Zbyněk Šidák

Některé věty a příklady z teorie operátorů ve spočetných Markovových řetězcích

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 88 (1963), No. 4, 457--478

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 88 (1963), Praha

NĚKTERÉ VĚTY A PŘÍKLADY Z TEORIE OPERÁTORŮ VE SPOČETNÝCH MARKOVOVÝCH ŘETĚZCÍCH

ZBYNĚK ŠIDÁK, Praha

(Došlo dne 23. července 1962)

Nechť p_{jk} jsou pravděpodobnosti přechodu Markovova řetězce v diskrétním čase, se spočetným systémem stavů. Pro funkce f na systému stavů definujme operátor T tak, že hodnota Tf v bodě j je $(Tf)_j = \sum_k f_k p_{jk}$; T je operátorem v různých Banachových prostorech. Článek se zabývá operátory adjungovanými k T, nerovností $Tf \leqq f$ a rovností $Tf = f$. Řada příkladů pak ukazuje, jaké spektrální vlastnosti T může mít.

1. ÚVOD A NÁSTIN OBSAHU

Budeme se zabývat Markovovými řetězci v diskrétním čase, se spočetným systémem stavů N a stacionárními pravděpodobnostmi přechodu po 1 kroku p_{jk}, po n krocích $p_{jk}^{(n)}$. Samozřejmě je $p_{jk}^{(1)} = p_{jk}$; někdy budeme též užívat pravděpodobností $p_{jk}^{(0)}$, které jsou definovány $p_{jj}^{(0)} = 1$, $p_{jk}^{(0)} = 0$ pro $j \neq k$. V celém článku kromě posledního paragrafu 7 pojednáváme o řetězcích irreducibilních; všechny věty článku jsou odvozeny za tohoto předpokladu, který již v dalším nebudeme výslovně uvádět.

Jestliže f je nějaká funkce na prostoru stavů N, pak f_k budeme značit její hodnotu v bodě $k \in N$. Definujme nyní zobrazení T následujícím způsobem: Tf budiž funkce, jejíž hodnota v bodě $j \in N$ je $(Tf)_j = \sum_k f_k p_{jk}$. T zobrazuje funkce f na prostoru N, pro něž uvedené součty mají smysl, na funkce Tf na prostoru N. (Zde a všude v následujícím, kde obor sčítání není výslovně uveden, se rozumí součet přes celé N.)

Je dobře známo (viz [11], [12], [13]) a v následujícím paragrafu bude přesně ukázáno, že zobrazení T je lineárním spojitým operátorem v určitých vhodných Banachových prostorech funkcí.

V případě konečného systému stavů je operátor T vyjádřen konečnou maticí pravděpodobností přechodu, je zde tedy možno využít mnoha výsledků z teorie matic a vlastnosti operátoru T (čili příslušné matice) jsou velmi dobře prozkoumány. V případě nekonečného spočetného systému stavů operátor T je sice podobně vyjádřen nekonečnou maticí pravděpodobností přechodu, avšak o jeho vlastnostech je známo velice málo; především musíme zde zdůraznit, že v tomto případě vlastnosti T závisí podstatně na tom, v kterém Banachově prostoru je operátor T uvažován.

V práci [13] jsme určili vlastní hodnoty na jednotkové kružnici operátoru T jednak v prostoru omezených funkcí, jednak v prostoru funkcí integrovatelných s kvadrátem podle určité tzv. subinvariantní míry. Přítomný článek v podstatě obsahuje doplňky a příklady k předchozí práci [13], v níž jsou dokázány hlavní výsledky, avšak může být zcela dobře čten samostatně.

Uveďme zde nástin obsahu přítomného článku (ovšem jen v hrubém vyjádření, prozatím bez přesné formulace).

V paragrafu 2 je udán tvar operátorů adjungovaných k T. Paragraf 3 obsahuje několik vět říkajících, že pro rekurentní řetězce a pro f z některých tříd funkcí nerovnost $Tf \leqq f$ implikuje $Tf = f$, a podobně pro adjungované operátory. Další paragraf 4 objasňuje pro rekurentní řetězce tvar funkcí f, pro něž $Tf = f$, a opět podobně pro adjungované operátory. Některé věty z těchto dvou paragrafů byly již uvedeny jako lemmata v [13], ovšem jen v tom tvaru a za těch předpokladů, kterých tam bylo bezprostředně zapotřebí; naproti tomu v přítomném článku věty řečených typů jsou uvedeny systematicky a zvláštní pozornost je věnována vztahům duality mezi nimi, takže tím je situace zcela vyjasněna.

Následující tři paragrafy jsou věnovány spektrálním vlastnostem operátoru T. V paragrafu 5 je třemi jednoduchými větami a řadou příkladů objasněno, jaké vztahy mohou nastat mezi spektrálním poloměrem a normou T. Paragraf 6 uvádí příklad, v němž bod 0 leží v různých částech spektra podle toho, v kterém Banachově prostoru je operátor T uvažován. Poslední paragraf 7 ukazuje příklad reducibilního řetězce, pro nějž spektrum T je rovno celému jednotkovému kruhu.

2. MATICOVÉ VYJÁDŘENÍ OPERÁTORŮ

Především musíme ještě zavést řadu označení a definic.

Můžeme předpokládat, že prostor stavů N je uspořádán do nějaké posloupnosti. Pak funkce na prostoru stavů jsou vyjádřeny posloupnostmi čísel a předpokládáme, že je píšeme jako nekonečné sloupcové vektory. Je-li R nějaký operátor na prostoru funkcí (tj. sloupcových vektorů), můžeme jej vyjádřit jako nekonečnou matici v tom smyslu, že aplikace operátoru R na funkci (sloupcový vektor) f odpovídá násobení f zleva touto maticí. Slovem „operátor“ zde a všude v dalším rozumíme lineární spojitý operátor v nějakém Banachově prostoru funkcí. Dále budeme volně používat některých licencí: Budeme hovořit o vyjádření operátorů maticemi v hořejším smyslu, budeme ztotožňovat Banachovy prostory, které jsou isometricky isomorfní, a v podobném smyslu budeme vyjadřovat maticemi adjungované operátory.

Je-li B nějaký Banachův prostor, pak označme B^* prostor k němu adjungovaný, a B^+ takový prostor, že B je adjungovaný k B^+ (a podle hořejší úmluvy stejnými symboly označíme i prostory isometricky isomorfní s B^*, resp. B^+, atd.). Obdobně, je-li R nějaký operátor, pak R^* je operátor k němu adjungovaný, R^+ takový operátor, že R je adjungovaný k R^+.

Písmeny p, q budeme v paragrafech 2, 3 a 4 označovat takovou dvojici čísel, pro něž $1 \leqq p, q \leqq \infty$ (zde za číslo připouštíme též ∞), a splňujících $1/p + 1/q = 1$.

Jestliže μ je nějaká σ-aditivní nezáporná míra na všech podmnožinách prostoru N, budeme označovat μ_k míru jednobodové množiny $\{k\}$. Vždy bude μ_k konečná pro každé $k \in N$, avšak $\mu(N) = \sum_k \mu_k$ může být konečná nebo nekonečná.

D. G. Kendall zavedl v [10] následující definici:

Definice 1. Míra μ se nazývá *subinvariantní*, jestliže není identicky rovna 0 a jestliže

$$\sum_j p_{jk}\mu_j \leqq \mu_k \tag{1}$$

pro každé $k \in N$. μ se nazývá invariantní, jestliže v (1) platí znaménko rovnosti pro každé $k \in N$.

V této definici ovšem, přesněji řečeno, jde o „míru subinvariantní vzhledem k Markovovu řetězci s pravděpodobnostmi přechodu p_{jk}"; avšak tento dodatek zajisté nemusíme vypisovat. Snad je vhodné již zde naznačit důvod, proč se zavádí pojem subinvariantní míry: zobrazení T je totiž operátorem v $l_p(\mu)$, jak uvidíme přesně za chvíli.

D. G. Kendall ukázal v [10], že ke každému irreducibilnímu řetězci existuje alespoň jedna subinvariantní míra. Písmenem μ budeme v celé práci označovat nějakou pevnou subinvariantní míru. Dále ε bude značit míru, definovanou $\varepsilon_k = 1$ pro každé $k \in N$.

Definice 2. Označme $l_\infty(\varepsilon)$ prostor všech omezených komplexních funkcí f s normou

$$\|f\|_{\infty,\varepsilon} = \varepsilon\text{–ess}\sup_k |f_k| = \sup_k |f_k| ;$$

dále $l_p(\varepsilon)$ (pro $1 \leqq p < \infty$) prostor funkcí f, pro něž norma

$$\|f\|_{p,\varepsilon} = (\sum_k |f_k|^p)^{1/p}$$

je konečná; dále $l_p(\mu)$ (pro $1 \leqq p < \infty$) prostor funkcí f, pro něž norma

$$\|f\|_{p,\mu} = (\sum_k |f|^p \mu_k)^{1/p}$$

je konečná; a konečně $l_\infty(\mu)$ prostor funkcí f, pro něž norma

$$\|f\|_{\infty,\mu} = \mu\text{–ess}\sup_k |f_k| = \sup_k |f_k|$$

je konečná.

Poněvadž podle lemmatu 1 v [13] je $\mu_k > 0$ pro všechna $k \in N$, zřejmě $\|f\|_{\infty,\varepsilon} = \|f\|_{\infty,\mu}$ a $l_\infty(\varepsilon) = l_\infty(\mu)$; rozlišujeme je pouze formálně v symbolech kvůli prostorům, k nimž jsou adjungovány. Všechny uvedené prostory jsou Banachovy a je dobře známo (viz např. N. Dunford, J. T. Schwartz [3], kap. IV. 8), že $l_\infty^+(\varepsilon) = l_1(\varepsilon)$, $l_1^*(\varepsilon) = l_\infty(\varepsilon)$, $l_p^*(\varepsilon) = l_p^+(\varepsilon) = l_q(\varepsilon)$ (pro $1 < p < \infty$), přičemž vždy hodnota funkcionálu g na funkci f je rovna

$$g(f) = \sum_k g_k f_k ,$$

dále $l_\infty^+(\mu) = l_1(\mu)$, $l_1^*(\mu) = l_\infty(\mu)$, $l_p^*(\mu) = l_p^+(\mu) = l_q(\mu)$ (pro $1 < p < \infty$), přičemž hodnota funkcionálu g na funkci f je zde rovna

$$g(f) = \sum_k g_k f_k \mu_k .$$

Definujme nyní základní Markovův operátor T a operátory T_p, úzce s ním příbuzné.

