Časopis pro pěstování matematiky

Jaroslav Kurzweil

К линейной теории оптимального управления

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 89 (1964), No. 1, 90--101

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117484

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 89 (1964), Praha

К ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

ЯРОСЛАВ КУРЦВЕЙЛЬ (Jaroslav Kurzweil), Прага

(Поступило в редакци, 3/XII 1962 г., в переработанной форме 1/III 1963 г.)

В монографии [1] доказаны теоремы об единственности и строении оптимального управления линейной системы по времени в случае, когда U — выпуклый многогранник. Эти результаты распространяются на случай, когда U — пересечение равномерно выпуклого множества и выпуклого многогранника, и некоторые другие случаи.

1. Рассмотрим задачу оптимального управления по времени для системы

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax + Bu\,, \tag{1}$$

где $x \in E_n$, $u \in U \subset E_s$, $A(B)$ – действительная матрица типа $n \times n$ $(n \times s)$. Задача оптимального управления по времени состоит в том, чтобы для заданных точек $x_1, x_2, \in E_n$ отыскать функцию $u(t)$, определенную для $0 \leqq t \leqq T$ и удовлетворяющую условиям:

(i) $u(t)$ – интегрируемая функция и $u(t) \in U$ для $t \in \langle 0, T \rangle$,

(ii) если $x(t)$ – решение системы (1), где вметсо u подставлена функция $u(t)$ и $x(0) = x_1$, то $x(T) = x_2$,

(iii) если $u_1(t)$, $0 \leqq t \leqq T_1$, удовлетворяет условиям (i), (ii), то $T_1 \geqq T$.

В этих условиях $u(t)$ называется *оптимальным управлением.*

Пусть U представимо в виде $U = R \cap V$, где $R \subset E_s$ является выпуклым компактным многогранником и $V \subset E_s$ является равномерно выпуклым множеством. (Компактное выпуклое множество $V \subset E_s$ назовем равномерно выпуклым, если его граница не содержит никакого невырожденного отрезка.) Пусть U обладает внутренней точкой в E_s, и пусть выполняется следующее предположение об общем положении множества U:

Если некоторая грань r многогранника R, содержащая более чем одну точку, пересекает внутренность множества V, то линейная оболочка системы всех векторов вида $A^j B v$, где $v = u_2 - u_1$, u_1, $u_2 \in r$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$, совпадает с E_n.

Подмножество F замкнутого выпуклого множества W называется *крайним*, если из $u \in F$, $u = \alpha u_1 + (1 - \alpha) u_2$, $0 < \alpha < 1$, $u_1, u_2 \in W$ следует $u_1, u_2 \in F$. Крайнее множество, состоящее из одной точки называется, *крайней точкой*. Всякая крайняя точка множества U является или вершиной многогранника R или граничной точкой множества V.

Теорема 1. (α) *Если* $u_1(t)$, $0 \leqq t \leqq T_1$ *и* $u_2(t)$, $0 \leqq t \leqq T_2$ — *оптимальные управления, соответствующие заданным* x_1 *и* x_2, *то* $T_1 = T_2$ *и* $u_1(t) = u_2(t)$ *почти всюду.*

(β) *Изменяя* $u_1(t)$ *на множестве меры нуль, можно добиться того, что* $u_1(t)$ *непрерывна за исключением конечного числа внутренних точек интервала* $\langle 0, T_1 \rangle$. *В этих точках существуют пределы справа и слева.*

(γ) *Значениями функции* $u_1(t)$ *в точках непрерывности и предельными значениями в точках разрыва являются только крайние точки множества* U.

Доказательство теоремы 1 проведем в нескольких шагах. Через (ξ, η) будем обозначать скалярное произведение векторов ξ, η из E_n или из E_s. Пусть W — непустое компактное подмножество в E_s. Положим

$$P_W(z) = \max_{u \in W} (z, Bu), \; z \in E_n \quad \text{и} \quad \tilde{P}_W(v) = \max_{u \in W} (v, u), \; v \in E_s .$$

Очевидно,

$$(2) \qquad (z, Bu) = (B'z, u), \quad P_W(z) = \tilde{P}_W(B'z),$$

где B' — транспонированная матрица к B.

Лемма 1. *Функция* $\tilde{P}_W(v)$ *непрерывна.*

Доказательство. Допустим, что $\lim \tilde{P}_W(v_k) \neq \tilde{P}_W(v)$ для некоторой последовательности $\{v_k\}$, $v_k \to v$. Переходя к подпоследовательности, добиваемся того, что $\tilde{P}_W(v_k) = (v_k, u_k)$, $u_k \to \tilde{u}$. Очевидно,

$$\tilde{P}_W(v_k) = (v_k, u_k) \to (v, \tilde{u}) \neq \tilde{P}_W(v) = (v, u^*) .$$

Из определения $\tilde{P}_W(v)$ следует, что $(v, \tilde{u}) < \tilde{P}_W(v) = (v, u^*)$; но в таком случае $\tilde{P}_W(v_k) = (v_k, u_k) < (v_k, u^*)$ для достаточно больших k, и получаем противоречие с определением $\tilde{P}_W(v_k)$.

