Časopis pro pěstování matematiky, roč. 88 (1963), Praha

О ПРИНЦИПЕ УСРЕДНЕНИЯ В НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ СЛУЧАЯХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

ЯРОСЛАВ КУРЦВЕЙЛЬ (Jaroslav Kurzweil), Прага

(Поступило в редакцию 16/VI 1962 г.)

В работе доказывается, что принцип усреднения, доказанный для обыкновенных дифференциальных уравнений Боголюбовым,[1]) имеет место и для обыкновенных дифференциальных уравнений в пространстве Банаха. Возможность использования этого принципа при решении краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными доказана на слабо нелинейном уравнении для колебаний струны; на нескольких конкретных примерах решается вопрос, останутся ли решения автономного слабо нелинейного уравнения струны ограниченными для $t \to \infty$.

1. ПРИНЦИП УСРЕДНЕНИЯ

Пусть X — пространство Банаха, G — открытая часть X. Пусть функции $f_k(x, t)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ определены и непрерывны для $x \in G$, $t \in \langle 0, T \rangle$, $T > 0$ и принимают значения из X, $\|x\|$ — норма вектора x.

Теорема 1,1. *Пусть*

$$\|f_k(x, t)\| \leqq K_1\,, \quad \|f_k(x_2, t) - f_k(x_1, t)\| \leqq K_1\|x_2 - x_1\|\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Пусть урванение

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f_0(x, t) \tag{1,1}$$

имеет решение $x_0(t)$, $t \in \langle 0, T \rangle$, $x_0(0) = x_0$ *и пусть* $x_j = x_0$ *и*

$$\int_{t_1}^{t_2} f_j(x, t)\,\mathrm{d}t \to \int_{t_1}^{t_2} f_0(x, t)\,\mathrm{d}t\,, \quad j = 1, 2, 3, \ldots \tag{1,2}$$

Тогда для всех достаточно больших j *существуют решения* $x_j(t)$ *уравнения*

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f_j(x, t)\,, \quad x_j(0) = x_j \tag{1,3}$$

---

[1]) См. [1], [2]. Краткие сведения об использовании принципа усреднения можно почерпнуть из [4], XII, § 4.

и

$$(1,4) \qquad x_j(t) \to x_0(t) \quad \text{равномерно на } \langle 0, T \rangle .$$

Если обозначить

$$\varrho_j(x) = \max_{t_1,t_2} \left\| \int_{t_1}^{t_2} [f_j(x, t) - f_0(x, t)] \, dt \right\| \quad \text{для} \quad x \in G,\ t_1, t_2 \in \langle 0, T \rangle ,$$

то

$$(1,5) \quad \|x_j(t) - x_0(t)\| \leqq e^{K_1 t} [\|x_j - x_0\| + \min_{s=1,2,3,\dots} \{ \sum_{q=0}^{s-1} \varrho_j(x_0(qt/s) + 2T^2 K_2/s \}] ,$$

$$K_2 = (e^{K_1 T} - 1 - K_1 T) T^{-2} .$$

(Итак, если сходимость в (1,2) равномерна относительно $x \in G$, $t_1, t_2 \in \langle 0, T \rangle$, то $\|x_j(t) - x_0(t)\|$ можно оценить независимо от x_0.)

Замечание 1,1. Положим $\varrho_j = \sup_{x \in G} \varrho_j(x)$. Если $\varrho_j \leqq 2(3 - 2\sqrt{2}) T^2 K_2$, то в ингервале $\langle \sqrt{2}\, T K_2^{1/2} \varrho_j^{-1/2}, 2T K_2^{1/2} \varrho_j^{-1/2} \rangle$ лежит хотя бы одно целое число s и

$$\min_{s=1,2,3,\dots} (\varrho_j s + 2T^2 K_2 s) \leqq 3T K_2^{1/2} \varrho_j^{1/2} ,$$

и таким образом

$$(1,6) \qquad \|x_j(t) - x_0(t)\| \leqq e^{K_1 t} (\|x_j - x_0\| + 3T K_2^{1/2} \varrho_j^{1/2}) .$$

Если $x_j = x_0$, то можно писать $\|x_j(t) - x_0(t)\| = O(\varrho_j^{1/2})$. Оценка $\|x_j(t) - x_0(t)\| = o(\varrho_j^{1/2})$, вообще говоря, не имеет места даже если X конечномерно.

Это можно показать на системе

$$\frac{dR}{dt} = j^{-1} \cos j(t - \varphi) , \quad \frac{d\varphi}{dt} = 1 , \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Предельная система имеет вид $dR/dt = 0$, $d\varphi/dt = 1$. Здесь $\varrho_j = j^{-2}$, однако для расстояния решений этих двух систем не имеет места оценка $o(j^{-1})$.

Доказательство теоремы 1.1 коротко. По существу тем же способом теорема 1,1 доказана в [3] в предположении, что X конечномерно.

Лемма 1,1. *Если* $x_k(t)$ — *решение уравнения* (1,3) *или* (1,1), *то*

$$(1,7) \qquad x_k(t_2) - x_k(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f_k(x_k(t_1), t) \, dt + Z , \quad \|Z\| \leqq K_2 (t_2 - t_1)^2 .$$

(Мы молча предполагаем, что расстояние точки $x_k(t_1)$ от дополнения множества G больше $K_2(t_2 - t_1)^2$.)