Definice 3. Operátor T v $l_\infty(\varepsilon)$ budiž definován rovnostmi

(2) $$(Tf)_j = \sum_k f_k p_{jk} \quad \text{pro všechna} \quad j \in N,\ f \in l_\infty(\varepsilon) .$$

Zcela podobně operátory T_p (pro $1 \leqq p \leqq \infty$) v $l_p(\mu)$ buďtež definovány rovnostmi

(3) $$(T_p f)_j = \sum_k f_k p_{jk} \quad \text{pro všechna} \quad j \in N,\ f \in l_p(\mu) .$$

Operátory T a T_p jsou tedy vyjádřeny maticí pravděpodobností přechodu

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} .$$

Zobrazení T je vskutku operátorem v $l_\infty(\varepsilon)$ s normou $\|T\|_{\infty,\varepsilon} = 1$. Předně totiž

$$\|Tf\|_{\infty,\varepsilon} = \sup_j |\sum_k f_k p_{jk}| \leqq \sup_j \sum_k |f_k|\, p_{jk} \leqq \sup_k |f_k| \cdot \sup_j \sum_k p_{jk} = \|f\|_{\infty,\varepsilon} ;$$

dále pro funkci $e^{(0)}$ identicky rovnou 1 máme $Te^{(0)} = e^{(0)}$, takže opravdu $\|T\|_{\infty,\varepsilon} = 1$.

E. Nelson [11] dokázal, že T_p jsou vskutku operátory v $l_p(\mu)$ s normou $\|T_p\|_{p,\mu} \leqq 1$. Pro úplnost a proto, že důkaz je ve spočetném případě velice snadný, uveďme jej zde také; vyplývá totiž ihned z řetězu nerovností (pro $1 \leqq p < \infty$)

$$\|T_p f\|_{p,\mu}^p = \sum_j \mu_j |\sum_k f_k p_{jk}|^p \leqq \sum_j \mu_j \sum_k |f_k|^p\, p_{jk} =$$
$$= \sum_k |f_k|^p \sum_j \mu_j p_{jk} \leqq \sum_k |f_k|^p\, \mu_k = \|f\|_{p,\mu}^p ,$$

a pro T_∞ bylo $\|T_\infty\|_{\infty,\mu} = 1$ dokázáno již nahoře. Podotkněme, že zde může nastat též ostrá nerovnost $\|T_p\|_{p,\mu} < 1$, což ostatně uvidíme na několika příkladech v paragrafu 5. Dále, přesně řečeno, operátory T_p závisí na míře μ, poněvadž obor jejich definice závisí na μ, avšak tuto závislost již nebudeme explicitně vyznačovat.

Všechny operátory, svázané vztahem adjungovanosti s předešlými T a T_p, jsou tedy T^+ v $l_1(\varepsilon)$, T_1^* v $l_\infty(\mu)$, $T_p^* = T_p^+$ v $l_q(\mu)$ (pro $1 < p < \infty$) a T_∞^+ v $l_1(\mu)$. Najdeme nyní tvar všech těchto operátorů.

Věta 1. *Operátor T^+ v $l_1(\varepsilon)$ je dán rovnostmi*

(4) $$(T^+ g)_k = \sum_j g_j p_{jk} \quad \textit{pro všechna } k \in N,\ g \in l_1(\varepsilon) ,$$

takže je vyjádřen maticí

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} & \cdots \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} & \cdots \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

Důkaz. Nejprve je vidět, že T^+ daný rovnostmi (4) vskutku je operátorem v $l_1(\varepsilon)$, neboť $\|T^+g\|_{1,\varepsilon} = \sum_k |\sum_j g_j p_{jk}| \leqq \sum_k \sum_j |g_j| p_{jk} = \sum_j |g_j| \sum_k p_{jk} = \|g\|_{1,\varepsilon}$. Dále pro $f \in l_\infty(\varepsilon)$, $g \in l_1(\varepsilon)$ platí $(Tf)\, g = \sum_j (\sum_k f_k p_{jk})\, g_j = \sum_k (\sum_j g_j p_{jk}) f_k = f(T^+g)$.

Zde a všude v následujících důkazech je dovoleno zaměnit pořadí sčítání, což je snadno vidět např. takto: Rozložíme každou funkci na kladnou a zápornou část její reálné složky a na kladnou a zápornou část její imaginární složky; pro každou z těchto čtyř částí je záměna sčítání dovolena, takže po vhodném sečtení je vše zřejmé.

Věta 2. *Operátor T_1^* v $l_\infty(\mu)$ je dán rovnostmi*

$$(T_1^* g)_k = \sum_j g_j p_{jk} \frac{\mu_j}{\mu_k} \quad \textit{pro všechna } k \in N,\ g \in l_\infty(\mu)\,, \tag{5}$$

takže je vyjádřen maticí

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} \frac{\mu_2}{\mu_1} & p_{31} \frac{\mu_3}{\mu_1} & \cdots \\ p_{12} \frac{\mu_1}{\mu_2} & p_{22} & p_{32} \frac{\mu_3}{\mu_2} & \cdots \\ p_{13} \frac{\mu_1}{\mu_3} & p_{23} \frac{\mu_2}{\mu_3} & p_{33} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

Stejné vyjádření mají operátory $T_p^* = T_p^+$ v $l_q(\mu)$ (pro $1 < p < \infty$) a T_∞^+ v $l_1(\mu)$.

Důkaz. Předně T_1^* daný rovnostmi (5) je operátorem v $l_\infty(\mu)$, neboť

$$\|T_1^* g\|_{\infty,\mu} = \sup_k |\sum_j g_j p_{jk} \mu_j \mu_k^{-1}| \leqq \sup_k \sum_j |g_j|\, p_{jk} \mu_j \mu_k^{-1} \leqq$$
$$\leqq \sup_j |g_j| \,.\, \sup_k \sum_j p_{jk} \mu_j \mu_k^{-1} \leqq \|g\|_{\infty,\mu}\,.$$

Dále ukážeme, že T_p^* (pro $1 < p < \infty$) daný (5) je operátorem v $l_q(\mu)$; s použitím Hölderovy nerovnosti totiž dostáváme

$$\|T_p^* g\|_{q,\mu}^q = \sum_k |\sum_j g_j p_{jk} \mu_j \mu_k^{-1}|^q \mu_k = \sum_k |\sum_j g_j p_{jk}^{1/q} \mu_j^{1/q} \,.\, p_{jk}^{1/p} \mu_j^{1/p} \mu_k^{-1} \mu_k^{1/q}|^q \leqq$$
$$\leqq \sum_k \{(\sum_j |g_j p_{jk}^{1/q} \mu_j^{1/q}|^q) (\sum_j |p_{jk}^{1/p} \mu_j^{1/p} \mu_k^{1/q-1}|^p)^{q/p}\} = \sum_k \{\sum_j |g_j|^q\, p_{jk} \mu_j (\sum_j p_{jk} \mu_j \mu_k^{-1})^{q/p}\} \leqq$$
$$\leqq \sum_k \sum_j |g_j|^q\, p_{jk} \mu_j = \sum_j |g_j|^q\, \mu_j \sum_k p_{jk} = \|g\|_{q,\mu}^q\,.$$

Konečně T_∞^+ daný rovnostmi (5) je operátorem v $l_1(\mu)$, neboť

$$\|T_\infty^+ g\|_{1,\mu} = \sum_k \left|\sum_j g_j p_{jk} \mu_j \mu_k^{-1}\right| \mu_k \leqq \sum_k \sum_j |g_j| \, p_{jk} \mu_j = \sum_j |g_j| \, \mu_j = \|g\|_{1,\mu} .$$

Zřejmě také pro $f \in l_1(\mu)$, $g \in l_\infty(\mu)$ máme

$$(T_1^* g) f = \sum_k \left(\sum_j g_j p_{jk} \mu_j \mu_k^{-1}\right) f_k \mu_k = \sum_j \left(\sum_k f_k p_{jk}\right) g_j \mu_j = g(T_1 f)$$

a podobně i pro T_p^*, T_∞^+.

D. G. Kendall [10] používá určitého operátoru v $l_2(\varepsilon)$, který se zdá být na první pohled podstatně odlišný od operátorů T_p, zavedených Nelsonem [11], nebo od operátoru T_2, používaného v [12] a [13]. Proto snad není bez zajímavosti ukázat, že tyto operátory spolu těsně souvisí. Abychom naše úvahy zasadili do obecnějšího rámce, definujme celou třídu operátorů S_p pro $1 \leqq p \leqq \infty$ rovnostmi

$$(S_p h)_k = \sum_j h_j p_{jk} \left(\frac{\mu_j}{\mu_k}\right)^{1/q} \quad \text{pro všechna } k \in N, \ h \in l_p(\varepsilon) .$$

Speciálně pak máme $S_1 = T^+$, $S_\infty = T_1^*$. Zavedeme-li nyní veličiny f_j rovnostmi $h_j = f_j \mu_j^{1/p}$, $j \in N$, pak pro $1 < p < \infty$ dostáváme podle předchozího

$$\|S_p h\|_{p,\varepsilon}^p = \sum_k \left|\sum_j h_j p_{jk} \mu_j^{1/q} \mu_k^{-1/q}\right|^p = \sum_k \left|\sum_j f_j \mu_j^{1/p} p_{jk} \mu_j^{1/q} \mu_k^{-1/q} \mu_k^{1/p} \mu_k^{-1/p}\right|^p =$$

$$= \sum_k \left|\sum_j f_j p_{jk} \mu_j \mu_k^{-1}\right|^p \mu_k = \|T_q^* f\|_{p,\mu}^p \leqq \|f\|_{p,\mu}^p = \sum_j |f_j|^p \mu_j = \sum_j |h_j|^p = \|h\|_{p,\varepsilon}^p .$$

Z toho tedy vidíme, že S_p je vskutku operátor v $l_p(\varepsilon)$ a zároveň, že S_p vzniká jakýmsi „přenesením" operátoru T_q^* z prostoru $l_p(\mu)$ do $l_p(\varepsilon)$. Speciálně operátor S_2, kterého používá Kendall [10] (a označuje jej ovšem T), vzniká „přenesením" operátoru T_2^* z prostoru $l_2(\mu)$ do $l_2(\varepsilon)$.