Как следует из принципа максимума, для оптимального управления $u_1(t)$ существует $\psi_1 \in E_n$, $\psi_1 \neq 0$ так, что

$$(3) \qquad (e^{-A't}\psi_1, Bu_1(t)) = P_U(e^{-A't}\psi_1)$$

почти всюду (A' — транспонированная матрица к A). Обозначим через S множество таких чисел σ, что

$$P_U(e^{-A'\sigma}\psi_1) = (e^{-A'\sigma}\psi_1, B\tilde{u}_1) = (e^{-A'\sigma}\psi_1, B\tilde{u}_2)$$

для подходящих $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2 \in U$, $\tilde{u}_1 \neq \tilde{u}_2$.

Лемма 2. *Множество S не обладает предельной точкой в E_1.*

Доказательство. Пусть $\sigma \in S$ и

$$P_U(e^{-A'\sigma}\psi_1) = (e^{-A'\sigma}\psi_1, B\tilde{u}_1) = (e^{-A'\sigma}\psi_1, B\tilde{u}_2), \tilde{u}_1, \tilde{u}_2 \in U, \quad \tilde{u}_1 \neq \tilde{u}_2.$$

Отрезок J, состоящий из точек $\alpha\tilde{u}_1 + (1-\alpha)\tilde{u}_2$, $0 < \alpha < 1$, является частью внутренности множества V (так как V – равномерно выпуклое множество) и одновременно является частью некоторой грани r многогранника R. [1]) Пусть H – минимальная плоскость, содержащая r. (Подмножество в E_s называем плоскостью, если оно с каждой парой разных точек содержит и прямую, проходящую через эти точки.) Так как r открыто относительно H, то

$$P_U(e^{-A'\sigma}\psi_1) = (e^{-A'\sigma}\psi_1, u) \text{ для } u \in r.$$

Пусть существует последовательность $\{\sigma_k\}$, $\sigma_k \in S$, $\sigma_k \to \sigma$ для $k \to \infty$. Переходя к подходящей подпоследовательности, найдем такую грань r, что $P_U(e^{-A'\sigma_k}\psi_1) = (e^{-A'\sigma_k}\psi_1, Bu)$ для $u \in r$, значит, $(e^{-A'\sigma_k}\psi_1, Bv) = 0$, где $v = u_2 - u_1$, $u_1, u_2 \in r$. Следовательно, функция $(e^{-A'\tau}\psi_1, Bv)$ обращается в нуль в точке $\tilde{\sigma}$ вместе с производными

$$\frac{d^j}{d\tau^j}(e^{-A'\tau}\psi_1, Bv) = (e^{-A'\tau}\psi_1, A^jBv), \quad j = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Полученное противоречие с предположением общего положения доказывает лемму 2.

Лемма 3. *Пусть функция $v(t)$ со значениями в E_s определена и непрерывна на множестве $Q \subset \mathbf{E}_1$. Пусть для каждого $t \in Q$ функция $(v(t), u)$ переменного u достигает своего максимума на W в единственной точке $u(t) \in W$. Тогда функция $u(t)$ непрерывна на Q.*

Доказательство получается без затруднений при помощи факта, что по лемме 1 $\tilde{P}_W$ – непрерывная функция.

Лемма 4. *Пусть функция $q(t) = (q_1(t), \ldots, q_\nu(t))$ является аналитической в окрестности точки σ и $q(\sigma) = 0$, $q(t) \not\equiv 0$. Положим.*

$$\|q(t)\| = [q_1^2(t) + \ldots + q_\nu^2(t)]^{1/2}, \quad p(t) = q(t) \,.\, \|q(t)\|^{-1}.$$

Тогда существуют пределы $\lim\limits_{t\to\sigma+0} p(t) = p(\sigma - 0)$ *и* $\lim\limits_{t\to\sigma+0} p(t) = p(\sigma + 0)$.

[1]) Следуя терминологии, введеной в [3], добавление II, § 3, гранями многогранника R считаем внутренность многогранника R, некоторые открытые многогранники (размерности которых не превосходят s — 1) и вершины многогранника R. Никакие две грани многогранника R не пересекаются, и многогранник R является объединением своих граней. Для доказательства леммы 2 достаточно, чтобы некоторый отрезок, являющийся частью отрезка $\langle \tilde{u}_1, \tilde{u}_2 \rangle$, содержался в некоторой грани r многогранника R.

Доказательство. Пусть $q_k(t) = (t - \sigma)^{\varrho_k} \vartheta_k(t)$, $\varrho_k \geqq 1$, $\vartheta_k(\sigma) \neq 0$. Положим $p_k(t) = q_k(t) \,.\, \|q(t)\|^{-1}$, $\varrho = \min_k \varrho_k$. Так как существует предел $\lim_{t \to \sigma} \|q(t)\| \,.\, |t - \sigma|^{-\varrho} \neq 0$, то существуют пределы $p(\sigma - 0)$, $p(\sigma + 0)$.