Доказательство. Если искать $x_k(t)$ обычным способом как предел последовательных приближений $y_i(t)$, где

$$y_0(t) = x_k(t_1) , \quad y_{i+1}(t) = x_k(t_1) + \int_{t_1}^{t} f_k(y_i(\tau), \tau) \, d\tau ,$$

то

$$\|x_k(t) - y_1(t)\| \leqq e^{K_1(t-t_1)} - 1 - K_1(t - t_1),$$

откуда для $t = t_2$ получаем (1,7).

Доказательство теоремы 1,1. Очевидно существует такое T_1, $0 < T_1 \leqq \leqq T$, что решение $x_k(t)$ определено на интервале $\langle 0, T_1 \rangle$. Ограничимся доказательством теоремы 1,1 на интервале $\langle 0, T_1 \rangle$. Пусть r, s, $r \leqq s$ — натуральные числа, $0 \leqq t \leqq T_1$. Согласно лемме 1,1 имеет место

$$x_k\left(\frac{r}{s}t\right) - x_k(0) = \sum_{p=0}^{r-1} \int_{pt/s}^{(p+1)t/s} f_k(x_k(pt/s), \tau)\, d\tau + Z_{r,s,k},$$

$$\|Z_{r,s,k}\| \leqq K_2 rt^2/s^2, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Отсюда

$$x_j(rt/s) - x_0(rt/s) = x_j - x_0 + \sum_{p=0}^{r-1} \int_{pt/s}^{(p+1)t/s} [f_j(x_j(pt/s), \tau) - f_j(x_0(pt/s), \tau)]\, d\tau +$$

$$+ \sum_{p=0}^{r-1} \int_{pt/s}^{(p+1)t/s} [f_j(x_0(pt/s), \tau) - f_0(x_0(pt/s), \tau)]\, d\tau + Z_{r,s,j} - Z_{r,s,0}, \quad j = 1, 2, 3, \ldots$$

$$(1,8) \qquad \|x_j(rt/s) - x_0(rt/s)\| \leqq \frac{t}{s} K_1 \sum_{p=0}^{r-1} \|x_j(pt/s) - x_0(pt/s)\| + \zeta_{s,j},$$

$$\zeta_{s,j} = \sum_{p=0}^{s-1} \left\| \int_{pt/s}^{(p+1)t/s} [f_j(x_0(pt/s), \tau) - f_0(x_0(pt/s), \tau)]\, d\tau \right\| + 2K_2 T_1^2/s + \|x_j - x_0\|.$$

Из (1,8) следует

$$\|x_j(rt/s) - x_0(rt/s)\| \leqq \zeta_{s,j}(1 + K_1 t/s)^{r-1}, \quad \|x_j(t) - x_0(t)\| \leqq \zeta_{s,j} e^{K_1 t}.$$

Так как $\zeta_{s,j} \to 2T_1^2 K_2/s$ для $j \to \infty$, то $x_j(t) \to x_0(t)$, а так как $x_k(t)$ — липшицевские с постоянной K_1, то сходимость равномерна. Оценка (1,5) очевидна.

2. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ КОЛЕБАНИЙ СЛАБО НЕЛИНЕЙНОЙ СТРУНЫ

2,1. Краевая задача. Наша цель — исследовать для малых ε решение $u(x, t, \varepsilon) = u(x, t)$, $0 \leqq x \leqq 1$, $t \geqq 0$ уравнения

$$(2,1) \qquad u_{tt} - u_{xx} = \varepsilon f(x, t, u, u_x, u_t)$$

с краевыми условиями $u(0, t) = u(1, t) = 0$ и с начальными условиями $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$. Мы будем исходить из предположений, обеспечивающих существование решения в классическом смысле:

(α) $f(x, t, u, v, w)$ определена для $0 \leqq x \leqq 1$, $t \geqq 0$ и для всех u, v, w, непрерывна и обладает непрерывными производными;

(β) для каждого $H > 0$ существует $R = R(H)$ так, что если $u^2 + v^2 + w^2 \leqq H^2$, то $|f|, |f_x|, |f_u|, |f_v|, |f_w| \leqq R$ и функции f, f_x, f_u, f_v, f_w удовлетворяют условию Липшица относительно переменных x, u, v, w с постоянной R;

(γ) φ и ψ определены для $0 \leqq x \leqq 1$, φ обладает непрерывной производной второго порядка, ψ обладает непрерывной производной первого порядка, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$;

(δ) $f(0, t, 0, v, 0) = f(1, t, 0, v, 0) = 0$, $\varphi''(0) = \varphi''(1) = 0$.

2,2. Краевая задача и задача Коши. Расширим область определения функций φ и ψ на все действительные x так, чтобы имели место равенства

$$\varphi(-x) = -\varphi(x) = \varphi(2 - x), \quad \psi(-x) = -\psi(x) = \psi(2 - x). \tag{2,2}$$

Область определения функции f мы изменим так, что f бидет определена для всех $x \neq n$, $n = \ldots -1, 0, 1, \ldots$, $t \geqq 0$, u, v, w и для $x = n$, $t \geqq 0$, $u = 0 = w$, $-\infty < v < \infty$, причем имеет место

$$f(-x, t, -u, v, -w) = -f(x, t, u, v, w) = f(2 - x, t, -u, v, -w). \tag{2,3}$$

Очевидно, $f(n, t, 0, v, 0) = 0$ и f непрерывна в своей области определения. Мы будем искать решение $u(x, t, \varepsilon) = u(x, t)$ задачи Коши для уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} = \varepsilon f(x, t, u, u_x, u_t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t \geqq 0 \tag{2,4}$$