3. O NEROVNOSTI $Tf \leqq f$ A PŘÍBUZNÝCH NEROVNOSTECH PRO REKURENTNÍ ŘETĚZCE

V celém tomto paragrafu budeme předpokládat bez dalšího výslovného vypisování, že jde o Markovův řetězec rekurentní a o reálné funkce na N. Jestliže f, g jsou dvě funkce na N, pak zde i v dalších paragrafech zápisem $g \leqq f$ rozumíme $g_k \leqq f_k$ pro všechna $k \in N$.

V práci [13] byly uvedeny pro rekurentní řetězce některé pomocné věty zhruba tohoto typu: Pro f z určitých tříd funkcí nerovnost $Tf \leqq f$ implikuje $Tf = f$; nebo věta tvrdící, že subinvariantní míra pro rekurentní řetězec je invariantní, což lze pro konečnou míru zapsat v našich symbolech tak, že $T^+\mu \leqq \mu$ implikuje $T^+\mu = \mu$. Přirozeně se tu naskýtá domněnka, že mezi těmito větami nebo nějakými jejich analogiemi by měl být vztah duality; rovněž se zdá, že metody důkazů těchto vět by bylo možno přenést pro důkazy jiných analogických vět.

V tomto paragrafu uvedeme systematicky věty řečeného typu a zvláště objasníme též vztahy duality mezi nimi.

Věta 3. *Jestliže* $Tf \leqq f$ *nebo* $Tf \geqq f$, *kde* $f \in l_\infty(\varepsilon)$, *pak* $Tf = f$.

Tato věta je totožná s první částí lemmatu 4 v [13]. Přesto bude vhodné uvésti její důkaz proto, že podobné důkazové metody použijeme v dalším ještě několikrát; důkaz maličko pozměňujeme oproti [13], aby lépe vynikla analogie s ostatními našimi větami.

Důkaz věty 3. Položme $h = f - Tf$; pak v prvním případě, když $Tf \leqq f$, máme $h \geqq 0$, $h \in l_\infty(\varepsilon)$. Postupně dostáváme

$$Th = Tf - T^2 f, \ldots, T^{n-1}h = T^{n-1}f - T^n f, \; T^n h = T^n f - T^{n+1} f.$$

Sečtením těchto rovností dostaneme

$$\sum_{t=0}^{n} T^t h = \sum_{t=0}^{n} T^t f - \sum_{t=1}^{n+1} T^t f = f - T^{n+1} f, \tag{6}$$

kde samozřejmě T^0 je identický operátor. Nyní s použitím (6) vidíme, že pro každé $r \in N$ platí

$$h_r \sum_{t=0}^{n} p_{rr}^{(t)} \leqq \sum_{t=0}^{n} \sum_s h_s p_{rs}^{(t)} \leqq \sup_r \left| \sum_{t=0}^{n} \sum_s h_s p_{rs}^{(t)} \right| = \left\| \sum_{t=0}^{n} T^t h \right\|_{\infty,\varepsilon} \leqq$$
$$\leqq \|f\|_{\infty,\varepsilon} + \|T^{n+1} f\|_{\infty,\varepsilon} \leqq 2\|f\|_{\infty,\varepsilon}.$$

Jde-li $n \to \infty$, má tedy být $h_r \sum_{t=0}^{\infty} p_{rr}^{(t)} \leqq 2\|f\|_{\infty,\varepsilon}$, ale poněvadž z rekurentnosti řetězce vyplývá $\sum_{t=0}^{\infty} p_{rr}^{(t)} = \infty$, musí být $h_r = 0$ pro každé $r \in N$.

Jestliže $Tf \geqq f$, pak $T(-f) \leqq -f$ a předchozí část důkazu dává $Tf = f$.

Věta 4. *Jestliže* $T_p f \leqq f$ *nebo* $T_p f \geqq f$, *kde* $f \in l_p(\mu)$ (*pro* $1 \leqq p \leqq \infty$), *pak* $T_p f = f$

Věta zobecňuje druhou část lemmatu 4 v [13].

Důkaz. Postupujeme jako v důkazu věty 3; položíme $h = f - T_p f$ a obdobně jako (6) dostáváme

$$\sum_{t=0}^{n} T_p^t h = f - T_p^{n+1} f.$$

Nyní pro každé $r \in N$ a pro $1 \leqq p < \infty$ máme

$$\left[\sum_{t=0}^{n} p_{rr}^{(t)}\right]^p h_r^p \mu_r \leqq \left[\sum_{t=0}^{n} \sum_s p_{rs}^{(t)} h_s\right]^p \mu_r \leqq \sum_j \left[\sum_{t=0}^{n} \sum_s p_{js}^{(t)} h_s\right]^p \mu_j =$$
$$= \left\| \sum_{t=0}^{n} T_p^t h \right\|_{p,\mu}^p \leqq (\|f\|_{p,\mu} + \|T_p^{n+1} f\|_{p,\mu})^p \leqq (2\|f\|_{p,\mu})^p.$$

Poněvadž podle lemmatu 1 v [13] $\mu_r > 0$ pro každé $r \in N$, podobně jako v předchozím důkazu vidíme, že musí být $h_r = 0$ pro každé $r \in N$. Pro T_∞ a $f \in l_\infty(\mu)$ tvrzení se redukuje na větu 3.

Věta 5. *Jestliže* $\sum_k f_k p_{jk} \leqq f_j$ *pro každé* $j \in N$, *kde* $f \geqq 0$, *pak* $\sum_k f_k p_{jk} = f_j$ *pro každé* $j \in N$.

Kdyby v této větě f patřilo do $l_\infty(\varepsilon)$ nebo $l_p(\mu)$, tvrzení by vyplývalo z předchozích vět 3 a 4. Náš důkaz také začíná podobnou myšlenkou jako v těchto větách; poněvadž však f nemusí patřit do řečených prostorů, nelze zde používat operátorů T nebo T_p.

Důkaz věty 5. Pišme $h_j = f_j - \sum_k f_k p_{jk}$; pak $h_j \geqq 0$. Ukážeme úplnou indukcí, že

$$\sum_s \sum_{t=0}^{n} h_s p_{js}^{(t)} = f_j - \sum_k f_k p_{jk}^{(n+1)} \text{ pro všechna } j \in N,\ n = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

(To je analogie rovnosti (6).) Zřejmě vztah (7) je správný pro $n = 0$. Je-li správný pro $n - 1$, pak také

$$\sum_j \sum_s \sum_{t=0}^{n-1} h_s p_{rj} p_{js}^{(t)} = \sum_j f_j p_{rj} - \sum_j \sum_k f_k p_{rj} p_{jk}^{(n)},$$

což dává

$$\sum_s \sum_{t=0}^{n-1} h_s p_{rs}^{(t+1)} = \sum_j f_j p_{rj} - \sum_k f_k p_{rk}^{(n+1)} = f_r - h_r - \sum_k f_k p_{rk}^{(n+1)} =$$
$$= f_r - \sum_s h_s p_{rs}^{(0)} - \sum_k f_k p_{rk}^{(n+1)},$$

ale to již zřejmě je rovnost (7) pro n. Nyní s pomocí (7) vidíme

$$h_j \sum_{t=0}^{n} p_{jj}^{(t)} \leqq \sum_s \sum_{t=0}^{n} h_s p_{js}^{(t)} \leqq f_j,$$

což implikuje $h_j = 0$ stejně jako na konci důkazu věty 3.

Příklad 1. Kdybychom ve větě 5 předpokládali opačnou nerovnost $\sum_k f_k p_{jk} \geqq f_j$ pro všechna $j \in N$, pak by tvrzení věty obecně neplatilo. To vidíme na následujícím příkladu.

Nechť stavy řetězce jsou přirozená čísla 1, 2, ..., nechť pravděpodobnosti přechodu jsou $p_{11} = \frac{2}{3}$, $p_{12} = \frac{1}{3}$, pro $k > 1$ dále $p_{k,k-1} = \frac{2}{3}$, $p_{k,k+1} = \frac{1}{3}$ a všechny ostatní rovny 0. Výpočtem se přesvědčíme, že míra μ daná rovnostmi $\mu_k = 2^{-k}$ pro $k = 1, 2, \ldots$, je invariantní. Poněvadž $\sum_k \mu_k = \sum_k 2^{-k} = 1$, podle paragrafu 7 práce [13] je řetězec positivně rekurentní. Položíme-li nyní $f_k = 2^k$ pro $k = 1, 2, \ldots$, máme vskutku $\sum_k f_k p_{jk} \geqq f_j$ pro všechna $j \in N$, avšak pro $j = 1$ zde nastává ostrá nerovnost.

Nyní se obrátíme k větám duálním. K větě 3 je duální následující

Věta 3*. *Jestliže* $T^+ g \leqq g$ *nebo* $T^+ g \geqq g$, *kde* $g \in l_1(\varepsilon)$, *pak* $T^+ g = g$.

Důkaz by probíhal úplně podobně jako u vět 3 a 4.

K větě 4 je duální následující

Věta 4*. *Jestliže* $T_p^* g \leqq g$ *nebo* $T_p^* g \geqq g$, *kde* $g \in l_q(\mu)$ *(pro* $1 \leqq p < \infty$*), pak* $T_p^* g = g$. *Stejné tvrzení platí pro* T_∞^+ *a* $g \in l_1(\mu)$.

Důkaz je opět podobný jako u věty 4. Stačí si jen ověřit, že

$$(T_p^{*t} h)_j = \sum_s h_s p_{sj}^{(t)} \frac{\mu_s}{\mu_j} \text{ pro každé } j \in N,\ t = 1, 2, \ldots,$$

takže potom

$$\Big\| \sum_{t=0}^{n} T_p^{*t} h \Big\|_{q,\mu}^q = \sum_j \Big[\sum_{t=0}^{n} \sum_s h_s p_{sj}^{(t)} \mu_s \mu_j^{-1} \Big]^q \mu_j \quad (\text{pro } 1 < p < \infty),$$

modifikovat důkaz podle toho atd.

K větě 5 je duální následující

Věta 5*. *Jestliže* $\sum_j g_j p_{jk} \leqq g_k$ *pro každé* $k \in N$, *kde* $g \geqq 0$, *pak* $\sum_j g_j p_{jk} = g_k$ *pro každé* $k \in N$.

