}}$ *jednotkovou třídu relace* $\mathcal{W}_{\mathbf{L}}$ *a buď* $\mathfrak{P}_{\mathbf{L}}$ *množina všech prvoelementů patřících k* $\mathbf{L} - \mathbf{E}_{\mathbf{L}}$. *Potom:* 1) *Systém* Θ *všech W-relací l-pologrupy* **L** *tvoří vzhledem k částečnému uspořádání podle inkluse Booleovu algebru isomorfní se systémem* $\Pi_{\mathbf{L}}$ *všech podmnožin množiny* $\mathfrak{P}_{\mathbf{L}}$. 2) *Systém* Θ *je isomorfní také s částečně uspořádaným systémem* Φ *všech l-ideálů obsahujících* $\mathbf{E}_{\mathbf{L}}$; *každý l-ideál* $\mathbf{E} \supset \mathbf{E}_{\mathbf{L}}$ *je jednotkovou třídou právě jedné W-relace* $\mathcal{W} \in \Theta$ (5.8).

Konečně jsou dány některé aplikace na teorii ideálů. Nechť $\mathfrak{C}$ je komutativní obor integrity, který je celistvě uzavřený ve svém podílovém tělese. Potom množina všech nenulových zlomkových ideálů oboru $\mathfrak{C}$ je necelá l-pologrupa $\mathbf{L}^*$ splňující podmínky (I), (II) a „relace kvazidělitelnosti" definovaná na této l-pologrupě je totožná s relací kvazidělitelnosti, kterou zavedl Van der Waerden v teorii ideálů. Nechť dále platí v $\mathfrak{C}$ maximální podmínka pro řetězce celých ideálů. Označíme-li **L** množinu všech celých ideálů z $\mathbf{L}^*$, potom relace $(\mathbf{L} \leftarrow \mathbf{L}^*)$ je totožná s nejmenší W-relací $\mathcal{W}_{\mathbf{L}}$. Tím je novým způsobem charakterisována relace kvazidělitelnosti na množině celých ideálů oboru $\mathfrak{C}$ a to v pojmech této množiny samotné. Je odvozen také obdobný ale obecnější výsledek pro $\mathfrak{o}$-ideály nekomutativních okruhů, splňujících určité doplňující podmínky.

Резюме

К ПОНЯТИЮ КВАЗИДЕЛИМОСТИ В ЦЕЛЫХ l-ПОЛУГРУППАХ

ОЛДРЖИХ КОВАЛЬСКИ (Oldřich Kowalski), Брно

Пусть $\mathbf{L}^*$ — нецелая l-полугруппа, в которой (I): для всякого элемента a имеется обратный элемент a^{-1}, т. е. наибольший из элементов $x \in \mathbf{L}^*$ выполняющих неравенство $axa \leqq a$; (II): из всякого соотношения $ab \leqq a$ или

$ca \leqq a$ следует $b \leqq e$ или $c \leqq e$. (e обозначает единицу l-полугруппы). Тогда мы оперделим на $\mathbf{L}^*$ *отношение квазиделимости* $\preceq$, полагая $a \preceq b$ всегда, когда имеет место неравенство $b^{-1} \leqq a^{-1}$. Если $\mathbf{L}$ — целая компонента l-полугруппы $\mathbf{L}^*$, то отношение квазиделимости, обсуждаемое на множестве $\mathbf{L}$ обозначим $(\mathbf{L} \leftarrow \mathbf{L}^*)$.

Пусть $\mathbf{L}$ — целая l-полугруппа; тогда обозначим через $\mathfrak{N}$ множество всех нецелых l-полугрупп $\mathbf{L}^*$, удовлетворяющих условиям (I), (II), для которых $\mathbf{L}$ является целой компонентой (в абстрактном смысле). Систему всех отношений вида $(\mathbf{L} \leftarrow \mathbf{L}^*)$, $\mathbf{L}^* \in \mathfrak{N}$, определенных в $\mathbf{L}$ обозначим Σ. Кроме системы Σ мы занимаемся системой Λ т. наз. нормальных отношений и системой Θ т. наз. *отношений Вардена* в l-полугруппе $\mathbf{L}$. Отношения Вардена (в дальнейшем „W-отношения") выделяются среди нормальных отношений на основе следующего свойства: $a \leqq b(\mathscr{W})$ тогда и только тогда, когда имеются элементы ε, δ эквивалентные с единицей в отношении $\mathscr{W}$ такие, что $a\varepsilon \leqq b$, $\delta a \leqq b$.