с начальными условиями $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$. Применяя метод последовательных приближений к уравнению

$$2u(x, t) = \varphi(x + t) + \varphi(x - t) + \int_{x-t}^{x+t} \psi(\sigma)\, d\sigma + \\ + \varepsilon \int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\sigma, \tau, u(\sigma, \tau), u_x(\sigma, \tau)\, u_t(\sigma, \tau))\, d\sigma\, d\tau \tag{2,5}$$

и к уравнениям, которые получаются дифференцированием этого уравнения, мы убедимся в том, что существует единственное решение $u(x, t)$ задачи Коши, определенное для $-\infty < x < \infty$, $0 \leqq t \leqq L/\varepsilon$ (где L не зависит от ε), и что оно обладает непрерывными производными второго порядка, причем

$$u(-x, t) = -u(x, t) = u(2 - x, t). \tag{2,6}$$

Этого мы не будем здесь доказывать; указанное утверждение следует из теоремы о существовании для уравнения (2,17), как мы наметим и п. 2,3. Ограничивая область определения найденной таким образом функции $u(x, t)$ у переменной x на $0 \leqq x \leqq 1$, мы получим решение краевой задачи, сформулированной в п. 2,1.

Замечание 2,1. Если не имеет места (δ), можно убедиться, как и ранее, что уравнение (2,5) имеет решение, обладающее непрерывными производными первого порядка; производные же второго порядка могут иметь разрывы непрерывности в тех точках, где $x + t = n$, $x - t = n$, $x = n$, $n = \ldots -1, 0, 1, \ldots$ В настоящей работе можно было бы обойтись без предположения (δ), если бы мы теорему 1,1 доказали в более сильной формулировке.

2.3. Преобразование задачи Коши. Если $v(x)$ — интегрируемая и периодическая функция с периодом 2, $\int_0^2 v(x)\,\mathrm{d}x = 0$, то пусть $I_x v = I_x v(x) = V(x)$ означает такую функцию, что

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} V(x) = v(x)\,, \quad \int_0^2 V(x)\,\mathrm{d}x = 0\,. \tag{2,7}$$

Это значит, что

$$V(x) = \int_0^x v(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^2 \frac{1}{2}(\xi - 2)\,v(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2}\int_x^{x+2}(\xi - x - 1)\,v(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Отсюда

$$\max_x |V(x)| \leqq \tfrac{1}{2} \sup_\xi \operatorname{ess} |v(\xi)|\,. \tag{2,8}$$

Определим функции $\tilde{S}(\xi, \tau)$ и $\tilde{R}(\xi, \tau)$, $-\infty < \xi < \infty$, $0 \leqq \tau \leqq L/\varepsilon$ при соотношения

$$\begin{aligned} \tilde{S}(x + t, t) &= \tfrac{1}{2}u(x, t) + \tfrac{1}{2}I_x u_t(x, t)\,, \\ \tilde{R}(x - t, t) &= \tfrac{1}{2}u(x, t) - \tfrac{1}{2}I_x u_t(x, t)\,. \end{aligned} \tag{2,9}$$

Функции $\tilde{S}$ и $\tilde{R}$ обладают непрерывными производными $\partial^2/\partial\xi^2$ и $\partial^2/\partial\xi\,\partial\tau$ и из (2,6), (2,9) и (2,1) следует

$$\tilde{S}(-x, t) = -\tilde{R}(x, t) = \tilde{S}(-x + 2, t)\,, \tag{2,10}$$

$$\tilde{S}_\tau(x + t, t) + \tilde{R}_\tau(x - t, t) = 0\,,$$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \tilde{S}(x + t, t) + \tilde{R}(x - t, t)\,, \\ u_t(x, t) &= \tilde{S}_\xi(x + t, t) - \tilde{R}_\xi(x - t, t)\,, \end{aligned} \tag{2,11}$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{\xi\tau}(x + t, t) &= \frac{\varepsilon}{2} f(x, t, \tilde{S}(x + t, t) + \tilde{R}(x - t, t), \tilde{S}_\xi + \tilde{R}_\xi, \tilde{S}_\xi - \tilde{R}_\xi), \\ \tilde{R}_{\xi\tau}(x - t, t) &= -\frac{\varepsilon}{2} f(x, t, \tilde{S}(x + t, t) + \tilde{R}(x - t, t)\,, \tilde{S}_\xi + \tilde{R}_\xi, \tilde{S}_\xi - \tilde{R}_\xi)\,. \end{aligned} \tag{2,12}$$

Учитывая (2,10), можно систему (2,12) заменить уравнением

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{\xi\tau}(x + t, t) = \frac{\varepsilon}{2} f(x, t, \tilde{S}(x + t, t) - \tilde{S}(-x + t, t)\,,\ & \tilde{S}_\xi(x + t, t) + \tilde{S}_\xi(-x + t, t), \\ & \tilde{S}_\xi(x + t, t) - \tilde{S}_\xi(-x + t, t))\,. \end{aligned}$$

Здесь мы подставим $x + t = \xi$; тогда

$$\tilde{S}_{\xi,\tau}(\xi, t) = \frac{\varepsilon}{2} f(\xi - t, t, \tilde{S}(\xi, t) - \tilde{S}(-\xi + 2t, t), \tilde{S}_\xi(\xi, t) + \tilde{S}_\xi(-\xi + 2t, t),$$
$$\tilde{S}_\xi(\xi, t) - \tilde{S}_\xi(-\xi + 2t, t)) .$$

Положим далее

$$S(\xi, \tau) = \tilde{S}(\xi, \tau/\varepsilon) , \quad \varepsilon t = \tau . \tag{2,13}$$