Tato věta je totožná s lemmatem 2 v [13].

Důkaz je opět zcela podobný jako u věty 5 a byl též podán v [13].

Příklad 1*. Kdybychom ve větě 5 předpokládali opačnou nerovnost $\sum_j g_j p_{jk} \geqq g_k$ pro každé $k \in N$, pak by tvrzení věty obecně neplatilo. To vidíme na řetězci, zkonstruovaném v příkladu 1, v němž položíme $g_k = 1$ pro každé $k \in N$.

4. O ŘEŠENÍ ROVNICE $Tf = f$ A PŘÍBUZNÝCH ROVNIC PRO REKURENTNÍ ŘETĚZCE

V tomto paragrafu podobně jako v předchozím se systematicky doplňují známé výsledky z prací [13], [2] a [5]. Opět věnujeme pozornost dualitě vět; avšak zde není již tak dokonalá analogie mezi větami pro adjungované operátory.

Budeme používat ještě dalšího označení: Je-li f funkce na N, pak symbolem $|f|$ označíme funkci, jejíž hodnota v bodě $k \in N$ je $|f_k|$. Opět předpokládáme v celém paragrafu, že jde o Markovův řetězec rekurentní. Funkce a konstanty mohou být však komplexní (ovšem vyjma případ nezáporných funkcí).

Věta 6. *Jestliže* $\sum_k f_k p_{jk} = f_j$ *pro každé* $j \in N$, *kde* $f \geqq 0$, *pak* f *je identicky rovna nějaké konstantě.*

Tato věta byla dokázána W. Fellerem [5]; jiný její důkaz byl podán v [13], věta 5.

Věta 7. *Jestliže* $Tf = f$, *kde* $f \in l_\infty(\varepsilon)$, *pak* f *je identicky rovna nějaké konstantě.*

Tato věta je totožná s první částí lemmatu 5 v [13].

Věta 8. *Jestliže* $T_p f = f$, *kde* $f \in l_p(\mu)$ (pro $1 \leqq p < \infty$), *pak* f *je identicky rovna nějaké konstantě. V případě nulově rekurentního řetězce to pak značí, že* $f = 0$ *identicky.*

Důkaz (který ostatně s pouhou změnou označení platí též pro větu 7). Komplexní funkci lze rozložit na její reálnou a imaginární část a uvažovat každou z nich odděleně.

Nechť tedy f je reálná. Z předpokladu zřejmě vyplývá $T_p|f| \geqq |f|$, takže podle věty 4 jest $T_p|f| = |f|$. Z toho dostáváme $T_p(|f| + f) = |f| + f$, $T_p(|f| - f) = |f| - f$, kde zřejmě $|f| + f \geqq 0$, $|f| - f \geqq 0$. Proto podle věty 6 existují dvě konstanty c_1, c_2 tak, že $|f| + f = c_1$, $|f| - f = c_2$ identicky. Tedy celkem $f = \frac{1}{2}[(|f| + f) - (|f| - f)] = \frac{1}{2}[c_1 - c_2]$ identicky.

Poslední tvrzení věty je zřejmé z toho, že pro nulově rekurentní řetězec $\mu(N) = \infty$, jak ukázal C. DERMAN [2].

Nyní se obrátíme k větám duálním. Je známo, že pro rekurentní řetězec existují invariantní míry μ; vyberme z nich jednu pevnou nenulovou míru a označme ji $\mu^{(0)}$. Podle lemmatu 1 v [13] je pak $\mu_k^{(0)} > 0$ pro každé $k \in N$.

Věta 6*. *Jestliže* $\sum_j g_j p_{jk} = g_k$ *pro každé* $k \in N$, *kde* $g \geqq 0$, *pak* $g_j = c\mu_j^{(0)}$ *pro každé* $j \in N$, *kde* c *je nějaká konstanta.*

Tuto větu dokázal Derman [2], užívaje ergodické věty pro Markovovy řetězce. Podáme zde jiný důkaz, který je elementárnější a v podstatě algebraický (využívá jen toho, že $\sum_{n=1}^{\infty} p_{rr}^{(n)} = \infty$ pro rekurentní řetězec).

Důkaz věty 6*. Pišme $\pi_{rs} = p_{sr}\mu_s^{(0)}/\mu_r^{(0)}$ pro $r, s \in N$ (takže matice $\{\pi_{rs}\}$ vlastně vyjadřuje operátor T_p^*). Poněvadž $\pi_{rs} \geqq 0$, $\sum_s \pi_{rs} = \sum_s p_{sr}\mu_s^{(0)}/\mu_r^{(0)} = 1$, jsou veličiny π_{rr} pravděpodobnostmi přechodu určitého Markovova řetězce $C^{(\pi)}$. Snadno se zjistí, že pravděpodobnosti přechodu $\pi_{rs}^{(n)}$ v $C^{(\pi)}$ za n kroků jsou rovny $\pi_{rs}^{(n)} = p_{sr}^{(n)}\mu_s^{(0)}/\mu_r^{(0)}$. Proto $\sum_{n=1}^{\infty} \pi_{rr}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} p_{rr}^{(n)} = \infty$, takže řetězec $C^{(\pi)}$ je rovněž rekurentní. Položme nyní $h_j = g_j/\mu_j^{(0)}$ pro každé $j \in N$. Pak $h_k\mu_k^{(0)} = g_k = \sum_j g_j p_{jk} = \sum_j h_j \mu_j^{(0)} p_{jk}$, tedy $h_k = \sum_j h_j p_{jk} \mu_j^{(0)}/\mu_k^{(0)} = \sum_j h_j \pi_{kj}$. Avšak nyní věta 6 implikuje, že h je identicky rovno určité konstantě c, což značí $g_j = c\mu_j^{(0)}$ pro každé $j \in N$.

Věta 7*. *Jestliže* $T^+ g = g$, *kde* $g \in l_1(\varepsilon)$, *pak* $g_j = c\mu_j^{(0)}$ *pro každé* $j \in N$, *kde* c *je nějaká konstanta. Pro nulově rekurentní řetězec to značí, že* $g = 0$ *identicky.*

Důkaz je zcela obdobný jako u věty 8.

Věta 8*. *Jestliže* $T_p^* g = g$, *kde* $g \in l_q(\mu)$ *(pro* $1 \leqq p < \infty$*), pak* g *je identicky rovno nějaké konstantě. Stejné tvrzení platí pro* T_∞^+ *a* $g \in l_1(\mu)$. *Pro nulově rekurentní řetězec a pro* $1 < p \leqq \infty$ *to značí, že* $g = 0$ *identicky.*

Důkaz. Podobně jako v důkazu věty 8 dostaneme $T_p^*(|g| + g) = |g| + g$, tj. $\sum_j (|g_j| + g_j) p_{jk}\mu_j/\mu_k = |g_k| + g_k$, ale pak věta 6* implikuje $(|g_j| + g_j)\mu_j = c_1\mu_j^{(0)}$ pro každé $j \in N$ a nějakou konstantu c_1. Podobně též lze odvodit $(|g_j| - g_j)\mu_j = c_2\mu_j^{(0)}$, takže celkem $g_j\mu_j = \frac{1}{2}[(|g_j| + g_j)\mu_j - (|g_j| - g_j)\mu_j] = \frac{1}{2}\mu_j^{(0)}[c_1 - c_2]$. Poněvadž konečně věta 6* dává $\mu_j = c\mu_j^{(0)}$ pro určitou konstantu c, je tvrzení věty dokázáno.

5. SPEKTRÁLNÍ POLOMĚR A NORMA OPERÁTORŮ T_p

V paragrafech 5, 6 a 7 obrátíme svou pozornost k některým spektrálním vlastnostem operátorů T_p. Tyto tři paragrafy jsou téměř úplně nezávislé na předchozích paragrafech; kromě jediného výsledku budeme nyní používat z předchozích částí práce pouze označení operátorů T a T_p.

Dále zavedeme následující označení: Je-li R nějaký operátor v Banachově prostoru, pak $\sigma(R)$ je jeho spektrum, $\sigma_p(R)$ bodové, $\sigma_c(R)$ spojité, $\sigma_r(R)$ residuální spektrum, $\varrho(R)$ *jeho resolventní množina. (Definice viz např.* N. Dunford, J. T. Schwartz [3], *VII. 3. 1 a VII. 5. 1.) Konečně* $r(R)$ *budiž spektrální poloměr* R, to jest $r(R) = \sup_{\lambda\in\sigma(R)} |\lambda|$. *Je známo, viz např. [3], VII. 3. 4, že* $r(R) \leqq \|R\|$.

V tomto paragrafu se zabýváme nerovností $r(T_p) \leqq \|T_p\|_{p,\mu}$. Výsledky jsou velmi jednoduché, ale pro přehlednost je formulujeme jako věty; dále uvádíme řadu příkladů.

Připomeňme pro úplnost triviální fakt, že pro funkci $e^{(0)}$ identicky rovnou 1 platí $Te^{(0)} = e^{(0)}$, $e^{(0)} \in l_\infty(\varepsilon)$, takže $1 \in \sigma_p(T)$, a proto $r(T) = \|T\|_{\infty,\varepsilon} = 1$.

Věta 9. *Nechť Markovův řetězec je rekurentní. Pak* $r(T_p) = \|T_p\|_{p,\mu} = 1$ *pro* $1 \leqq p \leqq \infty$.

Důkaz. Předpokládejme, že by bylo $r(T_p) < 1$. Pak podle věty VII. 3. 4 v knize [3] by $\sum_{n=0}^{\infty} T_p^n$ konvergovala ve stejnoměrné operátorové topologii. Speciálně by bylo $\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} < \infty$, což je spor s rekurentností řetězce. Proto $1 \leqq r(T_p) \leqq \|T_p\|_{p,\mu} \leqq 1$, což dává tvrzení věty.

Věta 10. *Nechť řetězec je positivně rekurentní. Pak* $1 \in \sigma_p(T_p)$ *pro* $1 \leqq p \leqq \infty$.

Důkaz. Je-li opět $e^{(0)}$ funkce identicky rovná 1, pak zřejmě $T_p e^{(0)} = e^{(0)}$, $e^{(0)} \in l_p(\mu)$.

Věta 11. *Nechť řetězec je nulově rekurentní. Pak* $1 \in \sigma_c(T_p) \cup \sigma_r(T_p)$ *pro* $1 \leqq p < \infty$.