Доказательство теоремы 1. Пусть $u_1(t), 0 \leqq t \leqq T_1$ и $u_2(t), 0 \leqq t \leqq T_2$ – оптимальные управления. По определении оптимальности $T_1 = T_2$. Как следует из принципа максимума, существует такое $\psi_1 \in E_n$, $\psi_1 \neq 0$, что выполняется (3) почти всюду. Так как

$$x_2 = e^{AT_1}\left(x_1 + \int_0^{T_1} e^{-A\tau} B u_1(\tau)\, \mathrm{d}\tau\right) = e^{AT_1}\left(x_1 + \int_0^{T_1} e^{-A\tau} B u_2(\tau)\, \mathrm{d}\tau\right),$$

то

$$(\psi_1, e^{-AT_1}x_2 - x_1) = \int_0^{T_1} (e^{-A'\tau}\psi_1, Bu_1(\tau))\, \mathrm{d}\tau = \int_0^{T_1} (e^{-A'\tau}\psi_1, Bu_2(\tau))\, \mathrm{d}\tau\,.$$

Но так как почти всюду

$$(e^{-A'\tau}\psi_1, Bu_1(\tau)) = P(e^{-A'\tau}\psi_1) \geqq (e^{-A'\tau}\psi_1, Bu_2(\tau))\,,$$

то

$$P(e^{-A'\tau}\psi_1) = (e^{-A'\tau}\psi_1, Bu_1(\tau)) = (e^{-A'\tau}\psi_1\psi_1, Bu_2(\tau))$$

почти всюду. Но если τ не принадлежит S, то из последнего равенства следует $u_1(\tau) = u_2(\tau)$ и из леммы 2 вытекает справедливость части (α) теоремы 1.

Пусть $\sigma_1 < \sigma_2 < \ldots < \sigma_l$ – все точки множества $S \cap \langle 0, T_1 \rangle$ (см. лемму 2). Изменяя функцию $u_1(t)$ на множестве меры нуль, можно добиться того, что (3) имеет место для каждого $t \neq \sigma_i$, $i = 1, 2, \ldots, l$. Из леммы 3 и из (2) следует, что функция $u_1(t)$ непрерывна в каждой точке $t \neq \sigma_i$, $i = 1, 2, \ldots, l$.

Пусть $\sigma_i > 0$; докажем существование предела $u(\sigma_i - 0)$. Пусть $r_1, r_2, \ldots, r_\beta$ – все грани многогранника R и пусть Q_j – множество таких $t \in (\sigma_{i-1}, \sigma_i)$, что $u_1(t) \in r_j$, $j = 1, 2, \ldots, \beta$ (если $i = 1$, положим $\sigma_0 = 0$). Так как грани $r_1, r_2, \ldots, r_\beta$ не пересекаются и $\bigcup_{j=1}^{\beta} r_j = R$, то Q_j – непересекающиеся множества и $\bigcup_{j=1}^{\beta} Q_j = (\sigma_{i-1}, \sigma_i)$. Пусть r_j является ν-мерной гранью, $\nu \geqq 1$ и σ_i является предельной точкой множества Q_j. Пусть $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_\nu$ такие точки грани r_j, что векторы $\eta_1 = \zeta_1 - \zeta_0 \neq 0, \ldots, \eta_\nu = \zeta_\nu - \zeta_0 \neq 0$ ортогональны. Пусть H_j – множество всех $u \in E_s$, представимых в виде $u = \zeta_0 + \alpha_1\eta_1 + \ldots + \alpha_\nu\eta_\nu$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu$ – любые числа. r_j является открытым множеством в H_j. Положим $V_j = V \cap H_j$. V_j – непустое множество, так как $u_1(t) \in V_j$ для $t \in Q_j$ и V_j – равномерно выпуклое множество (относительно H_j). Пусть функция $\tilde{u}_j(t)$ удовлетворяет соотношению

$$(B'e^{-A't}\psi_1,\ \tilde{u}_j(t)) = \max_{u \in V_j} (B'e^{-A't}\psi_1,\ u)\,, \tag{4}$$

$$\tilde{u}_j(t) \in V_j\,, \quad t \in (\sigma_{i-1}, \sigma_i)\,.$$

Если $t \in Q_j$. то $u_1(t) \in V_j$ и $(B'e^{-A't}\psi_1,\ \tilde{u}_j(t)) \geqq B'e^{-A't}\psi_1,\ u_1(t))$.
Но если бы было $(B'e^{-A't}\psi_1,\ \tilde{u}_j(t)) > (B'e^{-A't}\psi_1, u_1(t))$, то было бы

$$(B'e^{-A't}\psi_1,\ u_1(t) + \alpha(\tilde{u}_j(t) - u_1(t)) > (B'e^{-A't}\psi_1, u_1(t))$$

для $\alpha > 0$, и так как грань r_j открыта в H_j, то для достаточно малых $\alpha > 0$ было бы $\alpha(\tilde{u}_j(t) - u_1(t)) + u_1(t) \in r_j \subset R$; но, очевидно $\alpha(\tilde{u}_j(t) - u_1(t)) + u_1(t) \in V$, значит, $\alpha(\tilde{u}_j(t) - u_1(t)) + u_1(t) \in U$, и получаем противоречие с соотношением (3). Итак,

$$(B'e^{-A't}\psi_1,\ \tilde{u}_j(t)) = (B'e^{-A't}\psi_1,\ u_1(t)), \quad t \in Q_j.$$

Если бы было $\tilde{u}_j(t) \neq u_1(t)$, то

$$(B'e^{-A't}\psi_1,\ \alpha(\tilde{u}_j(t) - u_1(t)) + u_1(t)) = (B'e^{-A't}\psi_1,\ u_1(t))$$

для всех α. Но так как $\alpha(\tilde{u}_j(t) - u_1(t)) + u_1(t) \in U$ для малых α не принадлежит S, то получается противоречие. Итак, мы доказали, что $\tilde{u}_j(t) = u_1(t)$ для $t \in Q_j$ (значит, для $t \in Q_j$ функция $\tilde{u}_j(t)$ определена однозначно).