Очевидно, имеем

$$S_\xi(\xi, \tau) = \tilde{S}_\xi(\xi, \tau/\varepsilon) , \quad S_{\xi\tau}(\xi, \tau) = \varepsilon^{-1}\tilde{S}_{\xi\tau}(\xi, \tau/\varepsilon) ,$$

следовательно

$$\begin{aligned} S_{\xi\tau}(\xi, \tau) = \tfrac{1}{2} f(\xi - \tau/\varepsilon, \tau/\varepsilon, S(\xi, \tau) - S(-\xi + 2\tau/\varepsilon, \tau) , \\ S_\xi(\xi, \tau) + S_\xi(-\xi + 2\tau/\varepsilon, \tau) , \quad S_\xi(\xi, \tau) - S_\xi(-\xi + 2\tau/\varepsilon, \tau)] . \end{aligned} \tag{2,14}$$

Согласно (2,10), (2,9) и (2,13) будет

$$\begin{aligned} u(x, t, \varepsilon) &= S(x + t, \varepsilon t, \varepsilon) - S(-x + t, \varepsilon t, \varepsilon) , \\ u_t(x, t, \varepsilon) &= S_\xi(x + t, \varepsilon t, \varepsilon) - S_\xi(-x + t, \varepsilon t, \varepsilon) . \end{aligned} \tag{2,15}$$

Уравнение (2,14) можно рассматривать как уравнение в частных производных для функции S или как обыкновенное дифференциальное уравнение в векторном пространстве. Пусть X — пространство Банаха, элементами которого являются функции $y(\xi)$, $-\infty < \xi < \infty$, измеримые, ограниченные, периодические с периодом 2, $\int_0^2 y(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0$, $\|y\| = \sup_\xi y(\xi)$. Пусть X_1 — множество таких функций $y \in X$, которые непрерывны и обладают непрерывной производной; X_1 будет пространством Банаха, если ввести $\|y\|_1 = \max\limits_{\xi} |\mathrm{d}/\mathrm{d}\xi\, y(\xi)|$. Для $y \in X_1$ будет, очевидно, $\|y\| \leqq \frac{1}{2}\|y\|_1$ (см. (2,8)). Положим, далее, $Y = I_\xi y$ и для фиксированного τ

$$\begin{aligned} F(y, \tau, \varepsilon) = \tfrac{1}{2} f(\xi - \tau/\varepsilon, \tau/\varepsilon, Y(\xi) - Y(-\xi + 2\tau/\varepsilon) , \quad y(\xi) + y(-\xi + 2\tau/\varepsilon) , \\ y(\xi) - y(-\xi + 2\tau/\varepsilon)) . \end{aligned} \tag{2,16}$$

Исследуем уравнение

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\, y = F(y, \tau, \varepsilon) \tag{2,17}$$

(где, наконец, положим $y = S_\xi$). Покажем прежде всего: если $y \in X$, то и $F(y, \tau, \varepsilon) \in X$. Для этого достаточно убедиться, что

$$\int_{-1+\tau/\varepsilon}^{1+\tau/\varepsilon} F(y, \tau, \varepsilon)(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} f(\xi, \tau/\varepsilon, Y(\xi + \tau/\varepsilon) -$$
$$- Y(-\xi + \tau/\varepsilon), y(\xi + \tau/\varepsilon), + y(-\xi + \tau/\varepsilon), y(\xi + \tau/\varepsilon) - y(-\xi + \tau/\varepsilon))\,\mathrm{d}\xi = 0 ,$$

ибо подинтегральное выражение есть нечетная функция переменной ξ ввиду (2,3) ($Y(\xi + \tau/\varepsilon) - Y(-\xi + \tau/\varepsilon)$ — нечетная функция переменной ξ). В силу (2,9) и (β) очевидно

$$(2{,}18)\qquad \|F(y_2, \tau, \varepsilon) - F(y_1, \tau, \varepsilon)\| \leqq 3R\|y_2 - y_1\| \text{ для } \|y_1\|, \|y_2\| < \tfrac{1}{2}H\,.$$

Очевидно также

$$(2{,}19)\qquad \|F(y, \tau, \varepsilon)\| \leqq \tfrac{1}{2}R \quad \text{для} \quad \|y\| \leqq \tfrac{1}{2}H\,,$$

и F — непрерывная функция переменной τ. Отсюда, между прочим, следует теорема о существовании для решения уравнения (2,17). Далее имеет место лемма:

Лемма 2,3. *Если* $y_1, y_2 \in X_1$, $\|y_1\|_1$, $\|y_2\|_1 \leqq H$, *то*

$$F(y_1, \tau, \varepsilon) \in X_1 \quad \text{и} \quad \|F(y_1, \tau, \varepsilon)\|_1 \leqq C\,,$$
$$\|F(y_2, \tau, \varepsilon) - F(y_1, \tau, \varepsilon)\|_1 \leqq C\|y_2 - y_1\|_1\,.$$

Мы докажем только, что $F(y_1, \tau, \varepsilon) \in X_1$. Если в (2,16) положить $\zeta = \xi - \tau/\varepsilon$, то нужно доказать, что функция

$$\chi(\zeta) = f(\zeta, \tau/\varepsilon, Y(\zeta + \tau/\varepsilon) - Y(-\zeta + \tau/\varepsilon), y(\xi + \tau/\varepsilon) + y(-\zeta + \tau/\varepsilon)\,,$$
$$y(\zeta + \tau/\varepsilon) - y(-\zeta + \tau/\varepsilon))$$

непрерывна и обладает непрерывной производной. Из предположения (δ) следует, что χ непрерывна в точках $x = n$, n — целое. $\chi(\zeta)$ обладает непрерывной производной ($\zeta \neq n$), причем существуют пределы $\lim \mathrm{d}\chi/\mathrm{d}\zeta$ для $\zeta \to n + 0$ и для $\zeta \to n - 0$. Так как $\chi(-\zeta) = -\chi(\zeta) = \chi(2 - \zeta)$, функция $\mathrm{d}\chi/\mathrm{d}\zeta$ всюду непрерывна.