Důkaz. Věta 9 dává $r(T_p) = 1$. Jelikož T_p je positivní operátor, podle Karlinovy věty 4 v [7] musí být $1 \in \sigma(T_p)$. Kdyby $1 \in \sigma_p(T_p)$, pak by existovala nenulová funkce $f \in l_p(\mu)$ taková, že $T_p f = f$. Podle věty 8 však máme $f = 0$ identicky, takže $1 \in \sigma(T_p) - \sigma_p(T_p) = \sigma_c(T_p) \cup \sigma_r(T_p)$.

Zbývá tedy nyní zjistit vztah mezi $r(T_p)$ a $\|T_p\|_{p,\mu}$ pro transientní řetězce. Podobně jako v [13] omezíme se zde na operátor T_2 v Hilbertově prostoru $l_2(\mu)$. Na příkladech ukážeme, že pro normu a spektrální poloměr T_2 mohou nastat nejrůznější situace.

Příklad 2. Nechť stavy řetězce jsou čísla $0, 1, 2, \ldots$, nechť pravděpodobnosti přechodu jsou $p_{00} = q$, $p_{01} = p$, pro $k \geqq 1$ dále $p_{k,k-1} = q$, $p_{k,k+1} = p$ a všechny ostatní rovny 0. Zde p, q jsou nějaká kladná čísla, pro něž $p + q = 1$. (Přidržujeme se obvyklého značení a vzdáváme se v tomto příkladu naší úmluvy z paragrafu 2 o významu písmen p a q.) Snadným výpočtem lze zjistit, že řetězec má invariantní míru μ, danou $\mu_k = p^k/q^k$ pro $k = 0, 1, 2, \ldots$ Podle Dermana [2] a paragrafu 7 v [13] je positivní rekurentnost řetězce ekvivalentní s podmínkou $\sum_k \mu_k < \infty$, což je dále ekvivalentní s nerovností $p < q$, to jest $p < \frac{1}{2}$. Dále je známo, (viz např. S. Karlin, J. McGregor [8], str. 71), že rekurentnost řetězce našeho typu je ekvivalentní s podmínkou $\sum_k 1/p_{k,k+1}\mu_k = \infty$, to jest $\sum_k q^k/p^k = \infty$, což je ekvivalentní s nerovností $q \geqq p$, to jest $p \leqq \frac{1}{2}$. Tedy pro $p < \frac{1}{2}$ je řetězec positivně rekurentní, pro $p = \frac{1}{2}$ nulově rekurentní, pro $p > \frac{1}{2}$ transientní.

V rekurentním případě máme nyní $\|T_2\|_{2,\mu} = 1$. Ukážeme, že v transientním případě $\|T_2\|_{2,\mu} \leqq \sqrt{(4pq)}$. Máme pro $f \in l_2(\mu)$ předně

$$\|T_2 f\|_{2,\mu}^2 = \sum_k |(T_2 f)_k|^2 \mu_k = |qf_0 + pf_1|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |qf_{k-1} + pf_{k+1}|^2 p^k q^{-k} \leqq$$
$$\leqq (q|f_0| + p|f_1|)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (q|f_{k-1}| + p|f_{k+1}|)^2 p^k q^{-k}.$$

Nyní použijeme známé nerovnosti $(a + b)^2 \leqq 2(a^2 + b^2)$ a dostáváme dále

$$\|T_2 f\|_{2,\mu}^2 \leqq 2q^2|f_0|^2 + 2p^2|f_1|^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(q^2|f_{k-1}|^2 + p^2|f_{k+1}|^2)\, p^k q^{-k} =$$
$$= 2q^2|f_0|^2 + 2pq|f_1|^2\, pq^{-1} + 2\sum_{k=1}^{\infty} pq|f_{k-1}|^2\, p^{k-1}q^{-k+1} +$$
$$+ 2\sum_{k=1}^{\infty} pq|f_{k+1}|^2\, p^{k+1}q^{-k-1}.$$

Poněvadž pro transientní případ $q < p$, můžeme zřejmě pokračovat

$$\|T_2 f\|_{2,\mu}^2 \leqq 2pq|f_0|^2 + 2pq|f_1|^2\, pq^{-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} pq|f_n|^2\, p^n q^{-n} +$$
$$+ 2\sum_{n=2}^{\infty} pq|f_n|^2\, p^n q^{-n} = 4pq\sum_{n=0}^{\infty}|f_n|^2\, p^n q^{-n} = 4pq\|f\|_{2,\mu}^2.$$

Vidíme tedy, že $r(T_2) \leqq \|T_2\|_{2,\mu} \leqq \sqrt{(4pq)}$. Celkem snadno konstruktivně by bylo možno ukázat, že bod $\sqrt{(4pq)} \in \sigma(T_2)$, čímž by naše původní otázka byla zodpověděna. Přesto snad bude zajímavé využít příležitosti, kterou nám poskytují výsledky Karlina, McGregora v [8], a určit pro náš příklad spektrum T_2 přesně.

Podle této práce [8], str. 69 a 73, máme

$$p_{jj}^{(n)} = \mu_j \int_{-1}^{1} x^n\, Q_j^2(x)\, \mathrm{d}\psi(x) \quad \text{pro} \quad n, j = 0, 1, 2, \ldots \tag{8}$$

kde Q_j jsou určité polynomy, funkce ψ je dána hustotou

$$\psi'(x) = \frac{1}{2\pi q} \frac{\sqrt{(4pq - x^2)}}{1 - x} \quad \text{pro} \quad -\sqrt{(4pq)} < x < (4pq)\,, \tag{9}$$
$$\psi'(x) = 0 \qquad \text{jinde}\,,$$

a pro $p < \frac{1}{2}$ má ψ navíc ještě skok velikosti $(1 - 2p)/(1 - p) = (q - p)/q$ v bodě 1.

Je známo a je celkem snadné ukázat, že operátor T_2 v $l_2(\mu)$ je samoadjungovaný. Označíme-li (f, g) skalární součin funkcí f, g z Hilbertova prostoru $l_2(\mu)$, dále χ_j charakteristickou funkci jednobodové množiny $\{j\}$ a E_x rozklad jednotky příslušný k samoadjungovanému operátoru T_2, pak z věty 3.7 v [12] vidíme, že

$$p_{jj}^{(n)} \mu_j = (T_2^n \chi_j, \chi_j) = \int_{-1}^{1} x^n \,\mathrm{d}(E_x \chi_j, \chi_j) \quad \text{pro} \quad n, j = 0, 1, 2, \ldots \tag{10}$$

Z rovností (8) a (10) celkem tedy dostáváme

$$\int_{-1}^{1} x^n \,\mathrm{d}(E_x \chi_j, \chi_j) = \mu_j^2 \int_{-1}^{1} x^n \, Q_j^2(x) \,\mathrm{d}\psi(x) \quad \text{pro} \quad n, j = 0, 1, 2, \ldots$$

takže

$$(E_y \chi_j, \chi_j) = \mu_j^2 \int_{-1}^{y} Q_j^2(x) \,\mathrm{d}\psi(x) \quad \text{pro} \quad -1 < y < 1,\ j = 0, 1, 2, \ldots \tag{11}$$

Z (9) a (11) nyní vyplývá, že $(E_y \chi_j, \chi_j)$ jakožto funkce y je konstantní v intervalu $[-1, -\sqrt{(4pq)}]$, spojitá a rostoucí v $[-\sqrt{(4pq)}, \sqrt{(4pq)}]$, konstantní v $[\sqrt{(4pq)}, 1]$ a v případě $p < \frac{1}{2}$ má navíc ještě skok v bodě 1. Jsou-li čísla u, v v intervalu konstantnosti funkce $(E_y \chi_j, \chi_j)$, $u > v$, pak platí

$$0 = ((E_u - E_v)\,\chi_j, \chi_j) = \|(E_u - E_v)\,\chi_j\|_{2,\mu}^2\,, \quad \text{takže} \quad (E_u - E_v)\,\chi_j = 0\,.$$

Poněvadž však tato rovnost platí pro každé j, tedy přechodem ke konečným lineárním kombinacím funkcí χ_j a jejich limitám v $l_2(\mu)$ dostaneme $(E_u - E_v) f = 0$ pro každou $f \in l_2(\mu)$. Tím jsme ukázali, že rozklad jednotky E_y je rovněž konstantní v intervalech konstantnosti $(E_y \chi_j, \chi_j)$. Obdobnými úvahami a ze známých vět o vztahu E_y a spektra samoadjungovaných operátorů (viz např. N. I. Achijezer, I. M. Glazman [1], § 68, str. 261) dospíváme ke konečnému výsledku:

$$\begin{aligned}
&\text{pro} \quad p < \tfrac{1}{2} \quad \text{jest} \quad \sigma_p(T_2) = \{1\}\,, \quad \sigma_c(T_2) = [-\sqrt{(4pq)}, \sqrt{(4pq)}]\,,\\
&\text{pro} \quad p = \tfrac{1}{2} \quad \text{jest} \quad \sigma_p[T_2] = \emptyset\,, \quad \sigma_c(T_2) = [-1, 1]\,,\\
&\text{pro} \quad p > \tfrac{1}{2} \quad \text{jest} \quad \sigma_p(T_2) = \emptyset\,, \quad \sigma_c(T_2) = [-\sqrt{(4pq)}, \sqrt{(4pq)}]\,,
\end{aligned}$$

a vždy $\sigma_r(T_2) = \emptyset$, jelikož operátor T_2 je samoadjungovaný. Vidíme, že tento výsledek je ve shodě s našimi větami 9, 10 a 11 a s výsledky o vlastních hodnotách T_2 v práci [13].

Na náš původní problém o spektrálním poloměru a normě T_2 jsme tedy našli tuto odpověď: Pro $p > \frac{1}{2}$ máme transientní řetězec, pro nějž $r(T_2) = \|T_2\|_{2,\mu} = \sqrt{(4pq)} < 1$. Snad není bez zajímavosti podotknout, že tento příklad ukazuje, že norma T_2 může být menší než 1, i když míra μ je invariantní.

