Alois Švec

K definici Čechových linearisujících transformací

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 88 (1963), No. 4, 430--432

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117478

K DEFINICI ČECHOVÝCH LINEARISUJÍCÍCH TRANSFORMACÍ

ALOIS ŠVEC, Praha

(Došlo 13. dubna 1962)

V práci je nalezeno zobecnění Čechových linearisujících transformací.

Všechna v dalším uvažovaná zobrazení a vektorová pole se předpokládají třídy C^2. Cílem této poznámky je důkaz následující věty.

Věta. *Buďtež dány afinní prostory A_n, A'_n, body $P \in A_n$, $P' \in A'_n$, okolí Ω, Ω' bodů P, P' a homeomorfismus $C : \Omega' \to \Omega$, pro který $C(P') = P$. Nechť $\mathscr{A} : A_n \to A'_n$ je tečná afinita korespondence C pro dvojici odpovídajících si bodů P, P'. V bodě P' nechť jsou dány dva vektory V^*, W^*. V Ω' uvažujme dvě vektorová pole V, W taková, že $V_{P'} = V^*$, $W_{P'} = W^*$; v Ω' utvořme vektorová pole V', W', pro něž $V'_y = y - \mathscr{A}\, C(y) + \mathscr{A}(\mathrm{d}C)_y\, V$, $W'_y = y - \mathscr{A}\, C(y) + \mathscr{A}(\mathrm{d}C)_y\, W$ pro $y \in \Omega'$. Potom vektor*

$$V^* \square W^* = \tfrac{1}{2}[V, W']_{P'} + \tfrac{1}{2}[W, V']_{P'}$$

v bodě P' nezávisí na volbě vektorových polí V, W a násobení $\square$ vytváří z vektorového prostoru V'_n prostoru A'_n komutativní algebru (kterou nazveme Čechovou algebrou).

Označíme-li $\{V^*\}$ přímku, určenou bodem P' a vektorem V^*, pak transformace $\{V^*\} \to \{V^* \square V^*\}$ je Čechova linearisující transformace korespondence C v bodě P'.

Důkaz. V prostorech A_n resp. A'_n zvolme pevné base tak, že každý bod z A_n resp. A'_n má souřadnice (x^α) resp. (y^α) a (1) P resp. P' mají souřadnice $(0, 0, \ldots, 0)$, (2) tečná afinita A má rovnice $y^\alpha = x^\alpha$. Korespondence C je pak dána rovnicemi

$$y^\alpha = F^\alpha(x^\beta) \quad \text{resp.} \quad x^\alpha = G^\alpha(y^\beta)\,,$$

kde

$$F^\alpha(0, \ldots, 0) = G^\alpha(0, \ldots, 0) = 0\,, \quad \left(\frac{\partial F^\alpha}{\partial x^\beta}\right)_0 = \left(\frac{\partial G^\alpha}{\partial y^\beta}\right)_0 = \delta^\alpha_\beta\,.$$

V Ω resp. Ω' máme basi modulu vektorových polí $\partial/\partial x^\alpha$ resp. $\partial/\partial y^\alpha$. V bodě P' buďtež dány vektory

$$V^* = v^{*\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_0, \quad W^* = w^{*\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_0.$$

Uvažujme nyní v Ω' vektorová pole

$$V = v^\alpha(y^\beta)\frac{\partial}{\partial y^\alpha}, \quad W = w^\alpha(y^\beta)\frac{\partial}{\partial y^\alpha},$$

$$v^\alpha(0, \ldots, 0) = v^{*\alpha}, \quad w^\alpha(0, \ldots, 0) = w^{*\alpha}.$$

Potom je zřejmě

$$(\mathrm{d}C)\, V = v^\alpha(F^\beta(x^\gamma))\frac{\partial G^\varepsilon}{\partial y^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\varepsilon}, \quad (\mathrm{d}C)\, W = w^\alpha(F^\beta(x^\gamma))\frac{\partial G^\varepsilon}{\partial y^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\varepsilon},$$

$$V' = v^\alpha(y^\beta)\frac{\partial G^\varepsilon}{\partial y^\alpha}\frac{\partial}{\partial y^\varepsilon}, \quad W' = w^\alpha(y^\beta)\frac{\partial G^\varepsilon}{\partial y^\alpha}\frac{\partial}{\partial y^\varepsilon}.$$