Из леммы 2,3 следует: если $y_0 \in X_1$, то существует функция $y(\tau)$ для $\tau \in \langle 0, L\rangle$, удовлетворяющая уравнению (2,17) и начальному условию $y(0) = y_0$. Притом L можно взять независимым от ε и $y(\tau) \in X_1$ для любого τ. Нетрудно показать, что функция $Y(\xi, \tau)$ обладает непрерывными производными $Y_\xi = y$, $Y_{\xi\xi}$, Y_τ, $Y_{\xi\tau}$ и поэтому формула (2,15) дает решение задачи Коши, сформулированной в п. 2,2, которое обладает непрерывными производными второго порядка.

Для того, чтобы можно было применить теорему 1,1 к уравнению (2,17), где $y \in X$, заметим, что

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} F(y, \tau, \varepsilon)\,\mathrm{d}\tau = \frac{\varepsilon}{2}\int_{\tau_1/\varepsilon}^{\tau_2/\varepsilon} f(\xi - \lambda, \lambda, Y(\xi) -$$
$$- Y(-\xi + 2\lambda), y(\xi) + y(-\xi + 2\lambda), y(\xi) - y(-\xi + 2\lambda))\,\mathrm{d}\lambda\,.$$

Обозначим

$$(2{,}20)\qquad \lim_{\Lambda\to\infty}\frac{1}{2\Lambda}\int_0^{\Lambda} f(\xi - \lambda, \lambda, Y(\xi) - Y(-\xi + 2\lambda), y(\xi) + y(-\xi + 2\lambda)\,,$$
$$y(\xi) - y(-\xi + 2\lambda))\,\mathrm{d}\lambda = F_0(y)\,.$$

Предел (2,20) существует причем равномерно относительно ξ и относительно $y \in X$, $\|y\| \leqq \frac{1}{2}H$, если функция f обладает относительно второй переменной (переменной t) периодом T. Это очевидно в том случае, когда T рационально, ибо тогда функция переменной λ, которая стоит за знаком интеграла в (2,20), периодическая. Если же T иррационально, то

$$F_0(y)(\xi) = \frac{1}{2T}\int_0^T\int_0^2 f(\xi - \eta, \tau, Y(\xi) - Y(-\xi + 2\eta), y(\xi) + y(-\xi + 2\eta), y(\xi) - y(-\xi + 2\eta))\, \mathrm{d}\eta\, \mathrm{d}\tau$$

и равномерную сходимость в (2,20) можно доказать ввиду того, что $f(x, t, u, v, w)$ непрерывна относительно переменной t, тем, что мы проследим, как точка (λ, λ), где первую координату мы берем по модулю 2, а вторую по модулю T, постепенно заполняет прямоугольник (η, τ), $0 \leqq \eta < 2$, $0 \leqq \tau < T$. Существует последовательность пар целых чисел p_j, q_j $(p_j, q_j) = 1$, $q_j \to \infty$, $j = 1, 2, 3, \ldots$ так, что $2/T = p_j/q_j + z_j$, $|z_j| \leqq 1/q_j^2$ (см. [5], теорема 9 и теорема 14; [6], I, § 1, теорема 1). Поэтому числа $\lambda_0 + 2kq_j + 2$, $\lambda_0 + 2kq_j + 4, \ldots$ $\ldots, \lambda_0 + 2(k+1)\, q_j \bmod T$ можно записать в виде

$$\lambda_0 + 2kq_j + \varrho_0, \lambda_0 + 2kq_j + \frac{T}{q_j} + \varrho_1,$$
$$\lambda_0 + 2kq_j + \frac{2T}{q_j} + \varrho_2, \ldots, \lambda_0 + 2kq_j + \frac{(q_j - 1)\,T}{q_j} + \varrho_{q_j-1} \bmod T,$$

где $|\varrho_i| \leqq T/q_j$, $i = 0, 1, 2, \ldots, q_j - 1$, $k = 1, 2, \ldots$ Поэтому числа $(\lambda_0 + 2n, \lambda_0 + 2n)\, (\bmod 2, \bmod T)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ заполнят равномерно отрезок (λ_0, τ), $0 \leqq \tau < T$. Притом быстрота сходимости в (2,20) зависит от T.

Очевидно, $F_0(y)$ также удовлетворяет (2,18) и (2,19). Поэтому к уравнению (2,17) и

$$\text{(2,21)} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = F_0(y)$$

можно применить теорему 1,1. Если $y_0(\tau)$, $\tau \in \langle 0, L\rangle$, $y_0(0) = y_0$ есть решение уравнения (2,21), то для решения $y(\tau, \varepsilon)$, $y(0, \varepsilon) = y_0$ уравнения (2,17) можно написать $y(\tau, \varepsilon) = y_0(\tau) + z(\tau, \varepsilon)$, где $z(\tau, \varepsilon) \to 0$ равномерно на интервале $\langle 0, L\rangle$ для $\varepsilon \to 0$. Для решения исходной проблемы получаем

$$\text{(2,22)} \qquad u(x, t, \varepsilon) = Y_0(x + t, \varepsilon t) - Y_0(-x + t, \varepsilon t) + Z(x, t, \varepsilon),$$

где $Y_0(\xi, \tau) = T_\xi y_0(\xi, \tau)$ и функции Z, Z_x, Z_t сходятся на интервале $\langle 0, L/\varepsilon\rangle$ равномерно к нулю (ср. (2,15) и (2,15')).