Пусть D_j — множество точек вида $u = \alpha_1\eta_1 + \alpha_2\eta_2 + \ldots + \alpha_\nu\eta_\nu$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ $\ldots, \alpha_\nu$ — любые числа. D_j, очевидно, является ν-мерным подпространством в E_s. Каждой точке $u \in V_j$ сопоставим точку $u - \xi_0 \in D_j$; множество V_j отображается на равномерно выпуклое множество $V_j^* \subset D_j$. Функция $u^*(t) = u_j(t) - \xi_0$ удовлетворяет соотношению

(5)
$$(B'e^{-A't}\psi_1,\ u_j^*(t)) = \max_{u \in V_j^*} (B'e^{-A't}\psi_1,\ u),$$
$$u_j^*(t) \in V_j^*, \quad t \in (\sigma_{i-1}, \sigma_i).$$

Положим

$$q(t) = (B'e^{-A't}\psi_1, \eta_1)\ \|\eta_1\|^{-2}\ \eta_1 + \ldots + (B'e^{-A't}\psi_1, \eta_\nu)\ \|\eta_\nu\|^{-2}\ \eta_\nu.$$

Так как $(q(t), u) = (B'e^{-A't}\psi_1, u)$ для $u \in D_j$, соотношение (5) можно заменить соотношением

(6)
$$(q(t), u_j^*(t)) = \max_{u \in V_j^*} (q(t), u), \quad u_j^*(t) \in V_j^*, \quad t \in (\sigma_{i-1}, \sigma_i).$$

Очевидно, $q(t) \in D_j$ и $q(t)$ является аналитической целой функцией. $q(t) \not\equiv 0$, так как для $t \in Q_j$ соотношение (6) определяет функцию $u_j^*(t)$ единственным образом. Если $q(\sigma_i) \neq 0$, определим $u_j^*(t)$ и для $t = \sigma_i$ соотношением (6). Ввиду равномерной выпуклости множества V_j^* функция $u^*(t)$ определена соотношением (6) единственным образом в каждой точке t, где $q(t) \neq 0$. По лемме 3 функция $u_j^*(t)$ непрерывна в точке σ_i. Если $q(\sigma_i) = 0$, то по лемме 4 функция $p(t) = q(t) \,.\, \|q(t)\|^{-1}$ обладает пределом $\lim\limits_{t \to \sigma_i - 0} p(t) = p(\sigma_i - 0)$. Так как $\|p(t)\| = 1$, то $p(\sigma_i - 0) \neq 0$. Соорношение (6), очевидно, заменяется соотношением

(7)
$$(p(t), u_j^*(t)) = \max_{u \in V_j^*} (p(t), u), \quad u_j^*(t) \in V_j^*$$

для всех $t \in (\sigma_{i-1}, \sigma_i)$, где $q(t) \neq 0$. Определяя $p(\sigma_i) = p(\sigma_i - 0)$ и определяя $u_j^*(\sigma_j)$ соотношением (7) получаем по лемме 3 как и раньше, что функция $u_j^*(t)$ непрерывна в точке σ_i. Так как $u_j^*(t) + \xi_0 = u_1(t)$ для $t \in Q_j$, то существует предел $\lim u_1(t)$ для $t \to \sigma_i - 0$, $t \in Q_j$, если σ_i — предельная точка множества Q_j и $\nu \geqq 1$, где ν — размерность грани r_j. Если $\nu = 0$, и σ_i — предельная точка множества Q_j, то предел $\lim u_1(t)$, $t \to \sigma_i - 0$, $t \in Q_j$, очевидно, существует, так как $u_1(t)$ является постоянной на Q_j. Но $(\sigma_{i-1}, \sigma_i) = Q_1 \cup Q_2 \cup \ldots \cup Q_\beta$ и $u_1(t)$ непрерывна на (σ_{i-1}, σ_i), следовательно, существует предел $\lim\limits_{t \to \sigma_i - 0} u_1(t)$, так как множество предельных точек ограниченной непрерывной функции связно. Аналогично, существует предел $\lim\limits_{t \to \sigma_i + 0} u_1(t)$. Этим ($\beta$) доказано.

Так как $u_1(t)$ определяется единственным образом из (3) для t, непринадлежащих S, то $u_1(t)$ является крайней точкой множества U. Не трудно проверить, что множество крайних точек множества U замкнуто; следовательно, значения $u_1(\sigma_i - 0)$, $u_1(\sigma_i + 0)$ являются крайними точками-(γ) доказано.

Замечание 1. Если $r \geqq n$, ранг $B = n$ и U — равномерно выпуклое множество, то $B'e^{-A't}\psi$ есть ненулевой вектор для всякого t и S — пустое множество. Каждое оптимальное управление $u_1(t)$ является непрерывной функцией.

Замечание 2. Управление $u_1(t)$, $0 \leqq t \leqq T$ назовем *экстремальным*, если оно удовлетворяет соотношению (3) при некотором ψ_1 и всех $t \in \langle 0, T_1)$. Мы доказали, что каждому $\psi_1 \neq 0$ соответствует единственное экстремальное управление и что для этого управления спарведливы утверждения (β) и (γ) теоремы 1.

2. В монографии [1], § 17 доказнао, что число точек разрыва любого экстремального управления (см. замечание 2) не больше чем $(n - 1)\varrho$, если все собственные числа матрицы A действительны и если U представляет собой параллелепипед; при этом ϱ — размерность параллелепипеда U. Покажем, как этот результат распространяется на случай, исследованный в абзаце 1.