Příklad 3. Uveďme zde stručně ještě druhý příklad obdobné náhodné procházky, který studovali Karlin, McGregor [8]. Stavy jsou opět čísla $0, 1, 2, \ldots$, pravděpodobnosti přechodu $p_{01} = 1$, pro $k \geqq 1$ dále $p_{k,k-1} = q$, $p_{k,k+1} = p$ a všechny ostatní rovny 0. Opět p, q jsou kladná čísla, $p + q = 1$. Invariantní míra μ je dána $\mu_0 = 1$, $\mu_k = p^{k-1}/q^k$ pro $k \geqq 1$. Stejně jako dříve se zjistí, že opět pro $p < \frac{1}{2}$ je řetězec positivně rekurentní, pro $p = \frac{1}{2}$ nulově rekurentní, pro $p > \frac{1}{2}$ transientní. Rovněž obdobně lze dokázat pro transientní případ $\|T_2\|_{2,\mu} \leqq \sqrt{(4pq)}$. Dále Karlin, McGregor [8] ukázali, že platí rovnosti (8), kde nyní ψ je dána hustotou

$$\begin{aligned} (12) \qquad \psi'(x) &= \frac{1}{2\pi q} \frac{\sqrt{(4pq - x^2)}}{1 - x^2} \qquad \text{pro} \quad -\sqrt{(4pq)} < x < \sqrt{(4pq)}\,, \\ \psi'(x) &= 0 \qquad \text{jinde}\,, \end{aligned}$$

a pro $p < \frac{1}{2}$ má ψ navíc ještě skoky velikosti $(q - p)/2q$ v bodech $-1, +1$. Stejným postupem jako v předchozím příkladu 2 tedy konečně dostáváme:

$$\begin{aligned} &\text{pro} \quad p < \tfrac{1}{2} \quad \text{jest} \quad \sigma_p(T_2) = \{-1, +1\}\,, \quad \sigma_c(T_2) = [-\sqrt{(4pq)}, \sqrt{(4pq)}]\,, \\ &\text{pro} \quad p = \tfrac{1}{2} \quad \text{jest} \quad \sigma_p(T_2) = \emptyset\,, \quad \sigma_c(T_2) = [-1, 1]\,, \\ &\text{pro} \quad p < \tfrac{1}{2} \quad \text{jest} \quad \sigma_p(T_2) = \emptyset\,, \quad \sigma_c(T_2) = [-\sqrt{(4pq)}, \sqrt{(4pq)}]\,, \end{aligned}$$

a vždy $\sigma_r(T_2) = \emptyset$. To je opět ve shodě se všemi našimi výsledky a ukazuje pro transientní případ speciálně $r(T_2) = \|T_2\|_{2,\mu} = \sqrt{(4pq)} < 1$.

Příklad 4. Nechť stavy řetězce jsou $1, 2, \ldots$, pravděpodobnosti přechodu $p_{k1} = 4^{-k}$, $p_{k,k+1} = 1 - 4^{-k}$ pro $k = 1, 2, \ldots$, ostatní rovny 0. Výpočtem se přesvědčíme, že míra μ, definovaná $\mu_k = 2^k$, je subinvariantní. Poněvadž tato μ není invariantní, podle paragrafu 7 v [13] je řetězec transientní. Nyní pro $f \in l_2(\mu)$ snadno vidíme

$$\begin{aligned} \|T_2 f\|_{2,\mu}^2 &= \sum_j |\sum_k f_k p_{jk}|^2 \mu_j \leqq \sum_j \sum_k |f_k|^2 p_{jk} \mu_j = \\ = \sum_j \{|f_1|^2 \cdot 4^{-j} + |f_{j+1}|^2 (1 - 4^{-j})\} 2^j &\leqq |f_1|^2 + \sum_j |f_{j+1}|^2 \, 2^j = \\ &= \tfrac{1}{2}\{|f_1|^2 \cdot 2 + \sum_j |f_{j+1}|^2 \cdot 2^{j+1}\} = \tfrac{1}{2}\|f\|_{2,\mu}^2 \,. \end{aligned}$$

Tedy celkem $r(T_2) \leqq \|T_2\|_{2,\mu} \leqq 1/\sqrt{2} < 1$. Zřejmě řetězec je irreducibilní (pro reducibilní řetězec lze obdobný příklad sestrojit mnohem snadněji).

Příklad 5. Vezměme náhodnou procházku po celých číslech $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ s pravděpodobnostmi přechodu $p_{k,k-1} = q$, $p_{k,k+1} = p$ pro všechna k, kde p, q jsou kladná čísla, $p + q = 1$. Zřejmě míra μ, daná $\mu_k = 1$ pro každé k, je invariantní.

Je dobře známo (viz např. Fellerovu knihu [4]) že tento řetězec je pro $p = \frac{1}{2}$ nulově rekurentní, pro $p \neq \frac{1}{2}$ transientní. Definujme nyní funkce $e^{(n)}$ (pro $n = 1, 2, \ldots$) předpisem $e_k^{(n)} = (2n + 1)^{-1/2}$ pro $k = -n, -n + 1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n$, $e_k^{(n)} = 0$ pro ostatní k. Jest pak

$$\|e^{(n)}\|_{2,\mu}^2 = \sum_{k=-n}^{n} |e_k^{(n)}|^2 = (2n + 1)(2n + 1)^{-1} = 1$$

a snadno též zjistíme (zde I označuje identický operátor)

$$\|(I - T_2)\, e^{(n)}\|_{2,\mu}^2 = [(-p)^2 + (1 - p)^2 + (1 - q)^2 + (-q)^2](2n + 1)^{-1} = \\ = 2(p^2 + q^2)(2n + 1)^{-1}\,.$$

Tedy $\lim_{n\to\infty} \|(I - T_2)\, e^{(n)}\|_{2,\mu} = 0$, takže $1 \in \sigma(T_2)$ (viz např. E. Hille, R. S. Phillips [6], str. 54). Proto $r(T_2) = \|T_2\|_{2,\mu} = 1$.

Příklad 6. Vezměme opět řetězec z příkladu 2, o němž víme, že pro $p > \frac{1}{2}$, $q < \frac{1}{2}$ je transientní. Nyní však uvažujeme jinou míru μ, definovanou $\mu_k = 1$ pro každé k; zřejmě μ je subinvariantní, ale není invariantní. Definujme funkce $e^{(n)}$ (pro $n = 1, 2, \ldots$) předpisem $e_k^{(n)} = (n + 1)^{-1/2}$ pro $k = 0, 1, \ldots, n$, $e_k^{(n)} = 0$ pro ostatní k. Podobně jako v předchozím příkladu 5 pak máme

$$\|e^{(n)}\|_{2,\mu}^2 = \sum_{k=0}^{n} |e_k^{(n)}|^2 = (n + 1)(n + 1)^{-1} = 1\,,$$

$$\|(I - T_2)\, e^{(n)}\|_{2,\mu}^2 = [(1 - q)^2 + (-q)^2](n + 1)^{-1} = (p^2 + q^2)(n + 1)^{-1}\,,$$

takže opět stejným úsudkem dostaneme $r(T_2) = \|T_2\|_{2,\mu} = 1$.

Příklad 7. Markovův řetězec budiž definován stejně jako v příkladu 4, avšak míru μ nyní definujeme $\mu_{2k-1} = 2^{k-1}$, $\mu_{2k} = 2^{k-1}$ pro $k = 1, 2, \ldots$ Opět je možno snadno se přesvědčit, že μ je subinvariantní, ale není invariantní.

Definujme funkce $f^{(n)}$ (pro $n = 1, 2, \ldots$) předpisem $f_{2n}^{(n)} = 2^{(1-n)/2}$, $f_k^{(n)} = 0$ pro ostatní k. Máme pak $\|f^{(n)}\|_{2,\mu}^2 = (2^{(1-n)/2})^2 \mu_{2n} = 2^{1-n} \,.\, 2^{n-1} = 1$ a dále

$$\|T_2 f^{(n)}\|_{2,\mu}^2 = \sum_j \Big|\sum_k f_k^{(n)} p_{jk}\Big|^2 \mu_j = \sum_j |2^{(1-n)/2} p_{j,2n}|^2 \mu_j = \\ = |2^{(1-n)/2}(1 - 4^{-(2n-1)})|^2 \,.\, 2^{n-1} = (1 - 4^{-2n+1})^2\,.$$

Tedy $\lim_{n\to\infty} \|T_2 f^{(n)}\|_{2,\mu} = 1$, takže musí být $\|T_2\|_{2,\mu} = 1$.

Je možno nyní snadno zjistit, že pravděpodobnosti přechodu ze stavu j po 2 krocích jsou $p_{j1}^{(2)} = 4^{-j} \,.\, 4^{-1} + (1 - 4^{-j})\, 4^{-(j+1)}$, $p_{j2}^{(2)} = 4^{-j}(1 - 4^{-1})$, $p_{j,j+2}^{(2)} = (1 - 4^{-j}) \,.\, (1 - 4^{-(j+1)})$ a všechny ostatní p_{jr} jsou rovny 0.

Dokažme nyní pomocné tvrzení, že

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_{jk}^{(2)} \mu_j \leqq \tfrac{1}{2}\mu_k \quad \text{pro} \quad k = 1, 2, \ldots \tag{13}$$

Vskutku pro $k = 1$ máme

$$\sum_{=1}^{\infty} p_{j1}^{(2)} \mu_j = \sum_{j=1}^{\infty} [4^{-j} . 4^{-1} + (1 - 4^{-j}) 4^{-j-1}] \mu_j \leqq \tfrac{1}{4} \sum_{j=1}^{\infty} [4^{-j} + 4^{-j}] 2^j = \tfrac{1}{2} \leqq \tfrac{1}{2} \mu_1 ,$$

pro $k = 2$ máme

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_{j2}^{(2)} \mu_j = \sum_{j=1}^{\infty} 4^{-j}(1 - 4^{-1}) \mu_j \leqq \sum_{j=1}^{\infty} 4^{-j} . 2^{j-1} = \tfrac{1}{2} \leqq \tfrac{1}{2} \mu_2 ,$$

a konečně pro $k \geqq 3$ máme

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_{jk}^{(2)} \mu_j = p_{k-2,k}^{(2)} \mu_{k-2} = (1 - 4^{-(j-2)}) (1 - 4^{-(j-1)}) \mu_{k-2} \leqq \mu_{k-2} \leqq \tfrac{1}{2} \mu_k .$$

Tím je (13) dokázáno a nyní již snadno pro $f \in l_2(\mu)$ s pomocí (13) dostaneme

$$\|T_2^2 f\|_{2,\mu}^2 = \sum_j |\sum_k f_k p_{jk}^{(2)}|^2 \mu_j \leqq \sum_j \sum_k |f_k|^2 p_{jk}^{(2)} \mu_j =$$

$$= \sum_k |f_k|^2 \sum_j p_{jk}^{(2)} \mu_j \leqq \sum_k |f_k|^2 \cdot \tfrac{1}{2} \mu_k = \tfrac{1}{2} \|f\|_{2,\mu}^2 .$$

Proto $r(T_2^2) \leqq \|T_2^2\|_{2,\mu} \leqq 2^{-1/2}$. Kdyby nyní pro nějaké $\lambda \in \sigma(T_2)$ bylo $|\lambda| > 2^{-1/4}$, pak podle věty VII.3.11 v knize Dunforda, Schwartze [3] o spektru operátorové funkce by bylo $\lambda^2 \in \sigma(T_2^2)$ a zřejmě také $|\lambda^2| > 2^{-1/2}$, což je nemožné. Proto $\lambda \in \sigma(T_2)$ implikuje $|\lambda| \leqq 2^{-1/4}$, jinak řečeno $r(T_2) \leqq 2^{-1/4} < 1$; připomeňme, že nahoře jsme dokázali $\|T_2\|_{2,\mu} = 1$.