В настоящей статье доказываются следующие главные предложения:

В любой целой l-полугруппе $\mathbf{L}$ имеет место соотношение $\Lambda \supseteq \Theta \supseteq \Sigma$ (4.8). *Притом возможен случай* $\Lambda \neq \Theta$ *и также* $\Theta \neq \Sigma$ (§ 6).

В l-полугруппе, в которой имеет место хорошая арифметика, выполняется всегда равенство $\Lambda = \Theta = \Sigma$ (5.5).

Пусть $\mathbf{L}$-целая l-полугруппа, в которой выполнено условие максимальности для цепей: Тогда:

Гомоморфные образы l-полугруппы $\mathbf{L}$, в которых имеет место хорошая арифметика, совпадают точно со всеми фактор-l-полугруппами $\mathbf{L}/\mathscr{N}$ по различным нормальным отношениям $\mathscr{N} \in \Lambda$ (4.9).

Если $\mathscr{W}$-любое W-отношение и $\varphi(\mathscr{W})$ — его единичный класс, то всякий элемент $a \in \mathbf{L} - \varphi(\mathscr{W})$ можно выразить однозначно с точностью до порядка в виде $a \sim \sim p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}(\mathscr{W})$, где $p_1, p_2, \dots, p_k$ — взаимно различные простые элементы из множества $\mathbf{L} - \varphi(\mathscr{W})$ и $e_1, e_2, \dots, e_k$ — положительные числа (4.13).

В системе Θ всех W-отношений l-полугрипы $\mathbf{L}$, частично упорядоченной относительно включения, имеется наимельший элемент $\mathscr{W}_{\mathbf{L}}$. (Описано построение этого „наименьшего" или „самого тонкого" W-отношения.)

Общее строение системы Θ описано в предложении: *Обозначим через $\mathbf{E}_{\mathbf{L}}$ единичный класс отношения $\mathscr{W}_{\mathbf{L}}$ и через $\mathfrak{P}_{\mathbf{L}}$ множество всех простых элементов, принадлежащих к $\mathbf{L} - \mathbf{E}_{\mathbf{L}}$. Тогда* 1. *Система Θ всех W-отношений l-полугруппы $\mathbf{L}$, частично упорядоченная относительно включения, образует булеву алгебру, изоморфную системе $\Pi_{\mathbf{L}}$ всех подмножеств множества $\mathfrak{P}_{\mathbf{L}}$.* 2. *Система Θ изоморфна тоже частично упорядоченной системе Φ всех l-идеалов, включающих в себя $\mathbf{E}_{\mathbf{L}}$; притом всякий l-идеал $\mathbf{E} \supset \mathbf{E}_{\mathbf{L}}$ является единичным классом точно одного W-отношения $\mathscr{W} \in \Theta$* (5.8).

Наконец, показаны некоторые применения к теории идеалов. Пусть $\mathfrak{C}$-коммутативная область целостности, целозамкнутая в своем поле частных. Тогда множество $\mathbf{L}^*$ всех ненулевых дробных идеалов области $\mathfrak{C}$ есть нецелая l-полугруппа, в которой выполнены условия (I), (II) и „отношение квазиделимости", определенное на этой l-полугруппе, совпадает с отношением квазиделимости, введенным Ван дер Варденом в теории идеалов. Пусть, далее, в $\mathfrak{C}$ имеет место условие максимальности для цепей целых идеалов. Если обозначим через $\mathbf{L}$ множество всех целых идеалов из $\mathbf{L}^*$, то отношение $(\mathbf{L} \leftarrow \mathbf{L}^*)$ совпадает с наименьшим W-отношением $\mathscr{W}_{\mathbf{L}}$. Этим дана новая характеристика отношения квазиделимости для целых идеалов области $\mathfrak{C}$ только при помощи понятий, связанных с этим множеством идеалов. Выведен тоже родственный, но более общий результат для $\mathfrak{o}$-идеалов некоммутативных колец, подчиненных определенным условиям.