Jednoduchý výpočet dává

$$[V, W'] + [W, V'] = 2v^\alpha w^\beta \frac{\partial^2 G^\varepsilon}{\partial y^\alpha \partial y^\beta}\frac{\partial}{\partial y^\varepsilon} + v^\alpha\left(\frac{\partial w^\beta}{\partial y^\alpha}\frac{\partial G^\varepsilon}{\partial y^\beta} - \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial y^\beta}\frac{\partial G^\beta}{\partial y^\alpha}\right)\frac{\partial}{\partial y^\varepsilon} +$$
$$+ w^\alpha\left(\frac{\partial v^\beta}{\partial y^\alpha}\frac{\partial G^\varepsilon}{\partial y^\beta} - \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial y^\beta}\frac{\partial G^\beta}{\partial y^\alpha}\right)\frac{\partial}{\partial y^\varepsilon}$$

a tedy

$$(*) \qquad V^* \,\square\, W^* = \left(\frac{\partial^2 G^\varepsilon}{\partial y^\alpha \partial y^\beta}\right)_0 v^{*\alpha} w^{*\beta} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y^\varepsilon}\right)_0.$$

Nechť γ je křivka v Ω' procházející bodem P' a daná rovnicemi $y^\alpha = f^\alpha(t)$, kde $y^\alpha(0) = 0$. Její tečný vektor v P' je

$$V^* = \left(\frac{\mathrm{d}f^\alpha}{\mathrm{d}t}\right)_0 \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_0,$$

takže $V^* \,\square\, V^*$ se snadno najde z (*), kde $v^{*\alpha} = w^{*\alpha} = (\mathrm{d}f^\alpha/\mathrm{d}t)_0$. Křivka $\mathscr{A}C\gamma$ má rovnice $y^\alpha = G^\alpha(f^\beta(t)) \equiv g^\alpha(t)$. Nyní

$$f^\alpha(0) = g^\alpha(0), \quad \left(\frac{\mathrm{d}g^\alpha}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \left(\frac{\partial G^\alpha}{\partial y^\beta}\right)_0 \left(\frac{\mathrm{d}f^\beta}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}f^\alpha}{\mathrm{d}t}\right)_0,$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 g^\alpha}{\mathrm{d}t^2}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2 G^\alpha}{\partial y^\beta \partial y^\gamma}\right)_0 \left(\frac{\mathrm{d}f^\beta}{\mathrm{d}t}\right)_0 \left(\frac{\mathrm{d}f^\gamma}{\mathrm{d}t}\right)_0 + \left(\frac{\mathrm{d}^2 f^\alpha}{\mathrm{d}t^2}\right)_0,$$

čili

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 g^\alpha}{\mathrm{d}t^2}\right)_0 \left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}^2 f^\alpha}{\mathrm{d}t^2}\right)_0 \left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_0 + V^* \,\square\, V^*,$$

čímž je tvrzení dokázáno.

Резюме

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ЛИНЕАРИЗИРУЮЩИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЧЕХА

АЛОИС ШВЕЦ (Alois Švec), Прага

Пусть A_n, A'_n — аффинные пространства, $C : A_n \to A'_n$ — преобразование, а $\mathscr{A}: A_n \to A'_n$ — его касательное аффинное соответствие в точке $P' = CP$. Пусть в точке P' даны два вектора V_1^*, V_2^* и пусть V_1, V_2 — векторные поля, для которых $(V_i)_{P'} = V_i^*$. Тогда вектор

$$V_1^* \Box V_2^* = \tfrac{1}{2}[V_1, V_2']_{P'} + \tfrac{1}{2}[V_2, V_1']_{P'}\,,$$

где

$$(V_i')_y = y - \mathscr{A}C(y) + \mathscr{A}(\mathrm{d}C)_y V_i$$

в точке P' не зависит от выбора полей V_1, V_2. Пусть $\{V^*\}$ — прямая, определенная точкой P' и вектором V^*; тогда преобразование $\{V^*\} \to \{V^* \Box V^*\}$ является линеаризирующим преобразованием Чеха соответствия C.

Résumé

SUR LA DÉFINITION DES TRANSFORMATIONS LINÉARISANTES DE ČECH

Alois Švec, Praha

Soient A_n, A'_n les espaces affines, $C : A_n \to A'_n$ une transformation et $\mathscr{A} : A_n \to A'_n$ sa transformation affine tangente au point $P' = CP$. Soient donnés deux vecteurs V_1^*, V_2^* au point P' et V_1, V_2 soient deux champs vectoriels pour lesquels $(V_i)_{P'} = V_i^*$. Alors le vecteur

$$V_1^* \Box V_2^* = \tfrac{1}{2}[V_1, V_2']_{P'} + \tfrac{1}{2}[V_2, V_1']_{P'}$$

où

$$(V_i')_y = y - \mathscr{A}\, C(y) + \mathscr{A}(\mathrm{d}C)_y\, V_i$$

à P' ne dépend pas du choix des champs V_1, V_2. Soit $\{V^*\}$ la droite déterminée par le point P' et le vecteur V^*, alors la transformation $\{V^*\} \to \{V^* \Box V^*\}$ est la transformation linéarisante de Čech de la transformation C.