3. Примеры. В этой части мы более подробно исследуем уравнения

$$\text{(3,1)} \qquad u_{tt} - u_{xx} = \varepsilon(1 - u_x^2)\, u_t\,, \quad 0 \leqq x \leqq 1, t \geqq 0\,,$$

$$\text{(3,2)} \qquad u_{tt} - u_{xx} = \varepsilon(1 - u_t^2)\, u_t\,,$$

$$\text{(3,3)} \qquad u_{tt} - u_{xx} = \varepsilon(1 - u^2)\, u_t$$

с краевыми условиями $u(0, t) = u(1, t) = 0$. Нашей целью при этом будет решение вопроса, напоминают ли свойства уравнений (3,1)–(3,3) свойства уравнения Бан дер Паоля

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2)\,\dot{x} \tag{3,4}$$

(сравни, напр., [4], XI, § 2; [2], I, § 4).

А именно, мы постараемся ответить относительно уравнений (3,1)–(3,4) на вопрос

(ω) Существуют липостоянные $K = K(\beta)$ и $\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}(\beta)$ так, что $\|u(.,t,\varepsilon)\| \leqq K$ для каждого решения $u(x, t, \varepsilon)$ соответственного уравнения такого, что $\|u(., 0, \varepsilon)\| \leqq \beta$ и для любого $\varepsilon, 0 < \varepsilon \leqq \tilde{\varepsilon}$? (Притом

$$\|u(., t, \varepsilon)\| = \max_x \left(|u_x(x, t, \varepsilon)|, |u_t(x, t, \varepsilon)|\right).)$$

Решение $y(\tau)$ уравнения (2,21), удовлетворяющее начальному условию $y(0) = \tilde{y}$, определено на некотором наибольшем интервале $\langle 0, T^*)$, $0 < T^* \leqq \infty$. Притом, если $T^* < \infty$ то $\|y(\tau)\| \to \infty$ для $\tau \to T^* - 0$. Из теоремы 1,1 и из (2,22) следует, что ответ на вопрос (ω) будет отрицательным, если в данном случае уравнение (2,21) обладает таким решением $y(\tau)$, что $\|y(0)\| < \beta$, $\|y(\tau)\| \to \infty$ для $\tau \to T^* - 0$. Дело в том, что при применении теоремы 1,1 можно взять T как угодно близким к T^*, если $T^* < \infty$ (как угодно большим, если $T^* = \infty$).

Разберем теперь отдельные случаи. Уравнение (2,21), которое получим из уравнения (3,1), имеет вид

$$2\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\,y = y(1 + Py^2 - y^2) + Py^3\,, \tag{3,5}$$

где $y = y(\xi, \tau)$, $Py^i = \frac{1}{2}\int_0^2 (y(\xi, \tau))^i\,\mathrm{d}\xi$, $i = 2, 3$. Мы будем искать такое решение уравнения (3,5), чтобы $y(\xi, 0)$ была нечетной непрерывной функцией и $y(\xi, 0) \neq 0$ для $\xi \neq \ldots -1, 0, +1, \ldots$ Тогда $y(\xi, \tau)$ — нечетная функция переменной ξ для каждого τ и $Py^3 = 0$, ибо уравнение (3,5) можно исследовать на подпространстве нечетных функций, входящих в X. Предположим, что искомое решение определено для $0 \leqq \tau < \infty$. Тогда согласно (3,5) будет $\liminf_{\tau\to\infty} |y(\xi, \tau)| \geqq 1$ для любого $\xi \neq \ldots -1, 0, 1, \ldots$ Допустим, что нам уже известно, что $\liminf_{\tau\to\infty} |y(\xi, \tau)| \geqq \beta > 0$ для любого $\xi \neq \ldots -1, 0, 1, \ldots$ Тогда $\liminf_{\tau\to\infty} Py^2 \geqq \beta^2$, откуда согласно (3,5) $\liminf_{\tau\to\infty} |y(\xi, \tau)| \geqq (\beta^2 + 1)^{1/2}$. Поэтому будет $\lim_{\tau\to\infty} |y(\xi, \tau)| = \infty$. Во всяком случае для решения векторного уравнения (3,5) имеет место $\|y(\tau)\| \to \infty$ для $\tau \to T^* - 0$ и для уравнения (3,1) ответ на вопрос (ω) будет отрицательным.

Обратимся теперь к уравнению (3,2). В этом случае уравнение (2,21) примет вид

$$2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}y = y - y^3 - 3yPy^2 + Py^3, \tag{3,6}$$

где

$$y = y(\xi, \tau), \quad Py^i = \frac{1}{2}\int_0^2 (y(\xi, \tau))^i \, \mathrm{d}\xi, \quad i = 2, 3.$$

Покажем, что в этом случае ответ на вопрос (ω) будет утвердительным.

Лемма 3,1. *Пусть функвия v интегрируема для*

$$\xi \in \langle 0, 2\rangle \quad \textit{и} \quad \sup_\xi |v(\xi)| = \gamma, \int_0^2 v^2(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 2\beta.$$

Тогда

$$\left|\frac{1}{2}\int_0^2 v^3(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right| \leqq \gamma\beta. \tag{3,7}$$

Доказательство очевидно.