Каждой грани $r_j, j \in J = \{1, 2, \ldots, \beta_1\}$, пересекающей внутренность множества V и содержащей больше чем одну точку, сопоставим подпространство $D_j \subset E_s$ как в абзаце 1 через D обозначим систему всех D_j, $j \in J$. Пусть I — такое минимальное подмножество множества J, что всякое D_j, $j \in J$ содержит некоторое D_i, $i \in I$. Обознаичм через ϱ число элементов множества I.

Теорема 2. *Пусть все собственные числа матрицы A действительны и пусть выполнены предположения абзаца* 1. *Тогда число точек разрыва любого экстремального управления не превосходит* $(d - 1)\varrho$, *где* d — *степень минимального полинома матрицы* A.

Доказательство. Пусть $u_1(t)$ — экстремальное управление и σ — точка разрыва управления $u_1(t)$. Таким же образом, как в доказательстве леммы 2, найдем грань r_j, пересекающую внутренность множества V и содержащую больше чем одну точку, что $P_U(e^{-A'\sigma}\psi_1) = (e^{-A'\sigma}\psi_1, u)$ для $u \in r_j$. Пусть $D_i \subset D_j$,

$i \in I$. Тогда $(e^{-A'\sigma}\psi_1, v) = 0$ для $v \in D_i$, но по условию общего положения существует такое $\tilde{v} \in D_i$, что $(e^{-A'\tau}\psi_1, \tilde{v}) \not\equiv 0$. Функцию $(e^{-A'\tau}\psi_1, \tilde{v})$ можно записать в виде

$$(e^{-A'\tau}\psi_1, \tilde{v}) = p_1(\tau)\, e^{\lambda_1\tau} + p_2(\tau)\, e^{\lambda_2\tau} + \ldots + p_\mu(\tau)\, e^{\lambda_\mu\tau},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu$ – все собственные числа матрицы A и $p_1(\tau), p_2(\tau), \ldots, p_\mu(\tau)$ – полиномы, степени которых не превосходят d. Из леммы, доказанной в [1], § 17, следует, что число нулевых точек функции $(e^{-A'\tau}\psi_1, \tilde{v})$ не больше чем $d - 1$. Так как для заданного ψ_1 в каждом D_i можно выбрать одно $\tilde{v}$, то доказательство теоремы 2 завершено.

3. Пусть выполнены следующие предположения:

(C_1) $U \subset E_s$ – компактное выпуклое множество, содержащее 0 в качетсве внутренней точки,

(C_2) линейная оболочка системы векторов A^jBv, $v \in E_s$, $j = 0, 1, \ldots, n - 1$ совпадает с E_n.

Положим $x_2 = 0$ и обозначим для $T_1 > 0$ через Σ_{T_1} множество таких точек $x_1 \in E_n$, для которых задача оптимального управления по времени разрешима и время оптимального управления $T \leqq T_1$. Не трудно показать, что Σ_{T_1} – выпуклое компактное множество и O – внутренняя точка множества Σ_{T_1}. Плоскость $(\psi, x) = \gamma$ назовем *опорной плоскостью* компактного выпуклого множества $W \in E_n$, если $(\psi, x) \geqq \gamma$ для $x \in W$ и если существует такое $y \in W$, что $(\psi, y) = \gamma$.

Теорема 3. *Плоскость $(\psi, x) = \gamma$ является опорной плоскостью множества Σ_{T_1} и точка y является общей точкой плоскости $(\psi, x) = \gamma$ и множества Σ_{T_1} тогда и только тогда, если y представимо в виде*

$$y = -\int_0^{T_1} e^{-A\tau}Bu(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{8}$$

$$P_U(e^{-A'\tau}\psi) = (e^{-A'\tau}\psi, u(\tau)), \quad u(\tau) \in U \tag{9}$$

почти всюду на $\langle 0, T_1\rangle$ и $(\psi, y) = \gamma$.

Доказательство. Пусть $(\psi, x) = \gamma$ является опорной плоскостью множества Σ_{T_1} и точка y является общей точкой плоскости $(\psi, x) = \gamma$ и множества Σ_{T_1}. Так как выражение $e^{At}(x_1 + \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)\,\mathrm{d}\tau)$ представляет собой решение уравнения (1), то каждую точку x_1 множества Σ_{T_1} можно представить в виде $x_1 = -\int_0^{T_1} e^{-A\tau}B\tilde{u}(\tau)\,\mathrm{d}\tau$, $\tilde{u}(\tau)$ – измеримая функция, $u(\tau) \in U$ почти всюду. Значит,

$$-(\psi, x_1) = \int_0^{T_1} (e^{-A'\tau}\psi, B\tilde{u}(\tau))\,\mathrm{d}\tau.$$

Очевидно, (ψ, x_1) — где $x_1 \in \Sigma_{T_1}$ — не достигает своего минимального значения γ, если

$$P_U(e^{-A'\tau}\psi) \neq (e^{-A'\tau}\psi, \tilde{u}(\tau))$$

на некотором подмножестве интервала $\langle 0, T_1 \rangle$ положительной меры. Итак, для точки y выполняется (8) и (9). Обратное утверждение почти очевидно.