Závěrem tohoto paragrafu 5 shrňme přehledně fakta o spektrálním poloměru a normě T_2, která jsme zjistili pro transientní řetězce pomocí našich příkladů. Jako vždy písmeno μ zde bude značit subinvariantní míru řetězce.

Existuje řetězec, pro nějž $r(T_2) < 1$, $\|T_2\|_{2,\mu} < 1$, a to pro μ invariantní (příklady 2 a 3) i pro μ, jež není invariantní (příklad 4). Existuje řetězec, pro nějž $r(T_2) = \|T_2\|_{2,\mu} = 1$, a to opět pro μ invariantní (příklad 5) i pro μ, jež není invariantní (příklad 6). Existuje řetězec, pro nějž $r(T_2) < 1$, ale $\|T_2\|_{2,\mu} = 1$ (příklad 7).

6. SPEKTRUM V RŮZNÝCH PROSTORECH: PŘÍKLAD

V tomto paragrafu uvidíme, že i pro velmi jednoduché řetězce může nastat dosti komplikovaná situace: číslo může ležet v různých částech spektra podle toho, v kterém Banachově prostoru je základní Markovův operátor uvažován.

Přesně řečeno, ukážeme, že pro řetězec v následujícím příkladu jest $0 \in \sigma_r(T) \cap \sigma_c(T_2) \cap \sigma_p(T_1)$.

Příklad 8. Nechť stavy řetězce jsou čísla $0, 1, 2, \ldots$, nechť pravděpodobnosti přechodu jsou $p_{00} = \frac{2}{3}$, $p_{01} = \frac{1}{3}$, pro $k \geqq 1$ dále $p_{k,k-1} = \frac{2}{3}$, $p_{k,k+1} = \frac{1}{3}$ a všechny ostatní rovny 0. Řetězec je speciálním případem řetězce z příkladu 2 pro $q = \frac{2}{3}$, $p = \frac{1}{3}$ (s označením p, q z příkladu 2). Je vidět, že řetězec je positivně rekurentní a že invariantní míra μ je dána $\mu_k = 2^{-k}$ pro $k = 0, 1, 2, \ldots$

Předně z příkladu 2 vyplývá $0 \in \sigma_c(T_2)$.

Pro další postup úvah předpokládejme, že pro nějakou funkci h je

$$\sum_k h_k p_{jk} = 0 \quad \text{pro} \quad j = 0, 1, 2, \ldots \tag{14}$$

Ukážeme snadno úplnou indukcí, že z tohoto předpokladu (14) vyplývá

$$h_{2n-1} = (-2)^n h_0, \; h_{2n} = (-2)^n h_0 \quad \text{pro} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{15}$$

Vskutku pro $j = 0$ rovnost (14) jest $\frac{2}{3}h_0 + \frac{1}{3}h_1 = 0$, takže $h_1 = - 2h_0$, pro $j = 1$ rovnost (14) jest $\frac{2}{3}h_0 + \frac{1}{3}h_2 = 0$, takže $h_2 = - 2h_0$; (15) tedy je správné pro $n = 1$. Nechť nyní (15) platí pro nějaké n. Pro $j = 2n$ rovnost (14) je $\frac{2}{3}h_{2n-1} + \frac{1}{3}h_{2n+1} = 0$, takže $h_{2n+1} = - 2h_{2n-1} = (-2)^{n+1} h_0$, pro $j = 2n + 1$ rovnost (14) jest $\frac{2}{3}h_{2n} + \frac{1}{3}h_{2n+2} = 0$, takže $h_{2n+2} = - 2h_{2n} = (-2)^{n+1} h_0$; tím je tedy dokázána platnost rovností (15). Samozřejmě je ihned vidět, že také naopak (15) implikuje (14).

Volme nyní třeba $h_0 = 1$ a definujme funkci h rovnostmi (15). Pak $\|h\|_{1,\mu} = \sum_{n=0}^{\infty} |h_{2n}| \mu_{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} |h_{2n-1}| \mu_{2n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n . 2^{-2n} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n . 2^{-2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n+1} = 4$. Tedy $h \in l_1(\mu)$ a podle (14) máme $T_1 h = 0$. Tím jsme dokázali $0 \in \sigma_p(T_1)$.

Nyní zbývá ještě dokázat $0 \in \sigma_r(T)$. Předpokládejme nejprve, že by bylo $0 \in \sigma_p(T)$. Pak by muselo být $Th = 0$ pro nějakou h, tj. (14), což dále implikuje (15). Kdyby nyní bylo $h_0 = 0$, pak vzhledem k (15) $h = 0$ identicky; kdyby naopak $h_0 \neq 0$, pak opět vzhledem k (15) $h \notin l_\infty(\varepsilon)$. Tedy vidíme, že

$$0 \notin \sigma_p(T) . \tag{16}$$

Označme nyní $f^{(0)}$ funkci z $l_\infty(\varepsilon)$, pro kterou $f_0^{(0)} = 1$, $f_k^{(0)} = 0$ pro $k = 1, 2, \ldots$ Kdyby $0 \in \varrho(T)$, pak by existoval T^{-1}, a tudíž pro funkci $g = T^{-1}f^{(0)} \in l_\infty(\varepsilon)$ by bylo $Tg = f^{(0)}$. Kdyby dále $0 \in \sigma_c(T)$, pak by množina prvků Tf (pro $f \in l_\infty(\varepsilon)$) byla hustá v $l_\infty(\varepsilon)$, takže ke každému $\delta > 0$ by existovalo $g \in l_\infty(\varepsilon)$ tak, že $\|f^{(0)} - Tg\|_{\infty,\varepsilon} < \delta$. Předpokládejme, že by bylo $0 \in \varrho(T) \cup \sigma_c(T)$ a nechť $0 < \delta < \frac{1}{4}$; viděli jsme právě, že pak by existovalo $g \in l_\infty(\varepsilon)$ tak, že

$$\|f^{(0)} - Tg\|_{\infty,\varepsilon} < \delta . \tag{17}$$

Speciálně musí tedy být

$$|f_j^{(0)} - (Tg)_j| = |\sum_k g_k p_{jk}| < \delta \quad \text{pro} \quad j = 1, 2, \ldots \tag{18}$$

Ukážeme nyní úplnou indukcí

$$|g_{2n}| > 2^n(|g_0| - 3\delta) + 3\delta \quad \text{pro} \quad n = 1, 2, \cdots \tag{19}$$

Z nerovnosti (18) pro $j = 1$ vidíme $|\frac{2}{3}g_0 + \frac{1}{3}g_2| < \delta$. Z toho dostáváme $2|g_0| - |g_2| \leqq |2g_0 + g_2| < 3\delta$, takže $|g_2| > 2|g_0| - 3\delta$ a (19) je dokázáno pro $n = 1$. Nechť (19) je správné pro nějaké n. Pak z (18) pro $j = 2n + 1$ vidíme $|\frac{2}{3}g_{2n} + \frac{1}{3}g_{2n+2}| < \delta$. Z toho obdobně jako dříve a následujícím užitím indukčního předpokladu dostáváme

$$|g_{2n+2}| > 2|g_{2n}| - 3\delta > 2[2^n(|g_0| - 3\delta) + 3\delta] - 3\delta = \\ = 2^{n+1}(|g_0| - 3\delta) + 6\delta - 3\delta = 2^{n+1}(|g_0| - 3\delta) + 3\delta$$

a nerovnost (19) je tím dokázána. Zcela podobným postupem lze dokázat také

$$(20) \qquad |g_{2n+1}| > 2^n(|g_1| - 3\delta) + 3\delta \quad \text{pro} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Kdyby platilo $|g_0| > 3\delta$ nebo $|g_1| > 3\delta$, podle (19) a (20) by funkce g nemohla patřit do $l_\infty(\varepsilon)$. Proto máme $|g_0| \leqq 3\delta$, $|g_1| \leqq 3\delta$. Konečně (17) dává speciálně

$$|f_0^{(0)} - (Tg)_0| = |1 - \sum_k g_k p_{0k}| = |1 - \tfrac{2}{3}g_0 - \tfrac{1}{3}g_1| < \delta\,.$$

Dostáváme tedy $1 - \frac{2}{3}g_0 - \frac{1}{3}g_1 < \delta$, dále $1 < \frac{2}{3}g_0 + \frac{1}{3}g_1 + \delta \leqq \frac{2}{3} \,.\, 3\delta + \frac{1}{3} \,.\, 3\delta + \delta = 4\delta$, to znamená $\frac{1}{4} < \delta$; to je však spor s původním předpokladem $\delta < \frac{1}{4}$. Proto

$$(21) \qquad 0 \notin \varrho(T) \cup \sigma_c(T)\,.$$

Z (16) a (21) tedy vyplývá $0 \in \sigma_r(T)$, čímž náš důkaz je ukončen.

7. SPEKTRUM ROVNO JEDNOTKOVÉMU KRUHU: PŘÍKLAD

V tomto paragrafu zkonstruujeme Markovův řetězec se spočetným systémem stavů, pro který nastává extrémní případ: spektrum příslušného základního Markovova operátoru T v $l_\infty(\varepsilon)$ je rovno celému jednotkovému kruhu. Jde tu však o řetězec reducibilní.