Для решения $y(\tau)$ управления (3,6) существует производная $\mathrm{d}y/\mathrm{d}\tau$. Так как функционал, сопоставляющий каждому $z = z(\xi) \in X$ значение $z(\xi_0)$, является органиченным для любого ξ_0, то существует производная $\partial y(\xi, \tau)/\partial\tau$ и

$$2\frac{\partial y(\xi, \tau)}{\partial \tau} = y(\xi, \tau) - y^3(\xi, \tau) - \frac{3}{2}y(\xi, \tau)\int_0^2 y^2(\xi, \tau)\,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2}\int_0^2 y^3(\xi, \tau)\,\mathrm{d}\xi. \tag{3,6'}$$

Допустим теперь, что для данного решения $y(\tau) = y(\xi, \tau)$ уравнения (3,6) и для данного τ имеет место $\|y(\tau)\| = \sup_\xi |y(\xi, \tau)| = 1 + \alpha, \alpha > 0$. Если $y(\xi_1, \tau) = 1 + \alpha$, то согласно лемме 3,1 (мы положили $Py^2 = \beta$) будет

$$y(\xi_1, \tau) - y^3(\xi_1, \tau) - 3y(\xi_1, \tau)\,Py^2(\tau) + Py^3(\tau) \leqq$$
$$\leqq 1 + \alpha - (1 + \alpha)^3 - 3(1 + \alpha)\,\beta + (1 + \alpha)\,\beta < -2\alpha - 3\alpha^2 - \alpha^3.$$

Аналогично, если $y(\xi_2, \tau) = -1 - \alpha$, то

$$y(\xi_2, \tau) - y^3(\xi_2, \tau) - 3y(\xi_2, \tau)\,Py^2(\tau) + Py^3(\tau) > 2\alpha + 3\alpha^2 + \alpha^3.$$

Так как те же самые неравенства справедливы и для таких ξ, для которых $|y(\xi)|$ достаточно близко к $1 + \alpha$, то отсюда следует: Если $\|y(\tau)\| = 1 + \alpha$, то $\mathrm{D}^+\|y(\tau)\| \leqq -\alpha - \frac{3}{2}\alpha^2 - \frac{1}{2}\alpha^3$, где D^+ означает верхнюю производную справа. Таким образом мы получаем: Если $y(\tau)$ — решение уравнения (3,6), $y(0) = y_0$, то $y(\tau)$ определено для всех $\tau \geqq 0$, причем $\|y(\tau)\| \leqq 1 + \alpha(\tau)$, где $\alpha(\tau)$ — решение дифференциального уравнения

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\tau} = -\alpha - \frac{3}{2}\alpha^2 - \frac{1}{2}\alpha^3, \quad \alpha(0) = \max(\|y(0)\| - 1, 0).$$

Отсюда и из (2,22) следует, что в этом случае на вопрос (ω) можно дать положительный ответ. Далее $\limsup_{\tau\to\infty} |y(\tau, \xi)| \leqq 1$ для каждого решения уравнения (3,6).

Для Py^2 можно найти еще более сильную оценку. Умножим уравнение (3,6) на функцию $\frac{1}{2}y$ и проинтегрируем от 0 до 2:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} Py^2 = Py^2(1 - 3Py^2) - Py^4 \leqq Py^2(1 - 4Py^2), \tag{3,8}$$

согласно неравенству Гельдера. Отсюда $\limsup_{\tau\to\infty} Py^2 \leqq \frac{1}{4}$ для каждого решения уравнения (3,6).

Исследуем теперь уравнение (3,3). Уравнение (2,21) примет в этом случае вид

$$2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} y = y(1 - Y^2 - PY^2), \tag{3,9}$$

где

$$y = y(\xi, \tau), \quad Y = Y(\xi, \tau) = I_\xi y(\xi, \tau), \quad PY^2 = \frac{1}{2}\int_0^2 Y^2(\xi, \tau)\,\mathrm{d}\xi .$$

Свойства уравнения (3,9) легче всего исследовать, если на обе части уравнения подействовать оператором I_ξ (см. (2,7)). Очевидно,

$$I_\xi y = Y, \quad I_\xi Y^2 y = \frac{1}{3} Y^3 - \frac{1}{3} PY^3, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} I_\xi y = I_\xi \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} y,$$

так что получаем

$$2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} Y = Y - YPY^2 - \frac{1}{3} Y^3 + \frac{1}{3} PY^3 . \tag{3,10}$$

Уравнение (3,10) для Y аналогично уравнению (3,6) для y. Поэтому можно аналогично вывести

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} PY^2 = PY^2(1 - PY^2) - \frac{1}{3} PY^4 \leqq PY^2\left(1 - \frac{4}{3} PY^2\right).$$

В силу этого для каждого решения уравнения (3,10) будет

$$\limsup_{\tau\to\infty} PY^2 \leqq \tfrac{3}{4} . \tag{3,11}$$

Как и для уравнения (3,6), выведем: Если $\|Y(\tau)\| = \sqrt{3} + \alpha$, $\alpha \geqq 0$, то $\mathrm{D}^+\|Y(\tau)\| \leqq -\alpha - \sqrt{\frac{3}{2}}\alpha^2 - \frac{1}{6}\alpha^3$. Если $Y(\tau)$ — какое-либо решение уравнения (3,10), $Y(0) = Y_0$, то $Y(\tau)$ определено для всех τ и имеет место

$$\|Y(\tau)\| \leqq \sqrt{3} + \alpha(\tau), \tag{3,12}$$

где $\alpha(\tau)$ — решение дифференциального уравнения

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = -\alpha - \sqrt{\tfrac{3}{2}}\alpha^2 - \tfrac{1}{6}\alpha^3\,, \quad \alpha(0) = \max\left(\|Y(0)\| - \sqrt{3}, 0\right).$$

В одном частном случае можно легко описать предельное поведение функции $Y(\xi, \tau)$ для $\tau \to \infty$.