Следствие. *Если для каждого* $\psi \neq 0$, $\psi \in E_n$ *функция* $u(\tau)$ *определяется из* (9) *единственным образом для почти всех* τ, *то* Σ_{T_1} *— равномерно выпуклое множество. В частности,* Σ_{T_1} *является равномерно выпуклым множеством, если выполнены предположения из абзаца* 1.

(Если граница множества Σ_{T_1} содержит отрезок M, состоящий из точек $\alpha y_1 + (1-\alpha) y_2$, $0 \leqq \alpha \leqq 1$, $y_1 \neq y_2$, то опорная плоскость множества Σ_{T_1}, содержащая точку $\frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ содержит M. Так как соотношение (9) определяет однозначно функцию $u(t)$ почти всюду, то каждая опорная плоскость имеет только одну общую точку с множеством Σ_{T_1}, значит $y_1 = y_2$.)

4. Если ограничиться только несколько более слабыми утверждениями, то класс допустимых множеств U может быть расширен. Пусть U — компактное выпуклое множество, обладающее внутренной точкой в E_s. Каждому выпуклому крайнему подмножеству Z_j, содержащему больше чем одну точку ($j \in J$, J — некоторое множество) сопоставим пространство D_j, являющееся линейной оболочкой системы векторов $v = u_2 - u_1$, $u_1, u_2 \in Z_j$ (значит, $D_j = E_s$ для некоторого $j \in J$). Подмножество $I \subset J$ определим как в абзаце 2. Легко проверить, что пересечение опорной плоскости и множества U является выпуклым крайним множеством. Допустим, что множество I не более чем счетно и что для любого $i \in I$ линейная оболочка системы векторов $A^k Bv$, $v \in D_i$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ совпадает с E_n. Если ввести множество S как в абзаце 1, то не трудно показать, что множество S не более чем счетно, значит, управление $u_1(t)$ определено соотношением (3) однозначно на дополнении Q множества S в интервале $\langle 0, T_1 \rangle$. По лемме 3 $u_1(t)$ является непрерывной функцией на Q. Отсюда как и раньше выводится единственность оптимального управления $u_1(t)$. Если I — конечное множество, то S не обладает предельной точкой в E_1, но не ясно, существуют ли вообще пределы $u_1(\sigma_i - 0)$, $u_1(\sigma_i + 0)$, $\sigma_i \in S$. Если собственные числа матрицы A действительны, то для числа точек множества S имеет место оценка из абзаца 2.

ДОБАВЛЕНИЕ*)

Пусть X_1, X_2 — заданные выпуклые замкнутые подмножества в E_n, $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, и пусть $U \subset E_s$. Рассмотрим следующую более общую задачу оптимального управления по времени, которая состоит в том, чтобы отыскать точку

*) Поступило в редакцию 14. октября 1963 г.

$x_1 \in X_1$ и функцию $u(t)$, определенную для $t \in \langle 0, T \rangle$, $T > 0$, так, чтобы удовлетворялись следующие условия:

(i) $u(t)$ — интегрируемая функция и $u(t) \in U$ для $t \in \langle 0, T \rangle$,

(ii') если $x(t)$ — решение системы (1), где вместо u подставлена уфнкция $u(t)$, и $x(0) = x_1$, то $x(T) \in X_2$,

(iii') если точка $\tilde{x}_1 \in X_1$ и функция $\tilde{u}(t)$, $0 \leqq t \leqq \tilde{T}$ удовлетворяют условиям (*i*), (*ii'*), то $T \geqq T$.

Пусть N_1 (N_2) — крайнее множество множества X_1 (X_2), которое содержит больше чем одну точку и не содержит никакой внутренней точки. Множеству N_1 (N_2) сопоставим линейное пространство H_1 (H_2), являющееся линейной оболочкой системы векторов $h = y_1 - y_2$, где $y_1, y_2 \in N_1$ $(y_1, y_2 \in N_2)$. Систему всех пространств H_1 (H_2) обозначим через $\boldsymbol{H}_1$ $(\boldsymbol{H}_2)$. Если Y_1, Y_2 — подмножества в E_n, то символы $e^{At}Y_1$ и $-Y_2$ имеют очевидное значниее, и $Y_1 + Y_2$ $(Y_1 - Y_2)$ — алгебраическая сумма множеств Y_1 и Y_2 $(-Y_2)$.

Пусть выполнены предположения (C_1), (C_2) и (C_3):

(C_3) если $H_1 \in \boldsymbol{H}_1$ и $H_2 \in \boldsymbol{H}_2$, $t > 0$ и пересечение $[e^{At}H_1] \cap H_2$ содержит ненулевой вектор, то $[e^{At}H_1] + H_2 = E_n$.

Предположение (C_3), в частности, выполнено, если одно из множеств X_1, X_2 состоит только из одной точки или если одно из множеств X_1, X_2 является равномерно выпулкым.