Příklad 9. Dříve než přikročíme k vlastní konstrukci, musíme provést některé přípravné úvahy podle F. I. Karpeleviče [9].

Označme M_n množinu všech vlastních čísel všech konečných stochastických matic řádu n. Konvexní n-úhelník Q v komplexní rovině nazveme cyklickým, jestliže existuje komplexní číslo λ a celé číslo $p \leqq n$ takové, že Q je totožný s konvexním obalem systému bodů

$$\lambda^m e^{2\pi i q/p} \quad (m = 0, 1, \ldots;\ q = 0, 1, \ldots, p - 1)\,.$$

Konečně ještě označme K_n n-úhelník v komplexní rovině, který je konvexním obalem systému bodů

$$e^{2\pi i q/n} \quad (q = 0, 1, \ldots, n - 1)\,.$$

Karpelevič [9] dokázal, že oblast M_n je množinovým sjednocením všech cyklických k-úhelníků pro $k \leqq n$. Poněvadž K_n je zřejmě též cyklický n-úhelník, z tohoto výsledku speciálně vyplývá

$$K_n \subset M_n . \tag{22}$$

Dále se snadno nahlédne, že celý vnitřek jednotkového kruhu je obsažen v $\bigcup_{n=2}^{\infty} K_n$.

Nechť nyní všechny body s racionálními souřadnicemi uvnitř jednotkového kruhu jsou seřazeny do posloupnosti $r_1, r_2, r_3, \ldots$ Vezměme určité pevné r_j. Podle předešlého odstavce existuje určité $n(j)$ tak, že $r_j \in K_{n(j)}$, a dále vzhledem k (22) existuje stochastická matice P_j řádu $n(j)$ taková, že r_j je vlastním číslem P_j. To znamená

$$P_j f^{(j)} = r_j f^{(j)} \tag{23}$$

pro jakousi $n(j)$-člennou posloupnost $f^{(j)} \neq 0$.

Definujme nyní nekonečnou matici P tak, že na její hlavní diagonálu položíme za sebou matice $P_1, P_2, P_3, \ldots$, na všechna ostatní zbývající místa 0. P je pak stochastická matice, definuje určitý Markovův řetězec a příslušný operátor T je vyjádřen maticí P. Označme ještě dále $g^{(j)}$ nekonečnou posloupnost, která na prvních $n(1) + n(2) + \ldots + n(j-1)$ místech má 0, na dalších $n(j)$ místech čísla posloupnosti $f^{(j)}$ a na všech dalších místech opět 0. Z (23) je pak snadno vidět, že

$$Pg^{(j)} = r_j g^{(j)} \quad \text{pro} \quad j = 1, 2, 3, \ldots,$$

takže každé číslo r_j je vlastním číslem P; to znamená $r_j \in \sigma(T)$ pro každé $j = 1, 2, 3, \ldots$ Dále však množina všech r_j ($j = 1, 2, 3, \ldots$) je hustá v jednotkovém kruhu. Konečně, je známo, že $\sigma(T)$ je uzavřená množina obsažená v jednotkovém kruhu (viz např. Dunford, Schwartz [3] VII.3.4), a proto spektrum $\sigma(T)$ musí být rovno právě celému jednotkovému kruhu.

Literatura

[1] *Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман:* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Москва 1950.

[2] *C. Derman*: A solution to a set of fundamental equations in Markov chains. Proc. Amer. Math. Soc. *5* (1954), 332–334.

[3] *N. Dunford, J. T. Schwartz*: Linear operators I. New York 1958.

[4] *W. Feller*: An introduction to probability theory and its applications. New York 1950.

[5] *W. Feller*: Boundaries induced by non-negative matrices. Trans. Amer. Math. Soc. *83* (1956), 19–54.

[6] *E. Hille, R. S. Phillips*: Functional analysis and semi-groups. Providence 1957.

[7] *S. Karlin*: Positive operators. J. Math. Mech. *8* (1959), 907–938.

[8] *S. Karlin, J. McGregor*: Random walks. Illinois J. Math. *3* (1959), 66–81.

[9] *Ф. И. Карпелевич:* О характеристических корнях матриц с неотрицательными элементами. Изв. АН СССР, сер. мат., *15* (1951), 361—383.
[10] *D. G. Kendall*: Unitary dilations of Markov transition operators, and the corresponding integral representations for transition-probability matrices. Probability & Statistics, The Harald Cramér Volume, New York 1959, 139—161.
[11] *E. Nelson*: The adjoint Markoff process. Duke Math. J. *25* (1958), 671—690.
[12] *Z. Šidák*: Integral representations for transition probabilities of Markov chains with a general state space. Czech. Math. J. *12 (87)* (1962), 492—522.
[13] *Z. Šidák*: Eigenvalues of operators in denumerable Markov chains. Trans. Third Prague Conf. on Inf. Theory, Stat. Dec. Functions, Random Proc. 1962, Prague 1963.

Резюме

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ И ПРИМЕРЫ ИЗ ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ В ЦЕПЯХ МАРКОВА СО СЧЕТНОЙ СИСТЕМОЙ СОСТОЯНИЙ

ЗБЫНЕК ШИДАК (Zbyněk Šidák), Прага

Рассматривается цепь Маркова в дискретном времени со счетной системой состояний и стационарными вероятностями перехода p_{jk}; пусть μ — ее субинвариантная мера (см. [10], [11]).

Обозначим через $l_\infty(\varepsilon)$ банахово пространство всех ограниченных комплексных функций f на пространстве состояний с нормой $\|f\|_{\infty,\varepsilon} = \sup_k |f_k|$; далее через $l_p(\mu)$ (для $1 \leqq p < \infty$) — пространство подобных функций, для которых норма $\|f\|_{p,\mu} = (\sum_k |f_k|^p \mu_k)^{1/p}$ конечна.

Определим оператор T в $l_\infty(\varepsilon)$ так, что значение Tf в точке j равно $(Tf)_j = \sum_k f_k p_{jk}$. Той же самой формулой определим и оператор T_p (для $1 \leqq p < \infty$), но для функций из $l_p(\mu)$. Нормы этих операторов $\|T\|_{\infty,\varepsilon} = 1$, $\|T_p\|_{p,\mu} \leqq 1$ (см. [11]).

В части 2 показывается вид операторов, связанных с T и T_p отношением сопряженности; далее поясняется связь с оператором, использованным Кендаллом [10].

Часть 3 содержит несколько теорем, высказывающих, что для возвратной неприводимой цепи и для f из некоторых классов функций неравенство $Tf \leqq f$ влечет $Tf = f$, и аналогично для T_p и сопряженных операторов.

В части 4 доказывается для возвратных неприводимых цепей, что уравнение $Tf = f$ имеет по существу единственное решение f и опять аналогично для T_p и сопряженных операторов; часть 3 и 4 систематически дополняют известные частные результаты из [2], [5], [13].

Обозначим еще через $r(T_p)$ спектральный радиус T_p. В части 5 прежде всего отмечается, что для возвратной цепи $r(T_p) = \|T_p\|_{p,\mu} = 1$. Потом построен ряд примеров, показывающих, что для невозвратной цепи может случиться $r(T_2) < 1$, $\|T_2\|_{2,\mu} < 1$ для μ инвариантной и для μ неинвариантной; может случиться $r(T_2) = \|T_2\|_{2,\mu} = 1$ для μ инвариантной и для μ неинвариантной; может случиться $r(T_2) < 1$, $\|T_2\|_{2,\mu} = 1$ (для μ неинвариантной).

Часть 6 показывает пример цепи, для которой число 0 лежит в точечном спектре T_1, в непрерывном спектре T_2 и в резидуальном спектре T.

В части 7 построена приводимая цепь, для которой спектр T равен целому единичному кругу.

В сущности статья содержит некоторые дополнения и примеры к предыдущей работе [13].

Summary

SOME THEOREMS AND EXAMPLES IN THE THEORY OF OPERATORS IN DENUMERABLE MARKOV CHAINS

ZBYNĚK ŠIDÁK, Praha

Let us consider a Markov chain in discrete time, with a denumerable state space and stationary transition probabilities p_{jk}; let μ be its sub-invariant measure (see [10], [11]).

Denote by $l_\infty(\varepsilon)$ the Banach space of all bounded complex functions f on the state space with the norm $\|f\|_{\infty,\varepsilon} = \sup_k |f_k|$; and by $l_p(\mu)$ (for $1 \leqq p < \infty$) the space of functions f for which the norm $\|f\|_{p,\mu} = (\sum_k |f_k|^p \mu_k)^{1/p}$ is finite.

Define the operator T in $l_\infty(\varepsilon)$ so that the value of Tf at the point j is $(Tf)_j = \sum_k f_k p_{jk}$. The same formula defines the operator T_p (for $1 \leqq p < \infty$) for functions f from $l_p(\mu)$. The norms of these operators are $\|T\|_{\infty,\varepsilon} = 1$, $\|T_p\|_{p,\mu} \leqq 1$ (see [11]).

In section 2, the form of operators adjoint to T and T_p is shown; and the connection with the operator used by Kendall [10] is examined.

Section 3 contains several theorems stating that for an irreducible recurrent chain and for f from certain classes of functions, the inequality $Tf \leqq f$ implies $Tf = f$, and similarly for T_p and for the adjoint operators.

Section 4 proves that for an irreducible recurrent chain, the equation $Tf = f$ has an essentially unique solution f, and again similarly for T_p and for the adjoint operators. Sections 3 and 4 systematically complete some special known results from [2], [5], [13].

Denote by $r(T_p)$ the spectral radius of T_p. In section 5, it is first shown that for a recurrent chain $r(T_p) = \|T_p\|_{p,\mu} = 1$. Then a series of examples is constructed showing that for a transient chain different cases can happen: the case $r(T_2) < 1$, $\|T_2\|_{2,\mu} < 1$ for μ invariant and for μ non-invariant; the case $r(T_2) = \|T_2\|_{2,\mu} = 1$ for μ invariant and for μ non-invariant; the case $r(T_2) < 1$, $\|T_2\|_{2,\mu} \doteq 1$ (for μ non-invariant).

Section 6 contains an example of a chain for which the number 0 lies in the point spectrum of T_1, in the continuous spectrum of T_2, and in the residual spectrum of T.

In section 7 a reducible chain is constructed for which the spectrum of T is equal to the whole unit circle.

The paper consists of some supplements and examples to the previous paper [13].