Лемма 3,2. *Пусть функция* $Y(\xi, 0)$ *органичена, измерима, нечетна и периодична с периодом* 2, $Y(\xi, 0) \neq 0$ *почти всюду. Тогда*

$$\lim_{\tau\to\infty} Y(\xi, \tau) = \sqrt{\tfrac{3}{2}}\operatorname{sgn} Y(\xi, 0) \quad \textit{если} \quad Y(\xi, 0) \neq 0\,,$$
$$Y(\xi, \tau) = 0 \qquad \textit{если} \quad Y(\xi, 0) = 0\,.$$

Доказательство. Согласно (3,12) решение $Y(\tau)$ определено для $\tau \in \langle 0, \infty)$. Y является при любом τ нечетной функцией переменной ξ, так как уравнение (3,10) можно исследовать на подпространстве нечетных функций из X. Согласно (3,11) будет $\limsup\limits_{\tau\to\infty} PY^2 \leqq \frac{3}{4}$. Пусть уже будет $PY^2 \leqq \frac{3}{4} + \eta$, η — малое положительное число. Тогда

$$\frac{d}{d\tau} Y^2 = Y^2(1 - PY^2 - \tfrac{1}{3}Y^2) \;\; \textit{и} \;\; \frac{\partial}{\partial\tau} Y^2 \geqq Y^2(\tfrac{1}{4} - \eta - \tfrac{1}{3}Y^2)\,,$$

итак, $\partial/\partial\tau\, Y^2(\xi, \tau) > 0$, если $0 < Y^2(\xi, \tau) < \frac{3}{4} - 3\eta$. Поэтому $\liminf\limits_{\tau\to\infty} Y^2(\xi, \tau) \geqq \frac{3}{4}$, если $Y^2(\xi, 0) > 0$, ибо $Y(\xi, 0) \neq 0$ влечет за собой $Y(\xi, \tau) \neq 0$ для $\tau \geqq 0$. Ввиду (3,11) будет обязательно $\lim\limits_{\tau\to\infty} Y^2(\xi, \tau) = \frac{3}{4}$.

Если $y(\tau)$ $(y(0) = y_0)$ — решение уравнения (3,9), то $Y(\tau) = I_\xi y(\tau)$ удовлетворяет уравнению (3,10); $Y(\tau)$ определено для $\tau \in \langle 0, \infty)$ (см. (3,12)) и однозначно определеняется начальным условием $Y(0) = I_\xi y(0)$. Считая на момент Y известной функцией, мы видим, что уравнение (3,9) линейно относительно y; поэтому невозможно, чтобы для какого-либо конечного T^* было $\|y(\tau)\| \to \infty$ для $\tau \to T^* - 0$, и, следовательно, $y(\tau)$ также определена для всех $\tau \geqq 0$. Если $Y(0) = Y(\xi, 0)$ — нечетная функция переменной ξ, то из леммы 3,2 следует $\|y(\tau)\| \to \infty$ для $\tau \to \infty$, так что ответ на вопрос (ω) будет отрицательным.

Литература

[1] *Н. Н. Воголюбов:* О некоторых статистических методах в математической физике. АН УССР, 1945.

[2] *Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский:* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Физматгиз, Москва, 1958.

[3] *И. И. Гихман:* По поводу одной теоремы Н. Н. Боголюбова. Украинский матем. журнал *IV*, *2* (1952), 215—219.

[4] *S. Lefschetz*: Differential Equations; Geometric Theory, Interscience Publishers, New York, London.
[5] *А. Я. Хинчин:* Цепные дроби. Гостехиздат, Москва, Ленинград, 1949.
[6] *J. W. Cassels*: An Introduction to Diophantine Approximations. Cambridge University Press, 1957.

Výtah

O PŘIBLÍŽENÍ V PRŮMĚRU V NĚKTERÝCH SPECIÁLNÍCH PŘÍPADECH OKRAJOVÝCH ÚLOH PRO PARCIÁLNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

JAROSLAV KURZWEIL, Praha

Platnost Bogoljubovova principu přiblížení v průměru známého pro obyčejné diferenciální rovnice je dokázána pro obyčejné diferenciální rovnice v Banachově prostoru (věta 1). Možnost použití tohoto principu k vyšetřování okrajových úloh pro parciální rovnice je prokázána na slabě nelineární rovnici pro kmity struny. Ve třech konkrétních případech (rovnice (3,1), (3,2), (3,3)) se vyšetřuje, zda řešení u a derivace $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial t$ zůstanou ohraničené pro $t \to \infty$ (při malých kladných ε). Ukazuje se, že kladnou odpověď lze dát pouze pro rovnici (3,2).

Summary

THE AVERAGING PRINCIPLE IN CERTAIN PARTIAL DIFFERENTIAL BOUNDARY PROBLEMS

JAROSLAV KURZWEIL, Praha

The Bogoljubov averaging principle, known in the case of ordinary differential equations, is extended to cover ordinary differential equations in a Banach space (Theorem 1). Applications of this theorem to partial differential boundary problems are then illustrated on the weakly nonlinear equation of a vibrating string. In three cases (equations (3,1), (3,2), (3,3)) it is considered whether the solution u and $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial t$ remain bounded for large t (and small positive ε). It is shown that the answer is in the affirmative only for equation (3,2).