Теорема 4. *Пусть точка $x_1 \in X_1$ с функцией $u_1(t)$, $0 \leqq t \leqq T_1$, и точка $x_2 \in X_1$ с функцией $u_2(t)$, $0 \leqq t \leqq T_2$ — решения задачи оптимального управления при заданной паре множеств X_1, X_2.*

(α_1) *Если для каждого $\psi \in E_n$, $\psi \neq 0$ функция $u(\tau)$ определяется из (9) единственным образом для почти всех τ, то $T_1 = T_2$, $x_1 = x_2$ и $u_1(t) = u_2(t)$ почти всюду.*

(β_1) *Если $U = R \cap V$, где для R и V выполнены предположения из абзаца 1, то $T_1 = T_2$, $x_1 = x_2$, $u_1(t) = u_2(t)$ почти всюду и для функции $u_1(t)$ справедливы утверждения (β) и (γ) из теоремы 1.*

Доказательство теоремы 4 опирается на несколько лемм. Без труда доказывается

Лемма 5. *Пусть $Z \subset E_n$ — замкнутое выпуклое множество и пусть $Z_0 \subset Z$ — открытое выпуклое множество, $\bar{Z}_0 \supset Z$. Тогда Z_0 содержит все внутренние точки множества Z.*

Пуст Σ_t^0 означает внутренность множества Σ_t введенного в абзача 3). Из леммы 5 витекает

Лемма 6. *Если z — внутренняя точка множества $X_1 - \Sigma_t$, то существуют точки $x_3 \in X_1$, $s \in \Sigma_t^0$ такие, что $z = x_3 - s$.*

Лемма 7. *Если $F \subset \Sigma_t^0$ – компактное множество, то $F \subset \Sigma_{t'}$ для некоторого t', $0 < t' < t$.*

Доказательство. Из (C_1) и (C_2) следует, что $\Sigma_\tau \subset \Sigma_\zeta^0$ для $0 < \tau < \zeta$. Множество $G_t = \bigcup_\tau \Sigma_\tau = \bigcup_\tau \Sigma_\tau^0$, $0 < \tau < t$ является открытым выпуклым множеством и $\bar{G}_t = \Sigma_t$. По лемме 5 $F \subset G_t$.

Лемма 8. *Если $z \in e^{AT}(X_1 - \Sigma_T^0)$, то $z \in e^{A\tau}(X_1 - \Sigma_\tau)$ для некоторого τ, $0 < \tau < T$.*

Доказательство. Пусть $z = e^{AT}(x_4 - s_4)$, $x_4 \in X_1$, $s_4 \in \Sigma_T^0$. Пусть K_δ – множество таких $s \in E_n$, что $\|s - s_4\| \leqq \delta$ и пусть $\varepsilon > 0$ такое число, что $K_\varepsilon \subset \Sigma_T^0$. По лемме 7 существует такое t', $0 < t' < T$, что $K_\varepsilon \subset \Sigma_\tau$ для $\tau \geqq t'$. Точку s'_τ определим из равенства $z = e^{A\tau}(x_4 - s'_\tau)$. Следовательно, $s'_\tau - s_4 = [e^{A(T-\tau)} - I] \cdot (x_4 - s_4)$, значит, $s'_\tau \in K_\varepsilon$ для τ достаточно близких к T.

Лемма 9. *Пусть Y_1, $Y_2 \subset E_n$ – выпуклые множества, Y_1 содержит внутреннюю точку и Y_2 не пересекает внутренность множества Y_1. Тогда существует плоскость $(\psi, x) = \gamma$ такая, что $(\psi, x) \leqq \gamma$ для $x \in Y_1$ и $(\psi, x) \geqq \gamma$ для $x \in Y_2$.* (См. [4], 1, 6, Теорема 4.)

Доказательство теоремы 4. Докажем (α_1). Очевидно, $T_1 - T_2 = T$. Пусть $y(t)$ – решение системы (1), где вместо u подставлена некоторая измеримая функция $u(t)$ со значениями в U, и пусть $y(0) \in X_1$. Множеством всех возможных значений решения $y(t)$ в точке $t = \tau$ является $e^{A\tau}(X_1 - \Sigma_\tau)$. Так как пара x_1, $u_1(t)$, $0 \leqq t \leqq T$ есть решение задачи оптимального управления, то $[e^{AT}(X_1 - \Sigma^T)] \cap X_2 \neq \emptyset$.

X_2 не пересекает внутренность множества $e^{AT}(X_1 - \Sigma_T)$, так как по лемме 6 внутренность множества $e^{AT}(X_1 - \Sigma_T)$ можно представить в виде $e^{AT}(X_1 - \Sigma_T^0)$ и пара x_1, $u_1(t)$, $t \in \langle 0, T\rangle$ не была бы решением задачи оптимального управления (см. лемму 8).

По лемме 9 существует плоскость $(\psi, x) = \gamma$ такая, что $(\psi, x) \leqq \gamma$ для $x \in e^{AT}(X_1 - \Sigma_T)$ и $(\psi, x) \geqq \gamma$ для $x \in X_2$. Пересечение плоскости $(\psi, x) = \gamma$ и множества $e^{AT}(X_1 - \Sigma_T)$, (X_2) обозначим через N_3, (N_2). Допустим, что множества N_3 и N_2 содержат больше чем одну точку и сопоставим им, подобно как раньше, пространства H_3 и H_2. Очевидно, что $H_2 \in \mathbf{H}_2$. Пусть z_1, $z_2 \in N_3$; в таком случае $z_i = e^{AT}(y_i - s_i)$, где $y_i \in X_1$, $s_i \in \Sigma_T$, $i = 1, 2$. Если бы было $s_1 \neq s_2$, то точка $\frac{1}{2}(z_1 + z_2)$ принадлежала бы N_3 и одновременно являлась бы внутренной точкой множества $e^{AT}(X_1 - \Sigma_T)$, так как Σ_T – равномерно выпуклое множество по следствию теоремы 3 и $\frac{1}{2}(s_1 + s_2)$ – внутренняя точка множества Σ_T. Итак, $s_1 = s_2$ – граничная точка множества Σ_T и представление

(10) $$z = e^{AT}(y_0 - s_0)\,, \quad \text{где} \quad y_0 \in X_1\,, \quad s_0 \in \Sigma_T$$

для каждой точки $z \in N_3$ единственно и s_0 в представлении (10) не зависит от $z \in N_3$. Очевидно,

$$\left(e^{A'T}\psi, y\right) = \left(\psi, e^{AT}y\right) \leqq \gamma + \left(\psi, e^{AT}s_0\right)$$

для $y \in X_1$ и $N_3 + e^{AT}s_1$ является множеством таких точек $e^{AT}y$, где $y \in X_1$, что

$$\left(e^{A'T}\psi, y\right) = \left(\psi, e^{AT}y\right) = \gamma + \left(\psi, e^{AT}s_0\right).$$

Так как множество N_1 таких $y \in X_1$, что $\left(e^{A'T}\psi, y\right) = \gamma + \left(\psi, e^{AT}s_0\right)$ является крайним множеством множества X_1, которое содержит больше чем одну точку (N_3 содержит больше чем одну точку) и не содержит внутренней точки, то $H_3 = e^{AT}H_1$, где $H_1 \in \mathbf{H}_1$. Так как алгебраическая сумма пространств $e^{AT}H_1 = H_3$ и H_2 содержится в плоскости $(\psi, x) = 0$, то из предположнеия (C_3) следует, что $[e^{AT}H_1] \cap H_2 = (0)$ и, следовательно, множество $[e^{AT}(X_1 - \Sigma_T)] \cap X_2$ состоит из единственной точки, которую обозначим z_4. Так как точка z_4 представима единственным образом по формуле (10) то $x_1 = x_2 = y_0$ и

$$-\int_0^T e^{-A\tau}Bu_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau = s_0 = -\int_0^T e^{-A\tau}Bu_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Пусть $(\psi_1, x) = \gamma_1$ — опорная плоскость множества Σ_T ($(\psi_1, x) \geqq \gamma_1$ для $x \in \Sigma_T$) и $(\psi_1, s_0) = \gamma_1$. По теореме 3 существует функция $u(t)$, $t \in \langle 0, T\rangle$, $u(t) \in U$, такая, что выполняется (8) и (9) (где $y = s_0$). Рассуждая подобным образом как в доказательстве утверждения (α) теоремы 1, докажем, что $u(t) = u_1(t) = u_2(t)$ почти всюду на $\langle 0, T\rangle$. (α_1) доказано, (β_1) следует из замечания 2.

Применением понятия крайнего множества и результатами абзаца 4 *автор обьязан П. Бруновскому.*

Литература

[1] *Л. С. Понтрягин, А. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко:* Математическая теория оптимальных процессов. Гос. изд. физ. мат. лит. Москва 1961.

[2] *J. C. La Salle:* The Sime optimal control problem. Contributions to the theory of non linear oscillations, vol. V, Annals of Math. Studies, Princeton University, Press 1960.

[3] *П. С. Александров:* Комбинаторная топология. ОТИЗ Гостехиздат, Москва-Ленинград 1947.

[4] *M. M. Day:* Normed linear spaces. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1958; русский перевод Изд. иностр. лит., Москва 1961.

Výtah

O LINEÁRNÍ TEORII OPTIMÁLNÍ REGULACE

JAROSLAV KURZWEIL, Praha

V monografii [1] jsou dokázány věty o jednoznačnosti a struktuře optimální regulace vzhledem k času lineární soustavy v případě, že U je konvexní mnohostěn. Platnost těchto výsledků (včetně odhadu počtu bodů nespojitosti) se rozšiřuje na případ, kdy U lze vyjádřit jako průnik konvexního mnohostěnu R a stejnoměrně konvexní množiny V. Dále se dokazuje, že množina Σ_{T_1} bodů x_1, které lze převést do počátku v čase menším nebo rovném T_1, je stejnoměrně konvexní. V odst. 4 se dokazuje jednoznačnost optimální regulace pro některé obecnější množiny U. Výsledky odst. 4 pocházejí od P. BRUNOVSKÉHO.

V dodatku se dokazuje, že obdobné výsledky o jednoznačnosti a struktuře optimální regulace za jistých předpokladů platí i pro úlohu převést bod x z dané uzavřené konvexní množiny X_1 do dané uzavřené konvexní množiny X_2.

Summary

ON THE LINEAR THEORY OF OPTIMAL CONTROL SYSTEMS

JAROSLAV KURZWEIL, Praha

In the monograph [1], theorems on the uniqueness and structure of the optimal steering function of a linear system with respect to time are proved in the case that U is a convex polyhedron. These results (including the estimate of the number of the points of discontinuity) are extended to the case that $U = R \cap V$, where R is a convex polyhedron and V uniformly convex. Further it is proved that the set Σ_{T_1} of points which may be brought to the origin in a time not exceeding T_1, is uniformly convex. In section 4, uniqueness of the optimal control is proved for some convex sets U of a more general type. The results of section 4 are due to P. BRUNOVSKÝ.

In the Appendix it is proved under some conditions, that analogous results on the uniqueness and structure of the optimal steering function are valid for the problem that x is to be steered from a given convex closed set X_1 to a given convex closed set X_2.